Conteúdo

Objetivo

Estudar ortogonalidade e perpendicularismo de retas e planos do espaço Euclideano E^3.

Obter a medida angular entre retas ou entre planos ou entre reta e plano e a distância entre pontos, retas e planos.

Lembre-se:

Para usarmos as fórmulas para o cálculo de distância entre pontos ou de produto escalar entre vetores precisamos de uma **base ortonormal** e portanto de um **sistema de coordenadas ortogonal**: veja Teorema P.2.2.

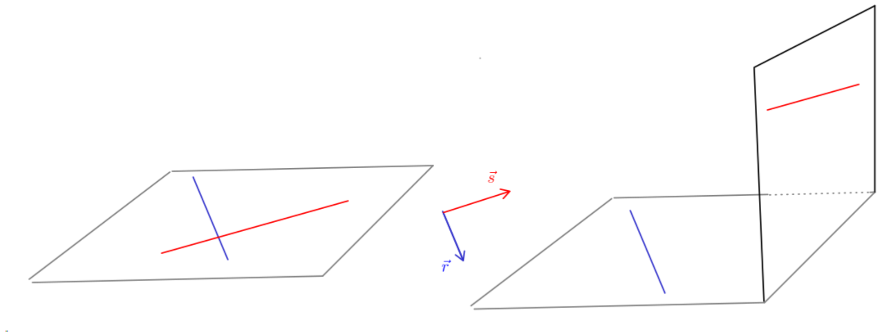
Para usarmos as fórmulas para o cálculo de produto vetorial entre vetores precisamos de uma **base ortonormal positiva**: veja Teorema OPv.2.2.

Sempre que usarmos tais fórmulas estaremos considerando um sistema ortogonal com base positiva.

Pad.1 Ortogonalidade e perpendicularismo

Vimos na Proposição R.4.1 que duas retas r e s no espaço podem ser paralelas, concorrentes ou reversas e que: se $\vec{r} \perp \vec{s}$, e

- se r e s são concorrentes, então r e s são **perpendiculares**.
- se r e s são reversas, então r e s são ortogonais ou **perpendiculares**.



QUANDO UMA RETA É PERPENDICULAR A UM PLANO?

QUANDO DOIS PLANOS SÃO PERPENDICULARES?

Pad.1.1 Vetor Normal

Seja π um plano em E^3. Um **vetor normal** a π é qualquer vetor não nulo $\vec{\eta}$ ortogonal a π.

Nota.

- Um vetor é normal ao plano se, e somente se, é ortogonal a qualquer vetor paralelo ao plano.
- Um vetor é normal ao plano se, e somente se, é ortogonal a quaisquer vetores diretores do plano.
- Um vetor é normal ao plano se, e somente se, é ortogonal a dois vetores diretores do plano.

Como encontrar um vetor normal a π?

- $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores diretores de π.
- $$\vec{\eta} \text{ não nulo é normal a } \pi \iff \vec{\eta} \text{ é ortogonal a } \vec{u} \text{ e a } \vec{v}$$
$$\underset{Def.OPv.2.1}{\overset{\vec{u},\vec{v}LI}{\iff}} \quad \vec{\eta} \text{ e } \vec{u}\wedge\vec{v} \text{ são paralelos.}$$
- $\vec{\eta} = \vec{u}\wedge\vec{v}$ é um vetor normal a π

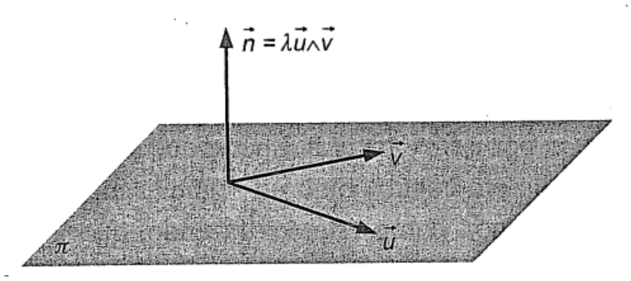


Figura 1: P. Boulos

Qual a relação entre vetor normal e equação geral de π?

