SMA0300 Geometria Analítica
Aula 15

16/05/2023, terça-feira

Miriam Manoel

Aula de hoje:

Posição relativa entre duas retas - parte 2: Revisão breve da teoria e exercício

Exercício envolvendo reta e plano

Perpendicularismo/Ortogonalidade

Projeção ortogonal de um ponto sobre um plano

Projeção ortogonal de uma reta sobre um plano

Exemplo . *Consideremos as retas* $\underline{r}$ *e* $\underline{s}$

$$r : \begin{cases} x = my - 1 \\ z = y - 1 \end{cases}$$

$$s : x = \frac{y}{m} = z,$$

onde $\underline{m}$ *é um número real, não nulo.*

Encontre, se possível, os valores do número real $\underline{m}$*, de modo que:*

1. *as retas* $\underline{r}$ *e* $\underline{s}$ *sejam retas coincidentes;* ,
2. *as retas* $\underline{r}$ *e* $\underline{s}$ *sejam retas paralelas* .
3. *as retas* $\underline{r}$ *e* $\underline{s}$ *sejam concorrentes;*
4. *as retas* $\underline{r}$ *e* $\underline{s}$ *sejam reversas.*

$$r : \begin{cases} x = my - 1 \\ z = y - 1 \end{cases} \qquad\qquad s : x = \frac{y}{m} = z$$

Passando para equações vetoriais, temos:

$$r : (x, y, z) = (-1, 0, -1) + \alpha \cdot (m, 1, 1), \quad \text{para cada} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$s : (x, y, z) = (0, 0, 0) + \beta \cdot (1, m, 1), \quad \text{para cada} \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Os vetores diretores de *r* e *s* são respectivamente,

$$\vec{r} = (m, 1, 1) \quad \text{e} \quad \vec{s} = (1, m, 1).$$

Paralelas ou coincidentes: estes vetores devem ser LD. Logo, *m* = 1.

r e *s* **não** são coincidentes para valor algum de *m*.

r e *s* são paralelas distintas para *m = 1*

Falta discutirmos agora as possibilidades de serem concorrentes e reversas. Note que aqui já devemos começar assumindo $m \neq 1$.

Os pontos

$$R = (-1, 0, -1) \quad \text{e} \quad S = (0,0,0)$$

pertencem às retas r e s, respectivamente

$\overrightarrow{SR}$, $\vec{r}$, $\vec{s}$ são LD ou LI ?

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = -1 - 0 - m^2 + 1 + m - 0 = -m^2 + m$$

Portanto, para $m \neq 0, 1$ *r* e *s* são reversas e nunca concorrentes.

Conclusão:

- $m = 1 \Rightarrow$ **paralelas**
- $m \neq 1 \Rightarrow$ **reversas**
- $\nexists\, m$ **para que sejam coincidentes ou concorrentes.**

Exemplo.

Obtenha a equação geral do plano π que contém o ponto $P = (1, 1, -3)$ e a reta

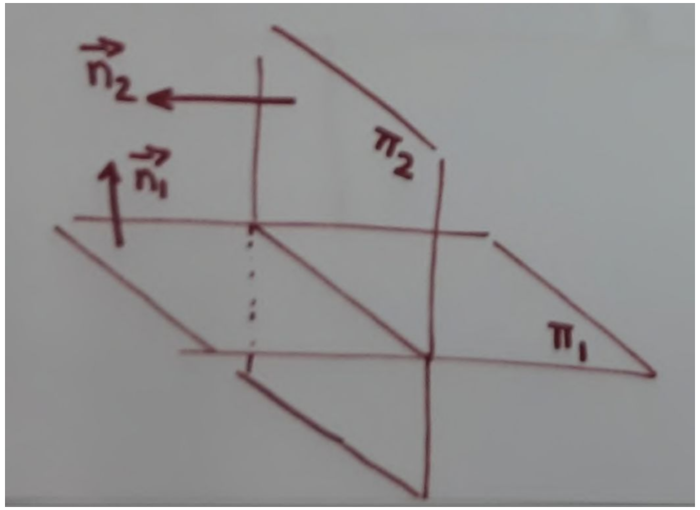
$$r : \begin{cases} x - y + 2 = 0, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

Resolva por feixe de planos.

