Conteúdo

Objetivo

Tratar sobre a mudança de sistema de coordenadas:

- estudar como passar as coordenadas de um ponto em um sistema de coordenadas para um outro sistema de coordenadas;

- estabelecer relações entre as coordenadas de um ponto dado num sistema com as coordenadas relação ao outro sistema.

Estudar os casos particulares de translação e rotação:
serão utilizados no estudo de cônicas.

M.1 Mudança de Sistema de Coordenadas

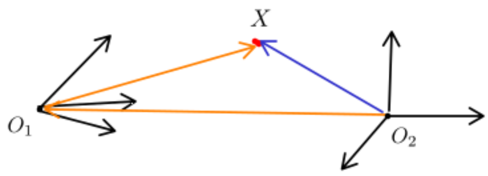
Um sistema de coordenadas em E^3 depende de uma origem O e de uma base E. Portanto uma mudança no sistema pode envolver:

- mudar a origem O e a base E
- mudar a origem O e manter a mesma base E (translações)
- manter a origem O e mudar a base E (rotações)

M.1.1 Origem e Base distintas

- $\Sigma_1 = (O_1, E)$ um sistema de coordenadas em E^3
- $\Sigma_2 = (O_2, F)$ um novo sistema de coordenadas em E^3
- $O_2 = (h, k, l)_{\Sigma_1} \overset{Def.R.1.1}{\Longleftrightarrow} \overrightarrow{O_1O_2} = (h, k, l)_E$
- $X = (x, y, z)_{\Sigma_1} \Longleftrightarrow \overrightarrow{O_1X} = (x, y, z)_E$
- $X = (u, v, w)_{\Sigma_2} \Longleftrightarrow \boxed{\overrightarrow{O_2X} = (u, v, w)_F}$

Qual a relação entre x, y, z com u, v, w?



- $\overrightarrow{O_2X} = \overrightarrow{O_2O_1} + \overrightarrow{O_1X} \Longrightarrow$

$$\boxed{\overrightarrow{O_2X} = (x - h, y - k, z - l)_E}$$

- M_{EF} a matriz de mudança da base E para a base F (ver Eq. (B.1.2)):

$$M_{EF} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix},$$

onde as colunas contém as coordenadas dos elementos de F na base E;

- Pela fórmula de mudança de base, Eq. (B.1.3),

$$(\overrightarrow{O_2X})_E = M_{EF}(\overrightarrow{O_2X})_F \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x - h \\ y - k \\ z - l \end{pmatrix}_E = M_{EF} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}_F.$$

Portanto, a relação entre as antigas $(x, y, z)_{\Sigma_1}$ e novas coordenadas $(u, v, w)_{\Sigma_2}$ de X é dada por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix}_E + M_{EF} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}_F$$

onde $\Sigma_1 = (O_1, E)$, $\Sigma_2 = (O_2, F)$ e $O_2 = (h, k, l)_{\Sigma_1}$.

As **equações de mudança de coordenadas de Σ_1 para Σ_2** são:

$$\begin{cases} x = h + \alpha_{11}u + \alpha_{12}v + \alpha_{13}w \\ y = k + \alpha_{21}u + \alpha_{22}v + \alpha_{23}w \\ z = l + \alpha_{31}u + \alpha_{32}v + \alpha_{33}w, \end{cases}$$

onde $X = (x, y, z)_{\Sigma_1} = (u, v, w)_{\Sigma_2}$, $O_2 = (h, k, l)_{\Sigma_1}$.

Nota. Temos que

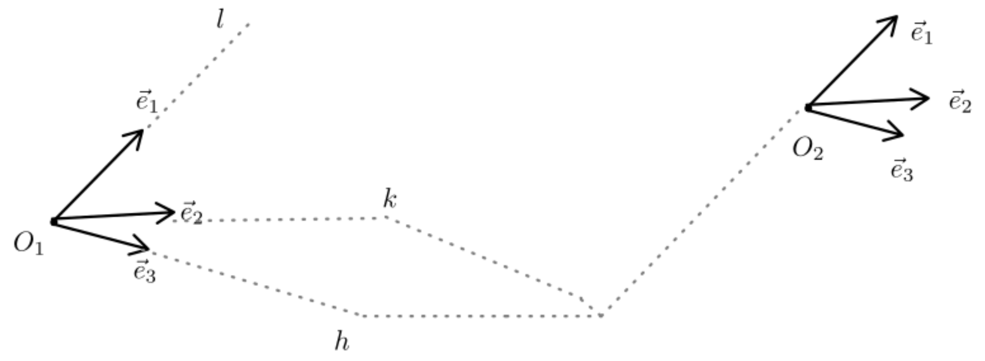
$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}_F = M_{EF}^{-1} \begin{pmatrix} x-h \\ y-k \\ z-l \end{pmatrix}_E \overset{Corol. B.1.11}{=} M_{FE} \begin{pmatrix} x-h \\ y-k \\ z-l \end{pmatrix}_E, \qquad \text{(M.1.1)}$$