- $\pi : ax + by + cz + d = 0$ com a, b, c não todos nulos
- $$\vec{u} = (m, n, p) \parallel \pi \quad \underset{\textbf{base orton.}}{\overset{Prop.R.4.3}{\iff}} \quad (a, b, c)\cdot(m, n, p) = 0$$
$$\underset{\textbf{base orton.}}{\overset{Prop.P.2.2}{\iff}} \quad \vec{\eta} = (a, , b, c) \perp \vec{u}$$
- $\vec{\eta} = (a, , b, c) \neq \vec{0}$ é vetor normal a π

A recíproca também vale:

Proposição Pad.1.1. *Considere em E^3 um sistema de coordenadas* **ortogonal**. *Então $\vec{\eta} = (a, b, c) \neq \vec{0}$ é um vetor normal a π se, e somente se, π possui equação geral da forma*

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Nota. A proposição acima **não é válida** se o sistema de coordenadas não é ortogonal.

Exemplo Pad.1.2. Sejam $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\kappa})$ uma base ortonormal e $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ outra base onde

$$\vec{e}_1 = \vec{\imath}, \quad \vec{e}_2 = \vec{\jmath}, \quad \vec{e}_3 = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{\kappa}.$$

Considere o sistema de coordenadas $\Sigma = (O, E)$. Obtenha um vetor normal ao plano π de equação $z = 0$ no sistema Σ.

Consequência:

1. Se $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ são vetores normais, respectivamente, aos planos π_1 e π_2 e $\vec{r}$ é um vetor diretor da reta r, então
   (a) r e π são perpendiculares se e somente se $\vec{r}$ e $\vec{n}$ são paralelos;
   (b) π_1 e π_2 são perpendiculares se e somente se $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ são ortogonais;
   (c) π_1 e π_2 são paralelos se e somente se $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ são paralelos.

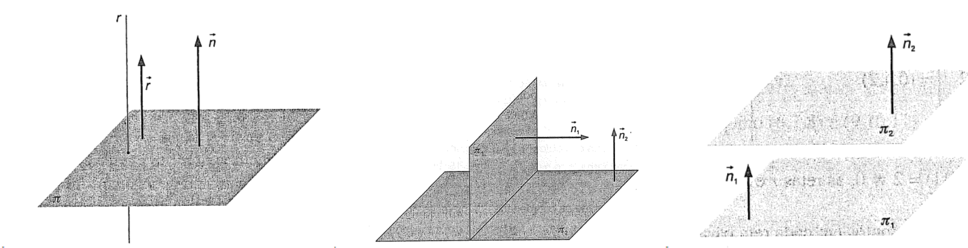


Figura 2: P. Boulos

Exemplo Pad.1.3. Ver Exercícios 63 e 64 em Slide de Exercícios.

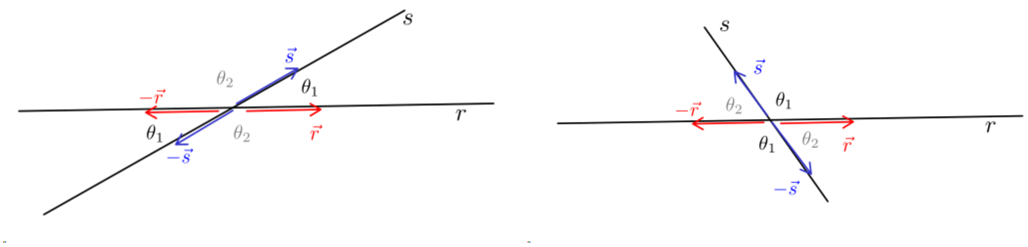
Pad.2 Medida Angular

Pad.2.1 Medida angular entre retas

Sejam r e s duas retas com vetores diretores $\vec{r}$ e $\vec{s}$[1].

A **medida angular** (ou o **ângulo**) **entre r e s** é a menor medida entre as medidas angulares dos vetores diretores de r e de s:

$$\min\{ang(\vec{r},\vec{s}) = ang(-\vec{r},-\vec{s}), ang(\vec{r},-\vec{s}) = ang(-\vec{r},\vec{s}),\}$$



Denotamos por $ang(r,s)$ a medida angular entre r e s e temos

$$0 \leq ang(r,s) \leq \frac{\pi}{2}.$$

- se $ang(r,s) = 0$ então r e s são paralelas

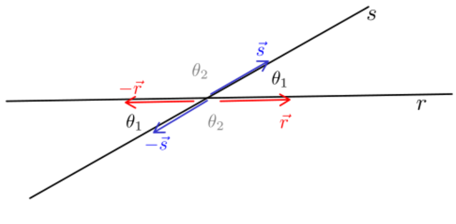
- se $ang(r,s) = \frac{\pi}{2}$ então r e s são ortogonais (podem ser concorrentes ou reversas)

Como calcular o ângulo entre duas retas?