Perpendicularismo e ortogonalidade

Dois planos são perpendiculares se, e somente se, os seus
vetores normais s

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$$



Exemplo

$\pi_1 : 2x - y + z = 0$

$\pi_2 : x - 2z = 0.$

Exemplo

Obtenha a equação geral do plano que contém a reta

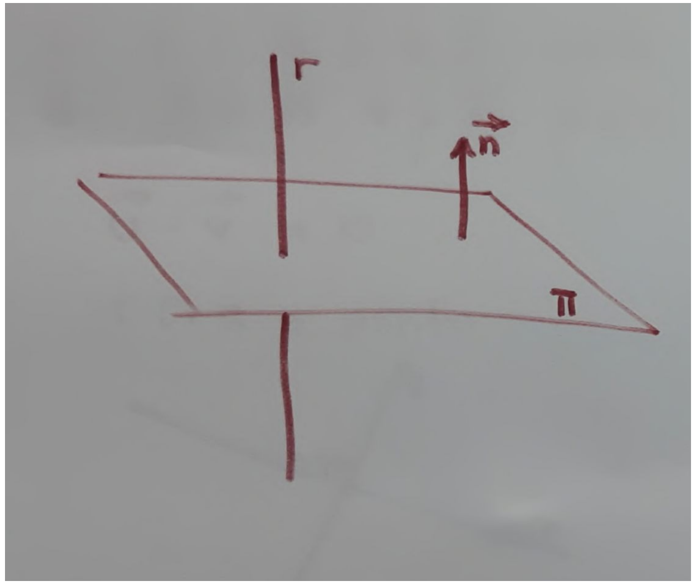
$$r : X = (1, 0, 2) + \mu(4, 1, 0), \mu \in \mathbb{R}$$

e é perpendicular ao plano $\pi : 3x + y + z = 0$.

Uma reta e um plano são perpendiculares se, e somente se, o vetor diretor da reta e o vetor normal do plano são LD:

$r \perp \pi \Leftrightarrow \{\vec{n}, \vec{v}\}$ são LD

$(\vec{v}$ é o vetor diretor da reta $r)$.



Exemplo

$\pi_1 : x - y + 3z + 1 = 0$

$r : X = (6, 1, -4) + \lambda(1, -1, 3), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

"Duas retas perpendiculares" e "duas retas ortogonais"

Retas perpendiculares (são concorrentes)

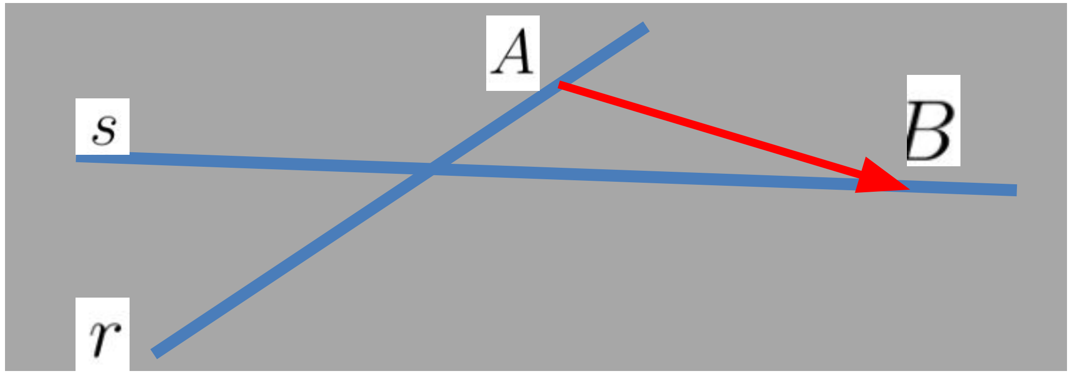
$$r : X = A + \lambda u, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

