SMA0300 Geometria Analítica
Aula 14

11/05/2023, quinta-feira

Miriam Manoel

Na aula de hoje…

Esboço de planos a partir da equação geral

Posição relativa entre planos - parte 2

Posição relativa entre reta e plano

Posição relativa entre duas retas - parte 1

Esboço de planos

Para o item (1), cada esboço deve ser feito no sistema de coordenadas canônico:

(1) Faça um esboço da representação geométrica dos planos cujas equações gerais são dadas por:

(i) $x = 2$, (ii) $y + 1 = 0$, (iii) $z + 4 = 0$, (iv) $x - z = 0$, (v) $2x + 3y + 4z - 12 = 0$.

Sugestão para o esboço do plano em (v): como já fizemos em aula, marcar os pontos de intersecção deste plano com os Eixos coordenados (eixo-x, eixo-y e eixo-z) e depois unir esses pontos, visualizando um triângulo deste plano.

(2) Dê a posição relativa (paralelos/ coincidentes/ transversais) dos pares de planos dados no item (1), completando os espaços em branco:

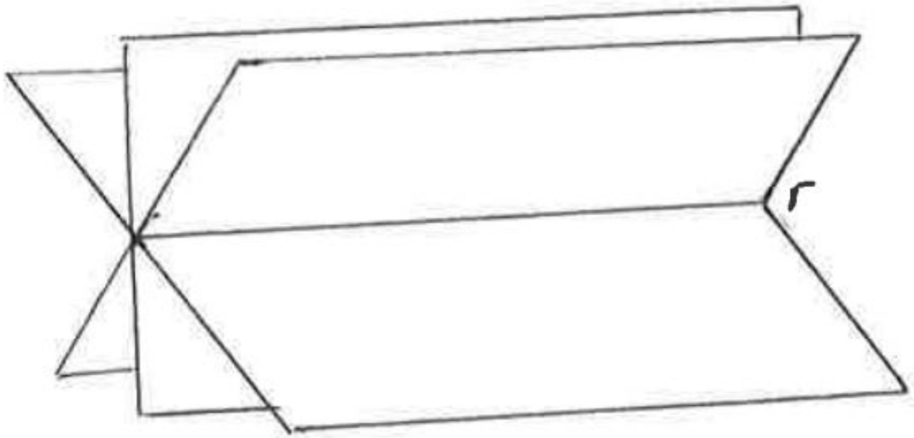
(i) e (ii): ___________

(i) e (iii): ___________

(i) e (iv): ___________

(iv) e (v): ___________

Feixe de planos que contêm uma reta



<u>Proposição</u> seja r a reta de equações planares

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

O feixe de planos que contêm r pode ser descrito pela equação

$$\alpha(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \beta(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$$

com α, β percorrendo o conjunto $\mathbb{R}$, sob a condição $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

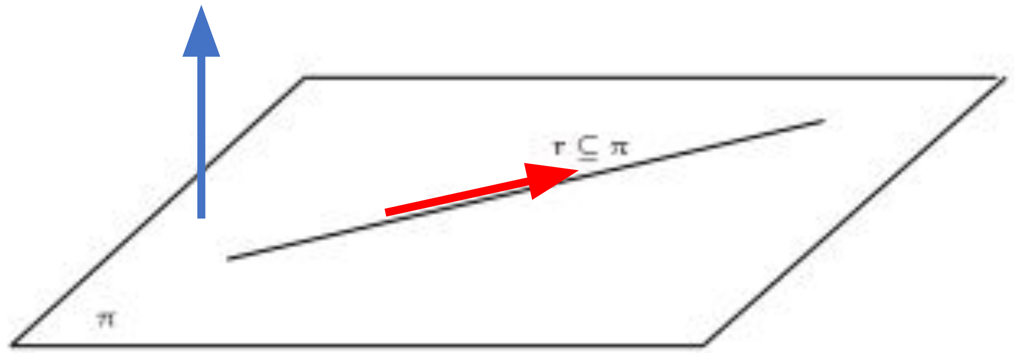
Exercício.