---

[1] $-\vec{r}$ e $-\vec{s}$ também são vetores diretores

- $\theta_1 = ang(\vec{r}, \vec{s})$
- $\theta_2 = ang(-\vec{r}, \vec{s})$



- $\theta_2 = \pi - \theta_1 \implies \cos\theta_2 = -\cos\theta_1$
- $\cos(ang(r,s)) = \begin{cases} \cos\theta_1, \ \theta_1 \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ -\cos\theta_1, \ \theta_1 \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases} = |\cos\theta_1|$
- $\cos\theta_1 \overset{Prop.P.1.5}{=} \dfrac{\vec{r}\cdot\vec{s}}{\|\vec{r}\|\|\vec{s}\|}$

Portanto,

se r e s são duas retas em E^3, então

$$\cos(ang(r,s)) = \frac{|\vec{r}\cdot\vec{s}|}{\|\vec{r}\|\|\vec{s}\|}, \tag{Pad.2.1}$$

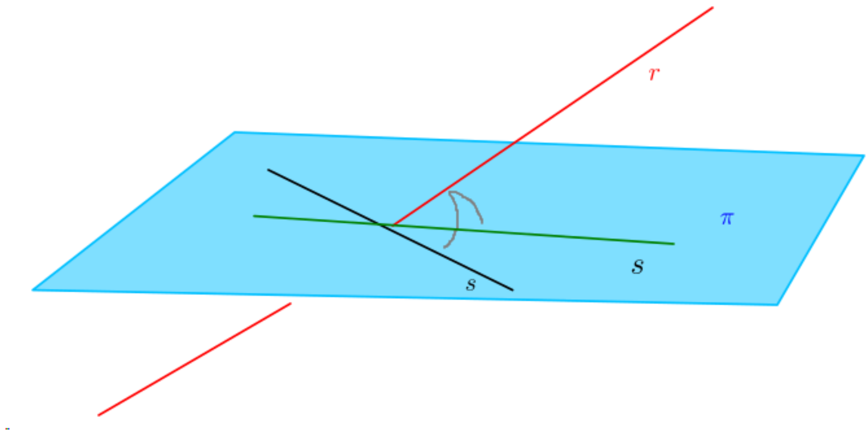
onde $\vec{r}$ e $\vec{s}$ são vetores diretores de r e s, respectivamente.

Exemplo Pad.2.1. Ver Exercício 65 em Slide de Exercícios.

Pad.2.2 Medida angular entre reta e plano

Sejam r uma reta transversal a um plano π em E^3.

A **medida angular** (ou o **ângulo**) **entre r e π** é a menor medida dentre todas as medidas angulares entre r e retas s contidas em π.

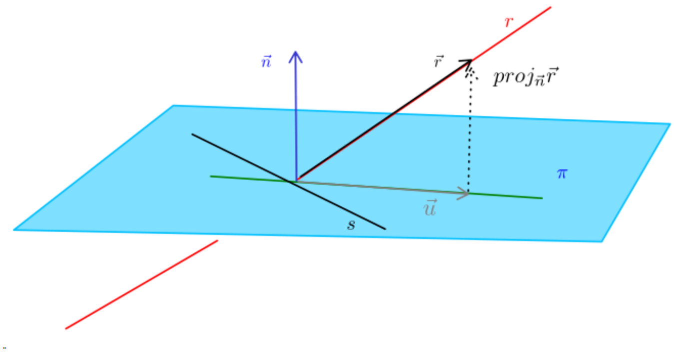


Como calcular o ângulo entre uma reta e um plano?

- $\vec{r}$ um vetor diretor da reta r
- s uma reta qualquer em π

Quando o ângulo entre r e s é mínimo?
Qual um vetor diretor adequado para s?