$$s : Y = B + \mu v, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

onde

$$u.v = 0 \quad \text{e} \quad r \cap s = \text{ponto}.$$

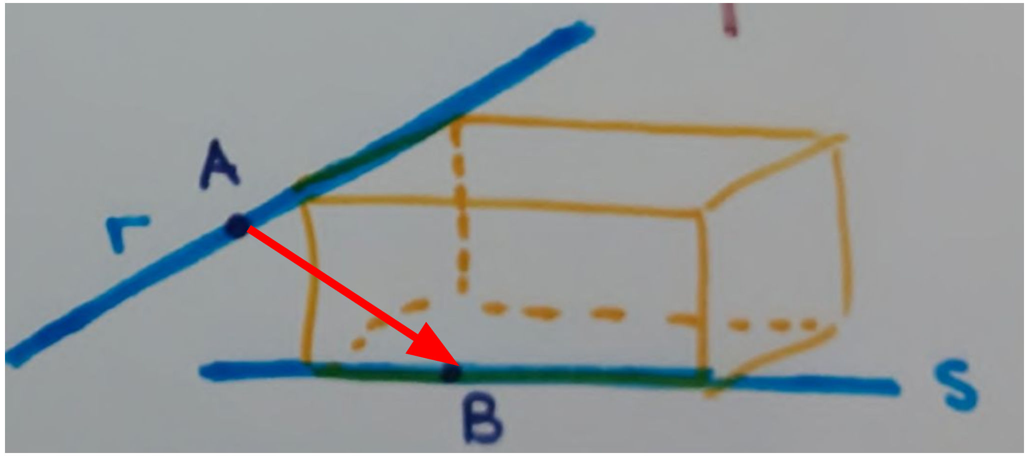
Logo $\{\vec{AB}, u, v\}$ é LD.



Retas ortogonais (são reversas)

$$u.v = 0 \quad \text{e} \quad r \cap s = \emptyset.$$

Neste caso, $\{\vec{AB}, u, v\}$ é LI.