Dados os planos $\pi_1 : x - y + z + 1 = 0$, $\pi_2 : x + y - z - 1 = 0$ e $\pi_3 : x + y + 2z - 2 = 0$, encontre uma equação geral do plano que contém $\pi_1 \cap \pi_2$ e é perpendicular ao plano π_3.

Vamos resolver por feixe de planos.

Posição relativa entre reta e plano

1. A reta $\underline{r}$ está contida no plano $\underline{\pi}$ se, e somente se, a intersecção da reta $\underline{r}$ com o plano $\underline{\pi}$ tem infinitos pontos (veja a figura abaixo).

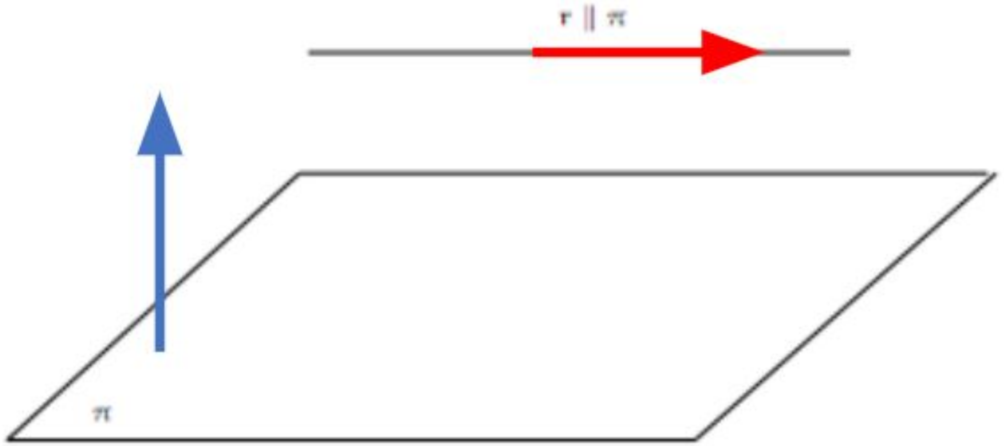


Neste caso, a interseção é a própria reta r.

Verificação deste caso: (1) vetor diretor de r é ortogonal ao vetor normal do plano, ou seja, que o produto escalar é zero.

(2) Um ponto da reta pertence também ao plano.

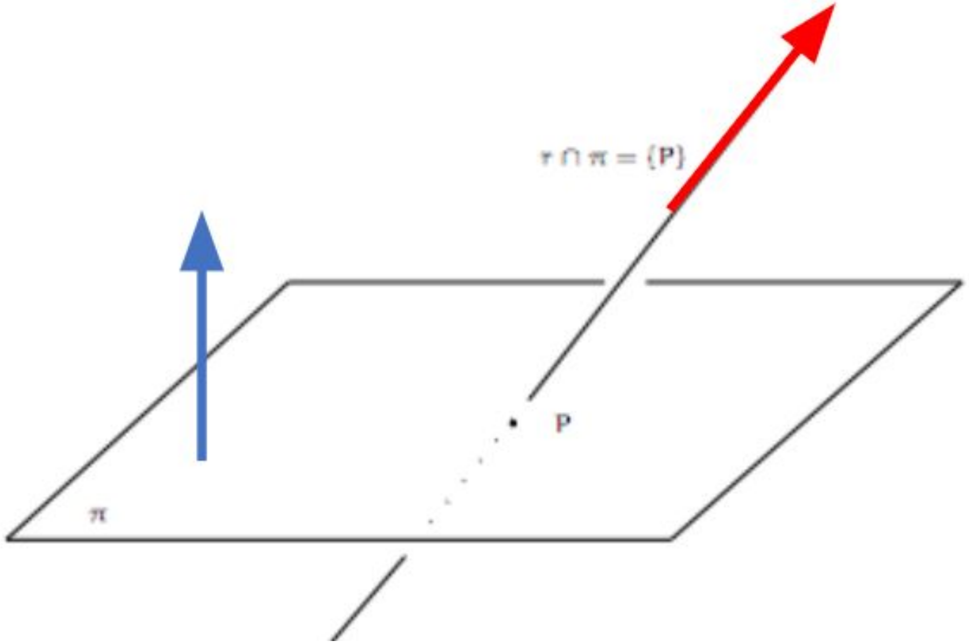
2. A reta r é paralela e não está contida no plano π se, e somente se, a intersecção da reta r com o plano π é vazia (veja a figura abaixo);



Neste caso, a interseção é vazia.