- $\vec{n}$ um vetor normal ao plano π.
- $\vec{u}$ a projeção ortogonal de $\vec{r}$ ao plano π:



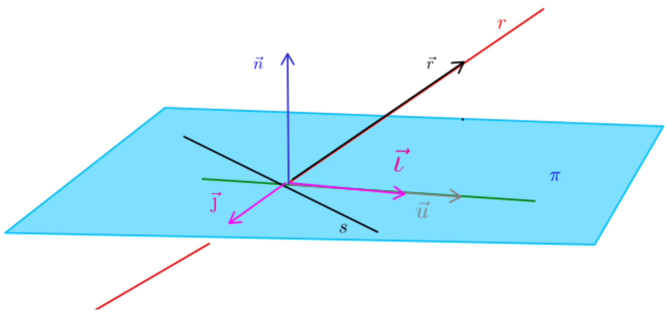
$$proj_{\vec{n}}\vec{r} = \frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{r} \qquad \text{(Proposição P.2.7)}$$

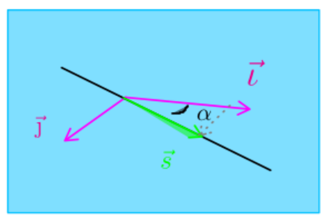
$$\vec{r} = proj_{\vec{n}}\vec{r} + \vec{u} \Longrightarrow \vec{u} = \vec{r} - proj_{\vec{n}}\vec{r} \Longrightarrow \boxed{\vec{u} = \vec{r} - \frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}}$$

$\vec{s} =??$

- $\vec{\imath} = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \quad \vec{\jmath} = \vec{\imath} \wedge \dfrac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$

  $\vec{\imath}$ e $\vec{\jmath}$ são vetores diretores de π, unitários e ortogonais





- $\vec{s} = \cos\alpha\vec{\imath} + \sin\alpha\vec{\jmath}$ é um vetor diretor unitário de s, $\alpha = ang(\vec{s}, \vec{\imath})$

$$\cos(ang(r,s)) = \frac{|\vec{r}\cdot\vec{s}|}{\|\vec{r}\|\|\vec{s}\|} =??$$

- $\vec{r}\cdot\vec{s} = (\cos\alpha)\vec{r}\cdot\vec{\imath} + (\sin\alpha)\vec{r}\cdot\vec{\jmath}$

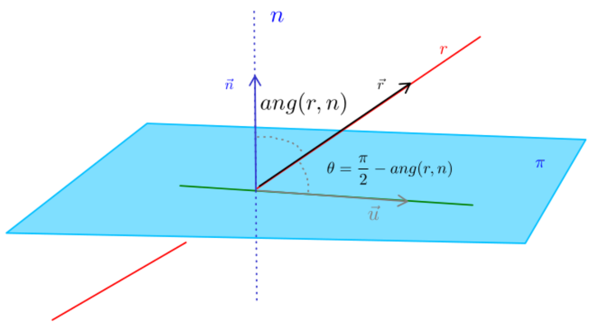
- $\vec{\jmath} \perp \vec{u}$ e $\vec{\jmath} \perp \vec{n}$ e $\boxed{\vec{u} = \vec{r} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}} \Longrightarrow \vec{r} \cdot \vec{\jmath} = 0$

- $\vec{r} \cdot \vec{s} = (\cos\alpha)\vec{r} \cdot \vec{\iota}$

-

$$\cos(ang(r,s)) = \frac{|\cos\alpha \vec{r} \cdot \vec{\iota}|}{\|\vec{r}\|} = \frac{|\cos\alpha||\vec{r} \cdot \vec{\iota}|}{\|\vec{r}\|} \overset{Des.Schwarz\,P.1.5}{=} \frac{|\cos\alpha|\|\vec{r}\|\|\vec{\iota}\|}{\|\vec{r}\|} = |\cos\alpha|$$

- $ang(r,s)$ é mínimo $\overset{\text{arccos } dec.}{\Longleftrightarrow} \boxed{\alpha = 0} \Longleftrightarrow s$ é a projeção ortogonal de r em π



Proposição Pad.2.2. *A medida angular entre uma reta r transversal a um plano π é dada por*

$$\mathbf{ang}(\mathbf{r}, \pi) = \frac{\pi}{2} - ang(r,n),$$

onde n é uma reta ortogonal a π.

- $\sin(ang(r,\pi)) = \sin(\frac{\pi}{2} - ang(r,n)) = \cos(ang(r,n))$

Por (Pad.2.1),

se r é uma reta transversal ao plano π, então

$$\sin(ang(r,\pi)) = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{n}\,|}{\|\vec{r}\,\|\|\vec{n}\,\|}, \tag{Pad.2.2}$$

onde $\vec{n}$ é um vetor normal a π.

