Conteúdo

Objetivo

Estudar o lugar geométrico chamado cônica:

- curvas planas descritas por uma equação de segundo grau em duas variáveis. (fixado um sistema de coordenadas)

C.1 Elipse, Hipérbole e Parábola

Fixado um sistema de coordenadas ortogonal $\Sigma = (O, B)$ em um plano π, vimos que as equações reduzidas de elipses, hipérboles e parábolas são dadas por formas particulares de equação de grau 2 em duas variáveis:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1, \quad p \neq q, p, q > 0$$

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 1, \quad pq < 0$$

$$y = \frac{1}{q}x^2, \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{q}y^2, \quad q \neq 0$$

Trataremos agora do caso geral de uma equação de grau 2 em duas variáveis:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

C.2 Cônicas: classificação

Definição C.2.1. Uma **cônica** é o lugar geométrico dos pontos $X = (x, y)$ no plano π que satisfazem uma equação de segundo grau

$$g(x, y) = 0$$

onde

$$g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f, \qquad a^2 + b^2 + c^2 \neq 0.$$

- ax^2, bxy, cy^2: termos quadráticos
- bxy: termo quadrático misto
- dx, ey: termos lineares
- f: termo independente

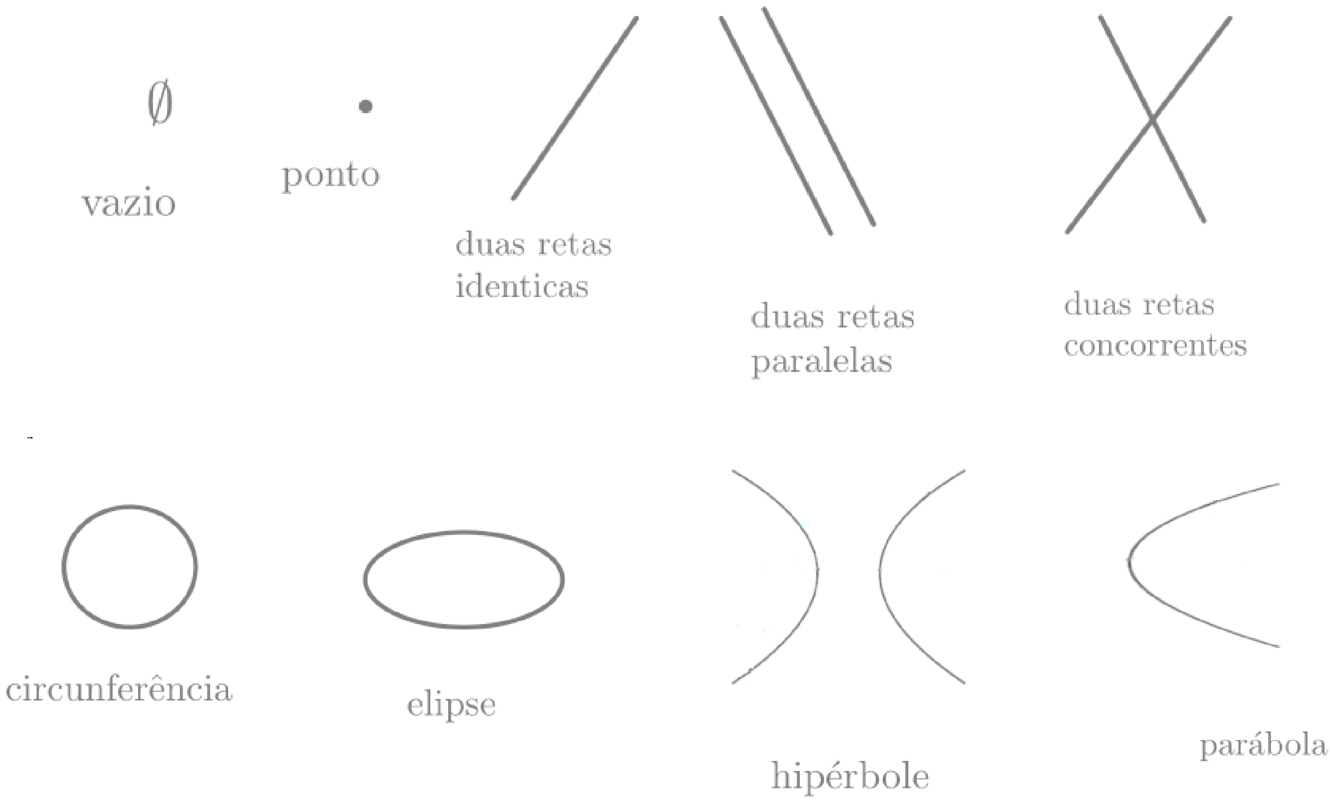
Exemplo C.2.2. Fixe um s.c.o. $\Sigma = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.[1]