Verificação deste caso: (1) vetor diretor de r é ortogonal ao vetor normal do plano.
(2) Um ponto da reta NÃO pertence ao plano.

3. A reta $\underline{r}$ é concorrente ao plano $\underline{\pi}$ se, e somente se, a intersecção da reta $\underline{r}$ com o plano $\underline{\pi}$ é um único ponto (veja a figura abaixo).



Neste caso, a interseção é um ponto.

Verificação deste caso: (1) vetor diretor de r não é ortogonal ao vetor normal do plano (isto é, o produto escalar não é zero.

(2) Para achar o ponto, basta impor que um ponto da reta pertence ao plano.

Exemplo 1. Dê a posição relativa entre a reta r e o plano $\boldsymbol{\pi}$ dados por

$$\pi: \quad x - y + z + 4 = 0$$

$$r: \quad X = (2, 1, -5) + \lambda\,(1, 1, 0), \qquad \lambda \in \mathbf{R}$$

Exemplo 2. Dê a posição relativa entre a reta r e o plano $\boldsymbol{\pi}$ dados por

$$\pi: \ x - y + z + 4 = 0$$

$$r: \ X = (2, 1, -3) + \lambda (1, 1, 0), \quad \lambda \in \mathbf{R}$$

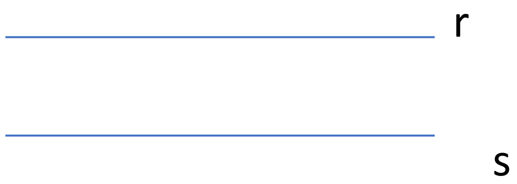
Exemplo 3. Verifique que a reta r e o plano $\boldsymbol{\pi}$ dados abaixo são transversais. Calcule o ponto P de intersecção.

$$\pi: \quad x - y + z + 4 = 0$$

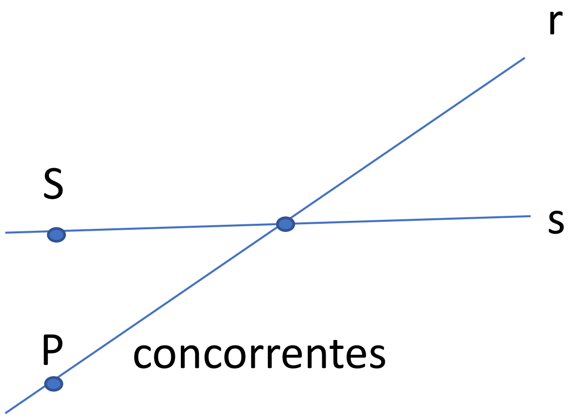
$$r: \quad X = (2, 1, 0) + \lambda(-1, 1, 0), \quad \lambda \in \mathbf{R}$$