Pad.2.3 Medida angular entre planos

Sejam π_1 e π_2 dois planos transversais em E^3.

A **medida angular** (ou o **ângulo**) **entre π_1 e π_2** é a medida angular entre duas retas quaisquer r_1 e r_2 perpendiculares a π_1 e π_2, respectivamente.

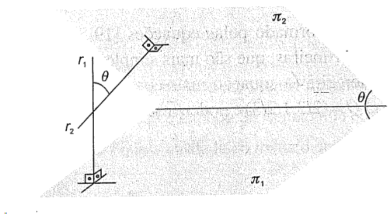


Figura 3: P. Boulos

Como calcular o ângulo entre dois planos?

- $\vec{\eta}_1$ um vetor normal ao plano π_1
- $\vec{\eta}_2$ um vetor normal ao plano π_2
- $\vec{\eta}_1$, $\vec{\eta}_2$ são vetores diretores de r_1 e r_2
- $\cos(ang(\pi_1, \pi_2)) = \cos(ang(r_1, r_2))$

Por (Pad.2.1),

se π_1 e π_2 são planos transversais, então

$$\cos(ang(\pi_1, \pi_2)) = \frac{|\vec{\eta}_1 \cdot \vec{\eta}_2|}{\|\vec{\eta}_1\|\|\vec{\eta}_2\|}, \tag{Pad.2.3}$$

onde $\vec{\eta}_1$ e $\vec{\eta}_2$ são vetores normais aos planos π_1 e π_2, respectivamente.

Exemplo Pad.2.3. Ver Exercícios 66 e 67 em Slide de Exercícios.

Pad.3 Distância

Pad.3.1 Entre dois pontos

A **distância entre dois pontos** $A = (x_1, y_1, z_1)_\Sigma$ e $B = (x_2, y_2, z_2)_\Sigma$ de E^3 é o número real

$$\mathbf{d(A, B)} = \|\overrightarrow{AB}\|.$$

Se Σ é um sistema de coordenadas ortogonal, $d(A, B)$ pode ser calculada por (ver Proposição R.1.3):

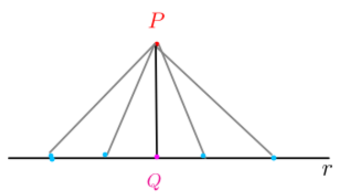
$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad \text{(Pad.3.1)}$$

Exemplo Pad.3.1. Ver Exercício 68 em Slide de Exercícios.

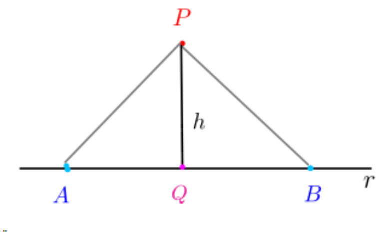
Pad.3.2 Entre um ponto e uma reta

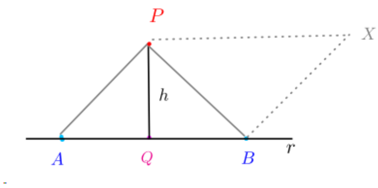
Sejam P um ponto e r uma reta em E^3 tais que P não pertença a r.

Definição Pad.3.2. A **distância entre o ponto P e a reta r**, denotada por $d(P, r)$, é a menor das distâncias entre P e os pontos de r, a qual é dada pela distância de P ao ponto Q da projeção ortogonal de P a r.



Como calcular $d(P, Q)$?





- A e B pontos distintos de r
- Q a projeção ortogonal de P a r $\big($$Q = r \cap s$, s única reta perpendicular a r passando por $P$$\big)$
- $h = d(P, Q) =?$
- área do triângulo ABP é:
$$\frac{1}{2}h\|\overrightarrow{AB}\|$$
- área do paralelogramo $ABPX$ é $\|\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{AB}\|$

$$area(ABP) = \frac{1}{2}area(ABXP)$$

Como $r := \overrightarrow{AB}$ é um vetor diretor de r, temos

se P é um ponto não pertencente a uma reta r em E^3, então

$$d(P, r) = \frac{\|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{r}\|}{\|\vec{r}\|}, \qquad \text{(Pad.3.2)}$$

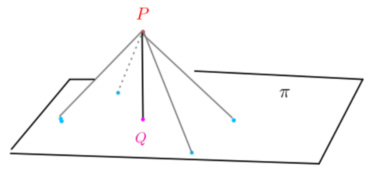
onde $\vec{r}$ é um vetor diretor de r e A um ponto de r quaisquer.