1. $x^2 + y^2 = -1$: conjunto vazio
2. $x^2 + y^2 = 0$: um ponto $P = (0, 0)$
3. $x + 1 = 0$: uma reta
4. $x^2 + 2xy + y^2 = 0 \iff (x + y)^2 = 0$: duas retas paralelas idênticas
5. $x^2 + 2xy + y^2 + x + y = 0 \iff (x + y)(x + y + 1) = 0$: duas retas paralelas distintas
6. $x^2 - y^2 = 0 \iff (x - y)(x + y) = 0$: duas retas concorrentes
7. $x^2 + y^2 = 1$: circunferência
8. $x^2 + 2y^2 = 1$: elipse
9. $x^2 - y^2 = 1$: hipérbole
10. $x^2 - y = 0$: parábola

[1] Lembrar da equação geral da reta no plano (Ehp.1.1)

Proposição C.2.3. *Um subconjunto C do plano π é uma cônica se, e somente se C é:*

1. *o conjunto vazio, ou*
2. *um ponto, ou*
3. *uma reta, ou*
4. *duas retas idênticas, ou*
5. *duas retas paralelas, ou*
6. *duas retas concorrentes, ou*
7. *uma circunferência, ou*
8. *uma elipse, ou*
9. *uma hipérbole, ou*
10. *uma parábola.*



C.3 Identificação: uso de translação e rotação

Dada uma equação de 2^o grau, identificar e esboçar a cônica.

- fazendo uma mudança do sistema de coordenadas:
  - a geometria da cônica é mantida;
  - a equação da cônica se reduz a uma mais simples.
- possíveis mudanças:
  - translações;
  - rotações.

C: cônica $g(x, y) = 0$, onde

$$g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f, \qquad a^2 + b^2 + c^2 \neq 0.$$

- $b = d = e = 0$: sabemos identificar a cônica

Objetivo: eliminar os termos lineares e o termo quadrático misto:

- caso 1: eliminar os termos lineares
  - ∗ buscar alguma translação que transforme g em um polinômio $\tilde{g}$ sem os termos lineares
- caso 2: eliminar o termo quadrático misto
  - ∗ buscar alguma rotação que transforme g em um polinômio $\tilde{\tilde{g}}$ sem o termo quadrático misto
- quando necessário aplicar uma translação em g para obter um polinômio $\tilde{g}$ sem os termos lineares e uma rotação em $\tilde{g}$ para obter um polinômio $\tilde{\tilde{g}}$ sem o termo quadrático misto (e sem os lineares).

C.3.1 Eliminação dos termos lineares por translação

$$g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f, \qquad a^2 + b^2 + c^2 \neq 0.$$

- $\Sigma_1 = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ sistema de coordenadas ortogonal
- $O' = (h, k)_{\Sigma_1}$ ponto no plano π
- $\Sigma_2 = (O', \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ translação de Σ_1 para o ponto O' [2]
- $P = (x, y)_{\Sigma_1} = (u, v)_{\Sigma_2}$:

$$\begin{cases} x = h + u \\ y = k + v \end{cases}$$

Qual o efeito da translação no polinômio g ?

$$g(h + u, k + v) = au^2 + buv + cv^2 + (2ah + bk + d)u + (bh + 2ck + e)v + g(h, k)$$

- Para eliminar os termos lineares:

$$(\star) \quad \begin{cases} 2ah + bk + d = 0 \\ bh + 2ck + e = 0 \end{cases}$$

- Se o sistema tem solução, encontramos $\tilde{g}$ dada por:

$$\tilde{g}(u, v) := g(h + u, k + v),$$

$$\boxed{\tilde{g}(u, v) = au^2 + buv + cv^2 + g(h, k)}$$

[2] Veja Seção M.1.2

PARA QUAL TRANSLAÇÃO (ESCOLHA DE h E k) O SISTEMA

$$(\star)\ \begin{cases} 2ah + bk + d = 0 \\ bh + 2ck + e = 0 \end{cases}$$

TEM SOLUÇÃO?