o que nos fornece as equações de mudança de coordenadas de Σ_2 para Σ_1.

Exemplo M.1.1. Ver Exercício 76 em Slide de Exercícios.

M.1.2 Origens distintas: Translação

Se as origens O_1, O_2 são distintas e a base dos sistemas de coordenadas $\Sigma_1 = (O_1, E)$ e $\Sigma_2 = (O_2, E)$ são iguais, dizemos que Σ_2 é obtido pela **translação de Σ_1 para o ponto O_2**



Neste caso,

$$M_{EE} = Id$$

e portanto, as

equações de mudança de coordenadas de $\Sigma_1 = (O_1, E)$ para $\Sigma_2 = (O_2, E)$ (por **translação**) são:

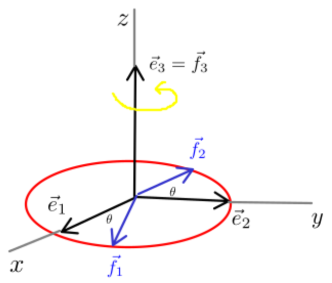
$$\begin{cases} x = h + u \\ y = k + v \\ z = l + w, \end{cases} \tag{M.1.2}$$

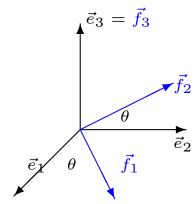
onde $X = (x, y, z)_{\Sigma_1} = (u, v, w)_{\Sigma_2}$, $O_2 = (h, k, l)_{\Sigma_1}$.

M.1.3 Bases disitintas: Rotação

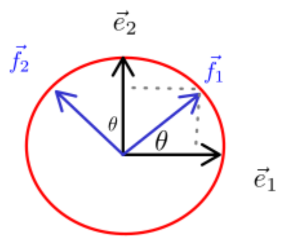
Se a origem dos sistemas de coordenadas $\Sigma_1 = (O, E)$ e $\Sigma_2 = (O, F)$ são iguais, dizemos que Σ_2 é obtido pela **rotação de Σ_1**.

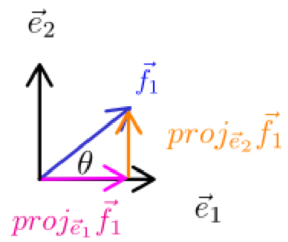
Caso Particular: a base F é obtida "girando" a base E em torno de Oz no sentido anti-horário por um ângulo θ





- $\Sigma_1 = (O, (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3))$ sistema **ortogonal**
- $\Sigma_2(O, (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3))$ sistema **ortogonal**
- $\vec{f}_3 = \vec{e}_3$
- $\vec{f}_1$ e $\vec{f}_2$ são obtidos "girando" $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$ em torno de Oz no sentido anti-horário por um ângulo θ:

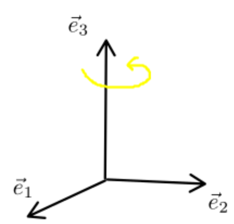




Logo,

$$\vec{f}_1 = \cos\theta\vec{e}_1 + \sin\theta\vec{e}_2; \qquad \vec{f}_2 = -\sin\theta\vec{e}_1 + \cos\theta\vec{e}_2$$

- $M_{EF} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



$\vec{e}_1, \vec{e}_2$ sentido anti-horário

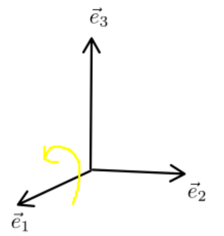
- as **equações da rotação de Σ_1 em torno de Oz, de θ radianos, em sentido anti-horário** são:

$$\begin{cases} x = u\cos\theta - v\sin\theta \\ y = u\sin\theta + v\cos\theta \\ z = w, \end{cases} \tag{M.1.3}$$

onde $X = (x, y, z)_{\Sigma_1}$ e $X = (u, v, w)_{\Sigma_2}$.