Posição relativa entre duas retas

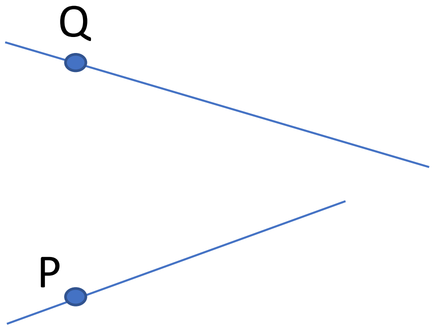
coincidentes



paralelas



concorrentes



reversas

$$r: \quad X = P + \lambda \vec{u}, \quad \lambda \in \mathbf{R}$$

$$s: \quad X = Q + \lambda \vec{v}, \quad \lambda \in \mathbf{R}$$

coincidentes

$r \equiv s$

$\vec{u}$ e $\vec{v}$ LD
P $\in s$

ou

$\vec{u}$ e $\vec{v}$ LD
Q $\in r$

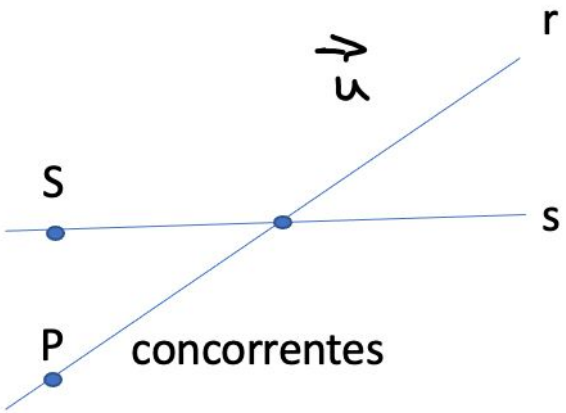
paralelas

$r \,//\, s$

$\vec{u}$ e $\vec{v}$ LD
P $\notin s$

ou

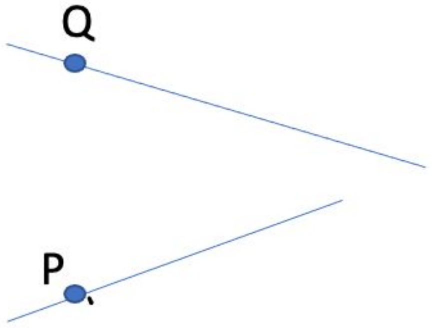
$\vec{u}$ e $\vec{v}$ LD
Q $\notin r$



concorrentes

$\vec{u}$ e $\vec{v}$ LI

$\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}\ LD$



reversas

$\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}\ LI$

Exemplo 1. (a) Estude a posição relativa entre as retas r e s:

$$r: \quad X = (1,\ 2,\ 0) + \lambda(2, 1, -1,), \quad \lambda \in \mathbf{R}$$

$$s: \quad X = (3, -1, 5) + \lambda(2, 1, -1,), \quad \lambda \in \mathbf{R}$$

(b) Altere a 2ª e a 3ª coordenadas do ponto dado da reta *s* para que ela seja coincidente com a reta *r*. Então o ponto é **(3, ? ,?)**

Exemplo 2.

Estude a posição relativa das retas r *e* s *que são dadas da seguinte forma:*

$$r : (x, y, z) = (1, -1, 1) + \alpha\ (-2, 1, 1)\ , \quad \textit{para cada} \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

$$s : \begin{cases} x + y = 3 \\ x + y - z = 6 \end{cases} .$$

Observemos que a reta s está sendo dada como uma interseção de dois planos.

Então primeiramente passemos para sua equação na forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = 3 - \beta \\ y = \beta \\ z = x + \beta - 6 \end{cases} \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

$$r : (x, y, z) = (1, -1, 1) + \alpha\ (-2, 1, 1)\ , \quad \textit{para cada} \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

$$s : (x, y, z) = (3, 0, -3) + \beta\ (-1, 1, 0)\ , \quad \text{para cada} \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

$$R = (1, -1, 1) \quad \text{e} \quad S = (3, 0, -3)$$

pertencem às retas r e s, respectivamente e os vetores

$$\vec{r} = (-2, 1, 1) \quad \text{e} \quad \vec{s} = (-1, 1, 0)$$

são vetores diretores das retas r e s, respectivamente.

Notemos que os vetores

$$\vec{r}, \quad \vec{s}$$

são L.I em $\underline{V}^3$.

Logo, ou as retas r e s são concorrentes ou são reversas.

Para sabermos em que situação estamos, estudemos se os vetores

$$\overrightarrow{RS}, \quad \vec{r} \quad \vec{s}$$

são L.D. ou L.I. em $\underline{V}^3$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 0 + 4 - 8 + 0 + 1 = -1 \neq 0.$$

RS, $\vec{r}$, $\vec{s}$

$\overrightarrow{RS}$, $\vec{r}$, $\vec{s}$ são L.I. em $\underline{V}^3$, e assim, as retas r e s são retas reversas.