$$D := \begin{vmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{vmatrix} = 4ac - b^2$$

$$\begin{cases} D \neq 0, & (\star) \text{ tem uma única solução } (h,k) \text{ (SPD)} \\ D = 0, & (\star) \text{ tem infinitas soluções } (h,k) \text{ (SPI)} \\ D = 0, & (\star) \text{ não tem solução (incompatível) (SI)}^{3} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} D \neq 0, & \text{podemos eliminar os termos lineares} \\ D = 0 & \text{e SPI, podemos eliminar os termos lineares} \\ D = 0 & \text{e SI, não podemos eliminar os termos lineares} \end{cases}$$

Nota. Se o sistema $(\star)$ possui infinitas soluções, o valor de $g(h,k)$ não depende da escolha da solução (h,k) (Verifique! veja Boulos, Ex. 23.10, p. 372 (sugestão p. 525))

---

[3] SPD: sistema possível determinado, SPI: sistema possível indeterminado, SI: sistema impossível

Roteiro: determinar se é possível e então eliminar os termos lineares por meio de uma translação de Σ_1 para $O' = (h, k)$

Dada a cônica

$$g(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \text{ onde } a^2 + b^2 + c^2 \neq 0,$$

- **Passo 1:** Calcular o determinante $D = \begin{vmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{vmatrix} = 4ac - b^2.$
- **Passo 2:**
  - Se $D \neq 0$, então existe uma única translação para o ponto $O' = (h, k)$ de modo que $\tilde{g}$ não contém os termos lineares.
  - Se $D = 0$, então pode ou não existir alguma translação para o ponto $O' = (h, k)$ de modo que $\tilde{g}$ não contém os termos lineares.
  - Os escalares h e k, quando existem, são soluções do sistema

$$(\star) \quad \begin{cases} 2ah + bk + d = 0 \\ bh + 2ck + e = 0. \end{cases}$$

- **Passo 4:** A equação $\tilde{g}(u, v) = 0$ no novo sistema de coordenadas satisfaz:
  - os coeficientes dos termos quadráticos são iguais em $\tilde{g}$ e g;
  - os termos lineares são nulos;
  - o termo independente em $\tilde{g}$ é

$$g(h, k),$$

    onde h e k são soluções de $(\star)$

  isto é,

$$\tilde{g}(u, v) = au^2 + buv + cv^2 + g(h, k).$$

Observe:

- $g(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$
-
$$(\star)\quad \begin{cases} 2ah + bk + d = 0 \\ bh + 2ck + e = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} ah + \frac{b}{2}k + \frac{d}{2} = 0 \\ \frac{b}{2}h + ck + \frac{e}{2} = 0 \end{cases}$$
- $g(h,k) = \frac{d}{2}h + \frac{e}{2}k + f$
- $\tilde{g}(u,v) = au^2 + buv + cv^2 + \frac{d}{2}h + \frac{e}{2}k + f$
- $D = \begin{vmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{vmatrix} = 4ac - b^2 = 0 \iff \begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{vmatrix} = ac - \frac{b^2}{4} = 0$
-
$$M = \left(\begin{array}{cc|c} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \hline \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{array}\right) \tag{C.3.1}$$
- $(\star)$ é obtido pelas 2 primeira linhas da matriz acima
- o termo constante de $\tilde{g}$ é obtido pela última linha da matriz acima
- D é o determinante da submatriz principal

Definição C.3.1. A matriz simétrica M acima é chamada de **matriz de** g.

Exercício. Verifique que $g(x,y) = X^t M X$, onde $X = (x\ y\ 1)_{1\times 3}$. (tarefa!)

Exemplo C.3.2. Ver Exercício 84 em Slide de Exercícios.

C.3.2 Classificação das cônicas através do centro

Como decidir qual é a cônica que tem equação

$$\tilde{g}(u,v) = au^2 + buv + cv^2 + g(h,k) = 0?$$

Definição C.3.3. Um ponto O é o **centro** de uma cônica C não-vazia quando:

$$P \in C \iff P' \in C,$$

onde P' é o simétrico de P em relação a O.