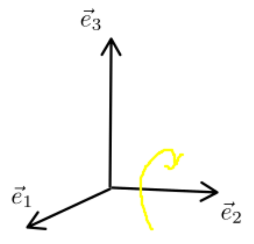
Nota. (Verifique!)

1. Mantendo $\vec{e}_1$ fixo: $M_{EF} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$



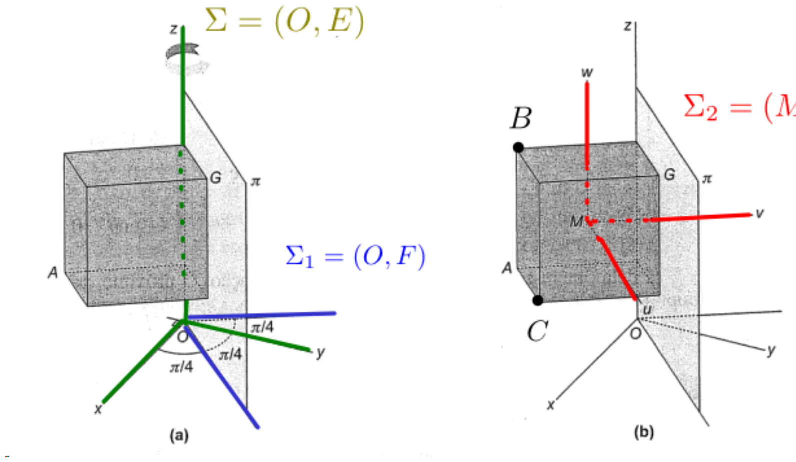
$\vec{e}_2, \vec{e}_3$ sentido anti-horário

2. Mantendo $\vec{e}_2$ fixo: $M_{EF} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$



$\vec{e}_1, \vec{e}_3$ sentido horário

Tarefa: Um sistema de coordenadas ortogonal $\Sigma = (O, E)$ está fixado. Sabendo-se que um cubo tem uma face contida no plano $\pi : x - y = 0$, outras duas faces paralelas a Oxy e que uma diagonal tem extremidades $A = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1)$ e $G = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3)$, aplique translação e rotação para determinar os outros seis vértices.



Fonte: Boulos, Geometria Analítica

- fazer rotação de Σ de $\pi/4$ radianos: $\Sigma_1 = (O, F)$
  - cada face do cubo é paralela aos planos coordenados de Σ_1
- $M = (\sqrt{2}, 0, 2)_{\Sigma_1}$ ponto médio de AG
- fazer translação de Σ_1 para M: $\Sigma_2 = (M, F)$
  - usando a relação (M.1.1) (e lembre-se que $M_{FE} = M_{EF}^t$), encontre as coordenadas de A em relação a Σ_2: $A = (a, b, c)_{\Sigma_2}$;
  - o cubo é simétrico em relação aos planos coordenados, aos eixos coordenados ou à origem de Σ_2:

$$G = (-a, -b, -c)_{\Sigma_2}, \quad B = (a, b, -c)_{\Sigma_2}, \quad C = (a, -b, -c)_{\Sigma_2}, \ldots$$

Resp.:

Nota. (Verifique!)

3. No plano:

as equações de mudança de coordenadas por translação de Σ_1 para o ponto O_2 são:

$$\begin{cases} x = h + u \\ y = k + v, \end{cases}$$

onde $X = (x, y)_{\Sigma_1} = (u, v)_{\Sigma_2}$, $O_2 = (h, k)_{\Sigma_1}$;

as equações de mudança de coordenadas por rotação de Σ_1 de θ radianos em sentido anti-horário são:

$$\begin{cases} x = u \cos\theta - v \sin\theta \\ y = u \sin\theta + v \cos\theta \end{cases}$$

onde $X = (x, y)_{\Sigma_1} = (u, v)_{\Sigma_2}$.

Até o momento estudamos:

• sistemas de coordenadas de pontos no espaço E^3

• lugares geométricos de pontos no espaço E^3: *retas, planos*

• as equações que determinam tais lugares geométricos satisfazem equações de primeiro grau:

equações da reta na forma planar, equação geral do plano.

Próximo passo:

• estudar lugares geométricos de pontos cujas coordenadas satisfazem uma equação de segundo grau:

- *cônicas*: no plano
- *quádricas*: no espaço.