Conteúdo

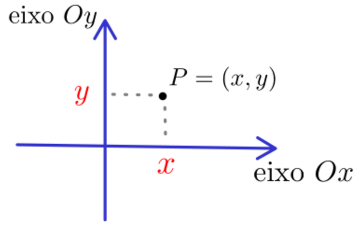
Um sistema de coordenadas permite localizar a posição de um ponto no plano ou no espaço.

Objetivo

Definir as coordenadas polares de um ponto no plano, as coordenadas cilíndricas e as coordenadas esféricas de um ponto do espaço.

Fixado um sistema de coordenadas ortogonal e dado um ponto, determinar as relações entre as coordenadas polares, cilíndricas e esféricas e as coordenadas do s.c.o..

- $\Sigma = (O, B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}))$ sistema de coordenadas ortogonal
  - Σ é chamado **sistema de coordenadas cartesiano**
  - $P = (x, y)_\Sigma \in E^2 \iff \overrightarrow{OP} = (x, y)_B$
  - x e y são as **coordenadas cartesianas** de P



Podemos localizar a posição de um ponto no plano através de outras coordenadas.

C.1 Coordenadas polares (no plano)

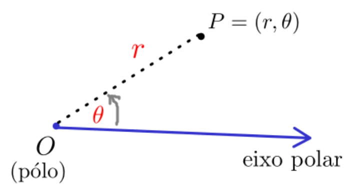
veja aqui: Math Insight

Fixe um ponto $\mathcal{O}$ e uma semi-reta orientada r no plano.

- $\mathcal{O}$ é chamado de **pólo**
- r é chamada de **eixo polar**

As **coordenadas polares** de $P \in E^2$ são $(\mathbf{r}, \theta)$ onde:

- $r := d(\mathcal{O}, P) = ||\overrightarrow{\mathcal{O}P}||$
- θ é o ângulo entre o eixo polar e a semi-reta $\mathcal{O}P$, medido no sentido anti-horário;



- θ é chamado de **argumento** e r de **raio**

Nota:

1. Em geral considera-se a restrição $\theta \in [0, 2\pi)$ para que cada ponto do plano, exceto a origem, tenha uma única representação em coordenadas polares pois um mesmo ponto pode ser representado pelas coordenadas:

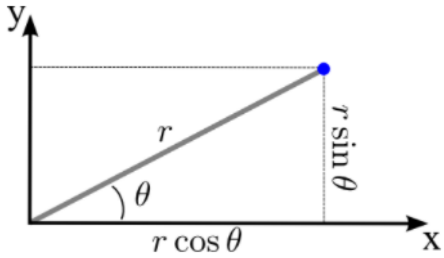
$$(r, \theta) \qquad \text{e} \qquad (r, \theta + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2. $\mathcal{O} = (0, 0) = (0, \theta)$, para qualquer $\theta \in \mathbb{R}$.

C.1.1 Relação entre coordenadas cartesianas e polares

Escolhendo:

- $\mathcal{O} = O$
- eixo polar $= Ox$;
- $P = (x, y)_\Sigma = (r, \theta) \in E^2$



$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$$

Cálculo de r e θ:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\theta = 2k\pi + \begin{cases} arctg(y/x) & para\ x > 0,\ y > 0 \\ arctg(y/x) + 2\pi & para\ x > 0,\ y < 0 \\ arctg(y/x) + \pi & para\ x < 0 \\ \pi/2 & para\ x = 0,\ y > 0 \\ 3\pi/2 & para\ x = 0,\ y < 0 \\ q.q. & para\ x = 0,\ y = 0 \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z})\,.$$

Note que $r \geq 0$ e consideraremos $\theta \in [0, 2\pi)$.

Exemplo C.1.1. Ver Exercícios 94 e 95 em Slide de Exercícios.

C.2 Coordenadas cilíndricas (no espaço)

veja aqui: Math Insight

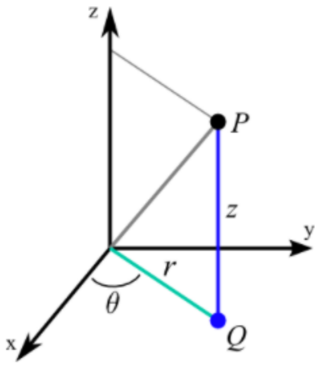
- $\Sigma = (O, B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\kappa}))$ sistema de coordenadas ortogonal
  - Σ é chamado **sistema de coordenadas cartesiano** de E^3
  - $P = (x, y, z)_\Sigma \in E^3 \iff \overrightarrow{OP} = (x, y, z)_B$
  - x, y e z são as **coordenadas cartesianas** de P

  As **coordenadas cilíndricas** de $P \in E^3$ são (r, θ, τ) onde

  - (r, θ) são as coordenadas polares da projeção ortogonal de P no plano polar;
  - $\tau \in \mathbb{R}$

C.2.1 Relação entre as coordenadas cartesianas e as cilíndricas

- $P = (x, y, z)_\Sigma = (r, \theta, \tau) \in E^3$



$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \\ z = \tau \end{cases}$$

$$r \geq 0,\ \theta \in [0, 2\pi),\ \tau \in \mathbb{R}.$$

Cálculo de r, θ e τ:

$$\tau = z, \qquad r \text{ e } \theta \text{ como antes.}$$

Exemplo C.2.1. Ver Exercício 96 em Slide de Exercícios.

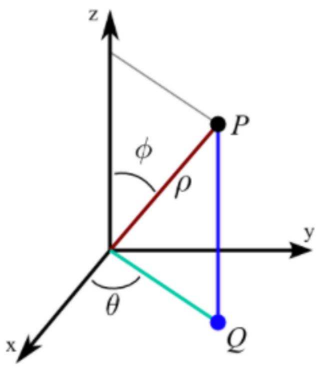
C.3 Coordenadas esféricas (polares no espaço)

veja: Math Insight

- As **coordenadas esféricas** de $P \in E^3$ são (ρ, θ, φ) onde
  - θ é o argumento da projeção ortogonal de P no plano polar;
  - $\rho = d(O, P)$;
  - φ é o ângulo entre o eixo z e a reta OP.

C.3.1 Relação entre as coordenadas cartesianas e as esféricas

- $P = (x, y, z)_\Sigma = (\rho, \theta, \varphi) \in E^3$



$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ y = \rho\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = \rho\cos(\varphi) \end{cases}$$

$$\rho \geq 0, \ \theta \in [0, 2\pi), \ \varphi \in [0, \pi].$$

Cálculo de ρ, θ e φ:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \theta \text{ como antes,}$$

$$\varphi = arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right).$$

Exemplo C.3.1. Ver Exercício 97 em Slide de Exercícios.