Observando as possíveis cônicas (Proposição C.2.3) podemos inferir que a cônica dada por:

1. um ponto: tem um único centro,
2. uma reta: tem infinitos centros,
3. duas retas idênticas: tem infinitos centros,
4. duas retas paralelas: tem infinitos centros,
5. duas retas concorrentes: tem um único centro,
6. uma circunferência: tem um único centro,
7. uma elipse: tem um único centro,
8. uma hipérbole: tem um único centro,
9. uma parábola: tem 0 centro.
10. o conjunto vazio: tem 0, 1 ou infinitos centros

Como decidir, quando existe, qual ponto é centro de uma cônica?

Exemplo C.3.4. Em $\tilde{g}(u,v) = au^2 + buv + cv^2 + g(h,k) = 0$,

- $\tilde{g}(-u,-v) = \tilde{g}(u,v)$
- $(-u,-v)$ é o simétrico de (u,v) em relação a $O' = (h,k)_{\Sigma_1} = (0,0)_{\Sigma_2}$
- $O' = (h,k)$ é o centro da cônica de equação $\tilde{g}(u,v) = 0$, onde (h,k) satisfaz o sistema

$$(\star)\quad \begin{cases} 2ah + bk + d = 0 \\ bh + 2ck + e = 0 \end{cases}$$

Para uma cônica não vazia C, se h e k satisfazem o sistema $(\star)$:

- $C : g(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$
- (h,k) ponto no plano, com s.c.o Σ_1, tal que h e k satisfazem o sistema $(\star)$
- translada o sistema Σ_1 para $O' = (h,k)$
- obtemos $\tilde{g}$ como no Exemplo C.3.4
- $\boxed{O' = (h,k) \text{ é o centro da cônica } C}$

Para uma cônica não vazia C, se $O' = (h,k)$ é o centro de C: (tarefa!)

- $C : g(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$
- $O' = (h,k)$ é o centro da cônica C
- transladar o sistema Σ_1 para $O' = (h,k)_{\Sigma_1} = (0,0)_{\Sigma_2}$
-

$$C : \tilde{g}(u,v) = g(h+u, k+v) = au^2 + buv + cv^2 + \underbrace{(2ah + bk + d)}_{d'} u + \underbrace{(bh + 2ck + e)}_{e'} v + g(h,k)$$

- $(-u,-v)$ é o simétrico de (u,v) em relação a O' e $(u,v) \in C \Leftrightarrow (-u,-v) \in C$:

$$\tilde{g}(-u,-v) = \tilde{g}(u,v) = 0$$

- $$\begin{cases} au^2 + buv + cv^2 + d'u + e'v + g(h,k) = 0 \\ au^2 + buv + cv^2 - d'u - e'v + g(h,k) = 0 \end{cases} \implies d'u + e'v = 0,$$

  onde $\begin{cases} d' := 2ah + bk + d \\ e' := bh + 2ck + e \end{cases}$

  - $d' = e' = 0 \implies h$ e k satisfazem $(\star)$
  - d' ou e' não nulo:
    - $\Gamma : d'u + e'v = 0$ é uma reta que contém $(0,0)$
    - $C \subset \Gamma$:[a] ou $C = \{(0,0)\}$ ou $C = \Gamma$ que contém $(0,0)$
    - em ambos casos:

      $$(0,0) \in C \implies \tilde{g}(0,0) = 0 \implies g(h,k) = 0$$

    - em ambos casos: $\forall m \in \mathbb{R}$, $m \neq -\frac{d'}{e'}$ ou $m \neq -\frac{e'}{d'}$:

      $$\Gamma_1 : v = mu \text{ é tal que } \Gamma_1 \cap C = \{(0,0)\}$$

    - $\tilde{g}(x, mx) = 0$ tem solução única

      $$\begin{aligned} &\iff x[(a + bm + cm^2)x - (d' - e'm)] = 0 \\ &\iff x = 0 = \frac{d' - e'm}{a + bm + cm^2}(a^2 + b^2 + c^2 \neq 0) \\ &\implies d' = e'm, \quad \text{para infinitos valores de } m \\ &\implies d' = e' = 0 \end{aligned}$$

- $\boxed{h \text{ e } k \text{ satisfazem o sistema } (\star)}$

[a] Ver Proposição C.2.3

Proposição C.3.5. *$O = (h, k)$ é centro de uma cônica não vazia de equação*

$$g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

se, e somente se, (h, k) é solução do sistema

$$(\star) \quad \begin{cases} 2ah + bk + d = 0 \\ bh + 2ck + e = 0. \end{cases}$$

Pela discussão das páginas C.9 e C.6 temos um critério preliminar para identificar uma cônica:

Corolário C.3.6.

