# Aula de Revisão I

1. Verdadeiro o falso?

   (a) ABC um triângulo, então $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{AC}$ são LI.

   (b) $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ uma base ortonormal. Então a coordenada de qualquer vetor $\vec{v}$ na direção $\vec{i}$ é igual a $\vec{v} \cdot \vec{i}$.

2. Seja $E = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ uma base e sejam $\vec{u} = \vec{e_1} + \vec{e_2}$, $\vec{v} = \vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}$ e $\vec{w} = a\vec{e_1} + b\vec{e_2} + c\vec{e_3}$. Deduza uma condição necessária e suficiente sobre a, b e c para que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ seja uma base.

3. Sejam $E = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ e $F = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ duas bases com
   $\vec{f_1} = \vec{e_1} - 3\vec{e_2} + \vec{e_3}$, $\vec{f_2} = \vec{e_2} - \vec{e_3}$, $\vec{f_3} = \vec{e_1} - \vec{e_2}$.
   Escreva a matriz de mudança da base F para base E.

4. Prove que, $\forall \vec{u}, \vec{v}$ em $V^3$

   (a) $4\,\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$

   (b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ se, e somente se, $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$

   (c) As diagonais de um paralelogramo têm comprimentos iguais se, e somente se, o paralelogramo é um retangulo.

5. Seja $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ uma base ortonormal positiva (a) Resolva o sistema
   $$\begin{cases} \vec{x} \wedge (\vec{i} + \vec{j}) = -\vec{i} + \vec{j} \\ \vec{x} \cdot (\vec{i} + \vec{j}) = 2 \end{cases}$$

   (b) Descreva o conjunto solução da equação $\vec{x} \wedge (\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) = \vec{i} - \vec{k}$

6. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores ortogonais e $\vec{w} = \vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v})$. Prove que
   $\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{w}) = \|\vec{u}\|^4 \vec{v}$.

7. Prove que $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge (\vec{u} - \vec{v}) = 2\,\vec{v} \wedge \vec{u}$.

8. Prove que $\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w}$.

9. Seja $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ uma base ortonormal. Decomponha o vetor $\vec{v} = (1, 2, -1)_B$ como soma de dois vetores $\vec{p}$ e $\vec{q}$, de modo que $\vec{p}$ seja paralelo e $\vec{q}$ seja ortogonal a $\vec{u} = (2, -1, 0)_B$

10. Resolva a equação $(\vec{x} \wedge \vec{a}) \wedge (\vec{x} \wedge \vec{b}) = \vec{c}$, sabendo que $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \neq 0$.

## Soluções

1. (a) Falso : $\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CA}=\vec{AA}=\vec{0}$, portanto $\vec{AB}+\vec{BC}-\vec{AC}=\vec{0}$, ou seja eles são LD

(b) Verdadeiro: $\vec{v}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, portanto $\vec{v}\cdot\vec{i} = x\underbrace{\vec{i}\cdot\vec{i}}_{1}+y\cancel{\vec{j}\cdot\vec{i}}^{0}+z\cancel{\vec{k}\cdot\vec{i}}^{0}=x$.

2. Os vetores $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ formam uma base se, e somente se, são LI. Equivalentemente,

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & c \end{vmatrix} \end{array} \neq 0.$$

Calculando o determinante, $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é base $\Leftrightarrow a-b\neq 0$.

3. Precisamos achar as coordenadas dos vetores $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ na base F. Temos

$$\begin{cases} \vec{e_1}-3\vec{e_2}+\vec{e_3}=\vec{f_1} & (1)\\ \vec{e_2}-\vec{e_3}=\vec{f_2} & (2)\\ \vec{e_1}-\vec{e_2}=\vec{f_3} & (3)\end{cases}$$

Resolvendo
$$\begin{cases} (1)+(2) : \vec{e_1}-2\vec{e_2}=\vec{f_1}+\vec{f_2}\\ (3) : \vec{e_1}-\vec{e_2}=\vec{f_3}\end{cases}$$

obtemos $\vec{e_1}=-\vec{f_1}-\vec{f_2}+2\vec{f_3}$ e $\vec{e_2}=-\vec{f_1}-\vec{f_2}+\vec{f_3}$

Substituindo em (2) obtemos $\vec{e_3}=-\vec{f_1}-2\vec{f_2}+\vec{f_3}$.

Daí
$$M_{FE}=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

4. (a) Temos $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}+2\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}$,

e $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}$.

logo $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=4\vec{u}\cdot\vec{v}$.

(b) Usando (a) $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow \|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=0 \Leftrightarrow (\|\vec{u}+\vec{v}\|+\|\vec{u}-\vec{v}\|)(\|\vec{u}+\vec{v}\|-\|\vec{u}-\vec{v}\|)=0$

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são igua a $\vec{0}$ então $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ e $\|\vec{u}+\vec{v}\|-\|\vec{u}-\vec{v}\|=0$, também $\|\vec{u}+\vec{v}\|-\|\vec{u}-\vec{v}\|=0$

Se não $\|\vec{u}+\vec{v}\|+\|\vec{u}-\vec{v}\|\neq 0$, portanto $(\|\vec{u}+\vec{v}\|+\|\vec{u}-\vec{v}\|)\cdot(\|\vec{u}+\vec{v}\|-\|\vec{u}-\vec{v}\|)=0$

Se, e somente se $\|\vec{u}+\vec{v}\|-\|\vec{u}-\vec{v}\|=0$. Logo $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow \|\vec{u}+\vec{v}\|-\|\vec{u}-\vec{v}\|=0$.