Exemplo

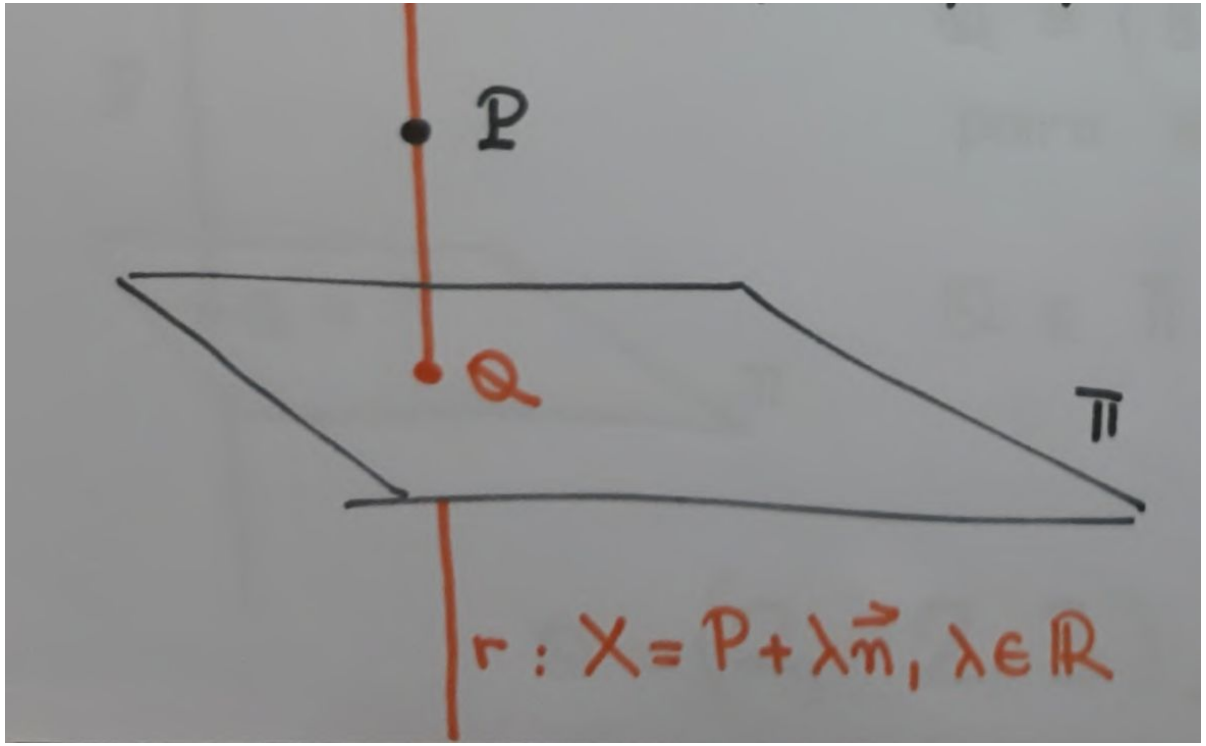
Verifique que as retas

$$r : X = (1, 1, 2) + \lambda(-1, 3, 1), \lambda \in \mathbb{R} \text{ e}$$

$$s : X = (0, 4, 1) + \mu(2, 1, -1), \mu \in \mathbb{R}$$

podem ser retas suporte das arestas de um paralelepípedo reto sem vértices comuns.

Projeção de um ponto sobre um plano



Se Q é tal ponto, então basta impor:

$$Q \in \pi$$

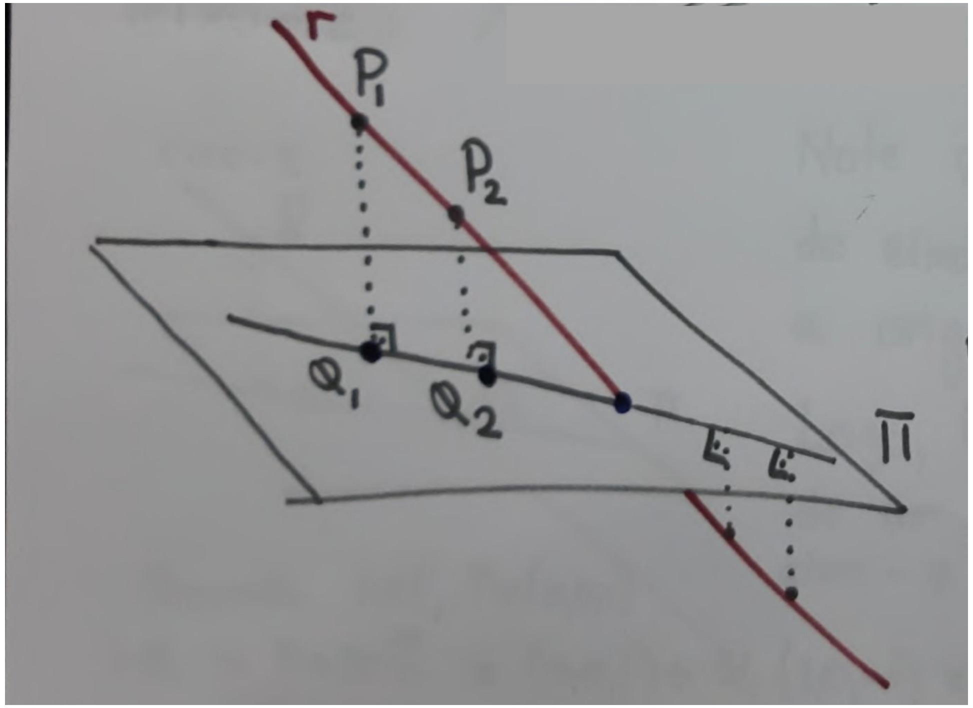
e

$$Q = P + \lambda \vec{n}, \quad \text{para algum } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercício: Encontre a projeção ortogonal do ponto $P = (3, -1, 2)$ sobre o plano $\pi : x + y - z - 3 = 0$.

Projeção de uma reta sobre um plano

A projeção ortogonal da reta r sobre o plano π é
a reta s passando por Q_1 e Q_2, projeções ortogonais de P_1 e P_2, respectivamente, sobre o plano π.



Exercício.

Encontre a projeção ortogonal da reta

$$s : X = (1, 2, -1) + \lambda(2, -1, 0), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

sobre o plano $\pi : x + 2y + z + 1 = 0$.