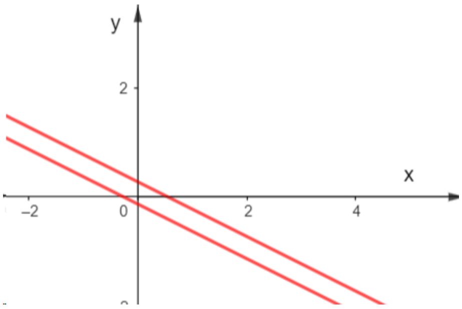
Cônicas com único centro	$4ac - b^2 \neq 0$ $(\star)$ *é um SPD*	*ponto, circunferência, elipse,* *hipérbole, duas retas concorrentes*
Cônicas com infinitos centros	$4ac - b^2 = 0$ $(\star)$ *é um SPI*	*duas retas paralelas ou idênticas,* *uma reta*
Cônicas que não possuem centro	$4ac - b^2 = 0$ $(\star)$ *é um SI*	*parábola* 

Nota. O conjunto vazio pode ser considerado uma cônica com um, infinitos ou nenhum centro.

Para uma dada cônica, sabemos:

- sua equação: $g(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$;
- determinar se: $(\star)\ \begin{cases} 2ah + bk + d = 0 \\ bh + 2ck + e = 0 \end{cases}$ é SPD ou SPI ou SI:
  - se SPD: é possível eliminar termos lineares e a cônica tem um centro: como decidir qual é a cônica (ponto, circunf., elipse, hip., retas concorrentes)?
  - se SPI: é possível eliminar termos lineares e a cônica tem infinitos centros: como decidir qual é a cônica (retas paralelas ou idênticas)?

    $*$ no Ex. 84b (esboço feito no Geogebra Classic):

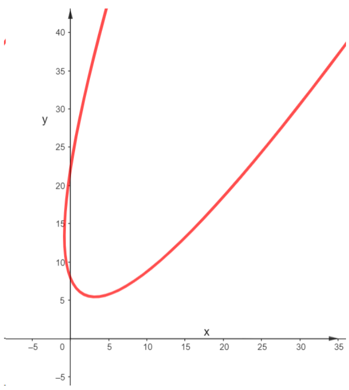


$\tilde{g}(u,v) = 7u^2 + 28uv + 28v^2 - \frac{8}{7}$

Wolfram, MathPapa, OnlineCalculator.Guru não fatoram a expressão da cônica (nem de g nem de $\tilde{g}$)!

  - se SI: é impossível eliminar termos lineares e a cônica não tem centro (parábola):

    $*$ no Ex. 84a, a cônica é uma parábola: como fazer seu esboço[4]?



$g(x,y) = 4x^2 - 4xy + y^2 - 4x - 30y + 175$

- nos casos SPD e SPI, escrever: $\tilde{g}(u,v) = au^2 + buv + cv^2 + g(h,k) = 0$

[4] Feito no Geogebra Classic

C.3.3 Eliminação do termo quadrático misto por rotação

$$g(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f, \qquad a^2 + b^2 + c^2 \neq 0,\ \ b \neq 0.$$

- $\Sigma_1 = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ sistema de coordenadas ortogonal
- $\Sigma_2 = (O, \vec{f}_1, \vec{f}_2)$ rotação de Σ_1 de θ radianos em sentido anti-horário[5]
- $P = (x,y)_{\Sigma_1} = (u,v)_{\Sigma_2}$:

$$\begin{cases} x = u\cos\theta - v\sin\theta \\ y = u\sin\theta + v\cos\theta \end{cases}$$

Nota. A matriz do sistema acima, **matriz da rotação**[6], e sua respectiva matriz inversa são:

$$M_r = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad M_r^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Qual o efeito da rotação no polinômio g ?

$$g(u\cos\theta - v\sin\theta, u\sin\theta + v\cos\theta) =?$$

[5] Veja Seção M.1.3

[6] É uma matriz ortogonal.

$$g(u\cos\theta - v\sin\theta, u\sin\theta + v\cos\theta) = a'u^2 + b'uv + c'v^2 + d'u + e'v + f',$$

onde

$$\begin{aligned}
a' &= a\cos^2\theta + b\sin\theta\cos\theta + c\sin^2\theta \\
\boxed{\text{b'}} &= (c-a)\sin 2\theta + b\cos 2\theta \\
c' &= a\sin^2\theta - b\sin\theta\cos\theta + c\cos^2\theta \\
\boxed{\text{d'}} &= d\cos\theta + e\sin\theta \\
\boxed{\text{e'}} &= e\cos\theta - d\sin\theta \\
\boxed{\text{f'}} &= f.
\end{aligned}$$

Nota.