(c) Seja ABCD um paralelogramo. Denote por $\vec{u}=\vec{AB}$ e $\vec{v}=\vec{AD}$. As diagonais têm comprimento $\|\vec{AC}\|=\|\vec{AB}+\vec{BC}\|=\|\vec{u}+\vec{v}\|$ e $\|\vec{DB}\|=\|\vec{DA}+\vec{AB}\|=\|\vec{u}-\vec{v}\|$

Aplicando (b), os comprimentos são iguais se e somente se, $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$, o seja $\vec{AB}$ e $\vec{AD}$ são ortogonais, o que é equivalente a ABCD ser um retangulo.

5. (a) Escrevendo $\vec{x}=(a,b,c)_B$, temos $\vec{x}\wedge(\vec{i}+\vec{j})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a & b & c\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=-c\vec{i}+c\vec{j}+(a-b)\vec{k}$

Logo $\vec{x}\wedge(\vec{i}+\vec{j})=-\vec{i}+\vec{j} \Leftrightarrow c=1,\ a=b$

Agora $\vec{x}\cdot(\vec{i}+\vec{j})=(a\vec{i}+a\vec{j}-\vec{k})\cdot(\vec{i}+\vec{j})=2a$, portanto $\vec{x}\cdot(\vec{i}+\vec{j})=2 \Rightarrow a=1$,

e $\vec{x}=(1,1,1)_B$.

(b) $\vec{x}\wedge(\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a & b & c\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}=(b+2c)\vec{i}+(c-a)\vec{j}-(2a+b)\vec{k}$

Logo $\begin{cases} b+2c=1 \\ c-a=0 \\ 2a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=c$ e $2a+b=1 \Leftrightarrow \vec{x}=(a,-2a+1,a)_B$

$$= a(1,-2,1)_B + (0,1,0)_B$$

$$= a(\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}) + \vec{j}$$

Portanto o conjunto solução é $\{a(\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k})+\vec{j}, a\in\mathbb{R}\}$.

6. Temos $\vec{w}=\vec{u}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v}) = -\left(-\underbrace{(\vec{u}\cdot\vec{v})}_{0}\vec{u} + (\vec{u}\cdot\vec{u})\vec{v}\right) = -\|\vec{u}\|^2\vec{v}$.

Portanto $\vec{u}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{w}) = \vec{u}\wedge(\vec{u}\wedge(-\|\vec{u}\|^2)\vec{v}) = -\|\vec{u}\|^2(\vec{u}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{w})) = -\|\vec{u}\|^2\vec{w} = \|\vec{u}\|^4\vec{v}$.

7. Usando as propriedades do produto vetorial, temos

$$(\vec{u}+\vec{v})\wedge(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\wedge(\vec{u}-\vec{v}) + \vec{v}\wedge(\vec{u}-\vec{v})$$

$$= \underbrace{\cancel{\vec{u}\wedge\vec{u}}}_{\vec{0}} - \vec{u}\wedge\vec{v} + \vec{v}\wedge\vec{u} - \underbrace{\cancel{\vec{v}\wedge\vec{v}}}_{\vec{0}}$$

$$= \vec{v}\wedge\vec{u} + \vec{v}\wedge\vec{u} = 2\vec{v}\wedge\vec{u}.$$

8. Usando as propriedades do produto misto $\vec{u}\wedge\vec{v}\cdot\vec{w} = [\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = [\vec{v},\vec{w},\vec{u}]$

$$= \vec{v}\wedge\vec{w}\cdot\vec{u} = \vec{u}\cdot\vec{v}\wedge\vec{w}.$$

9. Temos $\vec{p} = \text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}$

Como $\vec{u}\cdot\vec{v} = 1.2-2.1-1.0 = 0$, $\vec{p}=0$ e $\vec{q}=\vec{v}$ ($\vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$).

10. Temos $(\vec{x}\wedge\vec{a})\wedge(\vec{x}\wedge\vec{b}) = -(\vec{a}\cdot\vec{x}\wedge\vec{b})\vec{x} + (\vec{x}\cdot\vec{x}\wedge\vec{b})\vec{a}$

$$= -[\vec{x},\vec{b},\vec{a}]\vec{x} + \underbrace{\cancel{[\vec{x},\vec{b},\vec{x}]}}_{0}\vec{a}$$

$$= [\vec{a},\vec{b},\vec{x}]\vec{x}$$

Agora $(\vec{x}\wedge\vec{a})\wedge(\vec{x}\wedge\vec{b}) = \vec{c} \Leftrightarrow [\vec{a},\vec{b},\vec{x}]\vec{x} = \vec{c}$. Logo $\vec{x}=\lambda\vec{c}$ e

$[\vec{a},\vec{b},\lambda\vec{c}]\lambda\vec{c} = \vec{c}$, ou seja $\lambda^2[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=1$.

Se $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\leq 0$, não há solução

Se $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]>0$, temos duas soluções $\vec{x} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]}}\vec{c}$.