Exemplo Pad.3.3. Ver Exercício 69 em Slide de Exercícios.

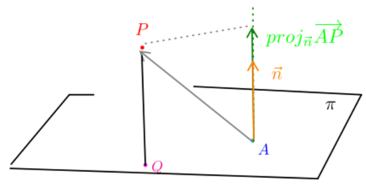
Pad.3.3 Entre um ponto e um plano

Sejam P um ponto e π um plano em E^3 tais que P não pertença a π.

Definição Pad.3.4. A **distância entre o ponto P e o plano π**, denotada por $d(P, \pi)$, é a menor das distâncias entre P e os pontos de π e é dada pela distância $d(P, Q)$ de P ao ponto Q da projeção ortogonal de P a π.



COMO CALCULAR $d(P, Q)$?



- A ponto qualquer de π
- Q a projeção ortogonal de P a π
- $d(P, \pi) = d(P, Q) = \|proj_{\vec{n}}\overrightarrow{AP}\|$

Pela Proposição P.2.7,

se P é um ponto não pertencente a um plano π em E^3, então

$$d(P, \pi) = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}\,|}{\|\vec{n}\,\|}, \tag{Pad.3.3}$$

onde $\vec{n}$ é um vetor normal a π e A um ponto de π quaisquer.

Em particular:

Se $\pi\colon ax+by+cz+d=0$, $P=(x_0,y_0,z_0)$ e $A=(x_1,y_1,z_1)$, então

$$\boxed{d(P,\pi)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

Exemplo Pad.3.5. Ver Exercício 70 em Slide de Exercícios.

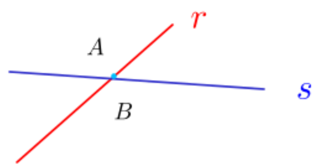
Pad.3.4 Entre retas

Sejam r e s duas retas em E^3.

Definição Pad.3.6. A **distância entre a reta r e a reta s**, denotada por $d(r,s)$, é a menor das distâncias entre os pontos A de r e os pontos B de s.

- Se r e s são concorrentes ou paralelas idênticas, então

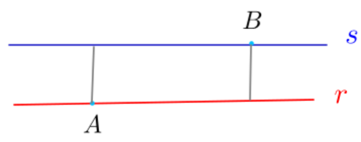
$$d(r,s)=0.$$



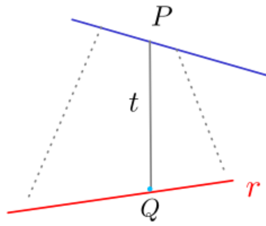
- Se r e s são paralelas distintas, então

$$d(r,s)=d(A,s)=d(B,r)\overset{Eq.Pad.3.2}{=}\frac{\|\overrightarrow{AB}\wedge\vec{r}\,\|}{\|\vec{r}\,\|}=\frac{\|\overrightarrow{AB}\wedge\vec{s}\,\|}{\|\vec{s}\,\|},$$

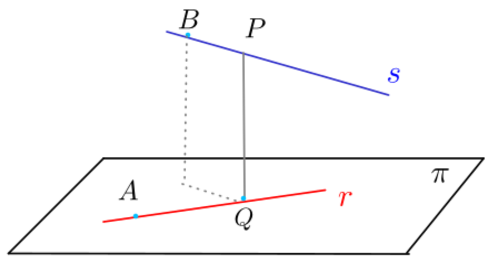
onde $A\in r$ e $B\in s$.



• Se r e s são reversas, $d(r, s) = d(P, Q)$ onde P e Q são pontos de intersecção de r e s , respectivamente, com uma reta t perpendicular a r e s.

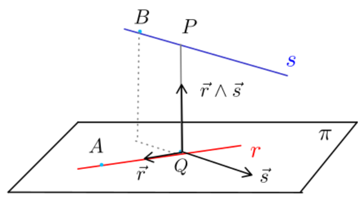


SE r E s SÃO REVERSAS, COMO CALCULAR $d(r, s) = d(P, Q)$?