1. Rotações não alteram o termo independente.

2. Se $d = e = 0$, então $d' = e' = 0$, ou seja, rotações não criam novos termos lineares.

3. $\begin{pmatrix} d' \\ e' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{\text{inversa da matriz de rotação}} \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$

- Para eliminar o termo quadrático misto:

$$b' = (c-a)\sin 2\theta + b\cos 2\theta = 0$$

- Neste caso, encontramos $\tilde{\tilde{g}}$ dada por:

$$\tilde{\tilde{g}}(u,v) := g(u\cos\theta - v\sin\theta, u\sin\theta + v\cos\theta),$$

$$\boxed{\tilde{\tilde{g}}(u,v) = a'u^2 + c'v^2 + d'u + e'v + f}$$

Para qual rotação (escolha de θ) temos

$$b' = (c-a)\sin 2\theta + b\cos 2\theta = 0\ ?$$

. . . .

Basta escolher $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ tal que[7]

$$\cot(2\theta) = \frac{a-c}{b}.$$

Nota. Valem as relações:

$$a' - c' = a + c$$

$$a' - c' = \frac{b}{\sin(2\theta)}$$

$$a' - c' = b\sqrt{1 + \frac{(a-c)^2}{b^2}}$$

---

[7]Podemos considerar $b \neq 0$, pois caso contrário a equação da cônica já não possui o termo misto e não é preciso fazer rotação.

Roteiro: é sempre possível eliminar o termo quadrático misto por meio de uma rotação no sentido anti-horário de Σ_1 de ângulo $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$

Dada a cônica

$$g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f, \text{ com } b \neq 0,$$

sempre é possível encontrar uma rotação (**Passo 1**) de modo que a equação

$$\tilde{\tilde{g}}(u, v) = a'u^2 + c'v^2 + d'u + e'v + f = 0$$

no novo sistema de coordenadas satisfaz:

- o coeficiente do termo quadrático misto é nulo;
- o termo independente fica inalterado;
- os coeficientes dos termos quadráticos são soluções de $(*)$ (**Passo 2**);
- os coeficientes dos termos lineares são soluções de $(**)$ (**Passo 3**).

- **Passo 1:** Tome $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ tal que

$$\cot(2\theta) = \frac{a - c}{b}.$$

- **Passo 2:** a' e c' são soluções do sistema:

$$(*) \quad \begin{cases} a' + c' = a + c \\ \\ a' - c' = \dfrac{b}{\sin(2\theta)} = b\sqrt{1 + \frac{(a-c)^2}{b^2}} \end{cases}$$

- **Passo 3:** d' e e' são soluções do sistema:

$$(**) \quad \begin{pmatrix} d' \\ e' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$$

Nota. Como rotações não criam novos termos lineares, podemos alcançar o Objetivo da pág. C.4 se aplicarmos primeiro uma translação para eliminar (quando possível) os termos lineares e depois uma rotação para eliminar o termo quadrático misto!

Fórmulas úteis:

Sabendo o valor de $\cot(2\theta)$, sabemos o valor de $\sin(2\theta)$:

$$\sin(2\theta) = \frac{1}{\sqrt{\cot(2\theta)}},$$

e portanto de $\cos(2\theta)$:

$$\cos(2\theta) = \cot(2\theta)\sin(2\theta).$$

Consequentemente, mesmo sem saber o exato valor do ângulo θ que nos fornece a rotação desejada, podemos determinar os valores de $\cos\theta$ e $\sin\theta$ através do sistema:

$$\begin{cases} \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \\ \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos(2\theta) \end{cases}$$

Assim, os coeficientes de $\tilde{\tilde{g}}$ ficam bem determinados através dos sistemas (*) e (**) nos Passos 2 e 3 do Roteiro na página C.17 e a cônica pode ser identificada.

Exemplo C.3.7. Ver Exercício 85 em Slide de Exercícios.