- π plano que contém r e é paralelo a s
- B um ponto qualquer de s
- $d(P, Q) = d(B, \pi)$

  PRECISAMOS DE UM PONTO EM π E UM VETOR NORMAL A π
- A um ponto qualquer de r ($\therefore A \in \pi$)
- $\vec{r}$ vetor diretor de r
- $\vec{s}$ vetor diretor de s
- $\vec{r} \wedge \vec{s}$ é vetor normal a π



Pela Equação Pad.3.3,

se r e s são retas reversas, então

$$d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{r} \wedge \vec{s}\,|}{\|\vec{r} \wedge \vec{s}\,\|}, \qquad \text{(Pad.3.4)}$$

onde $\vec{r}, \vec{s}$ são vetores diretores e A, B pontos (resp.) de r e s quaisquer.

Exemplo Pad.3.7. Ver Exercício 71 em Slide de Exercícios.

Pad.3.5 Entre reta e plano

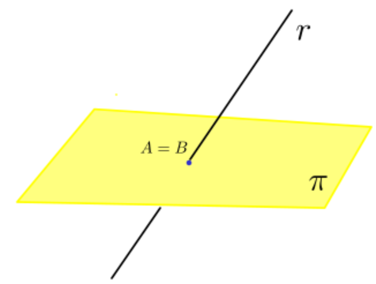
Sejam r uma reta e π um plano em E^3.

Definição Pad.3.8. A **distância entre a reta r e o plano π**, denotada por $d(r, \pi)$, é a menor das distâncias entre os pontos A de r e os pontos B de π.

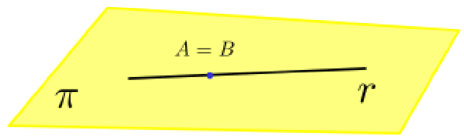
COMO CALCULAR $d(r, \pi)$?

- $\vec{r}$ vetor diretor de r e $\vec{n}$ vetor normal a π:
- Se r é transversal a π ($\vec{r} \cdot \vec{n} \neq 0$), então

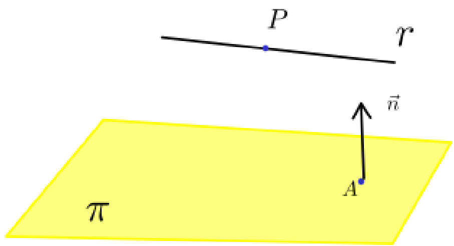
  $$d(r, \pi) = 0.$$



- Se r está contida em π ($\vec{r} \cdot \vec{n} = 0$), então
$$d(r, \pi) = 0.$$



- Se r é paralela a π e $r \not\subseteq \pi$ ($\vec{r} \cdot \vec{n} = 0$), então $d(r, \pi) = d(P, \pi)$.



Pela Equação Pad.3.3,

se r é paralela a π e $r \not\subseteq \pi$, então
$$d(r, \pi) = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}\,|}{\|\vec{n}\,\|}, \tag{Pad.3.5}$$
onde A é um ponto de π, $\vec{n}$ é vetor normal a π e P é um ponto de r .

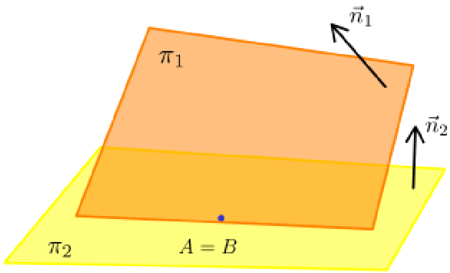
Pad.3.6 Entre planos

Sejam π_1 e π_2 planos em E^3.

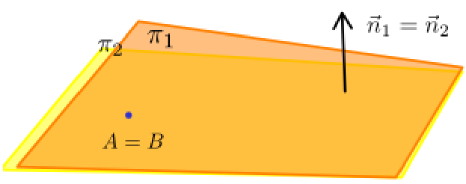
Definição Pad.3.9. A **distância entre os planos π_1 e π_2**, denotada por $d(\pi_1, \pi_2)$, é a menor das distâncias entre os pontos A de π_1 e os pontos B de π_2.

COMO CALCULAR $d(\pi_1, \pi_2)$?

- $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ vetores normais a π_1 e π_2:
- Se π_1 e π_2 são transversais ($\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ LI), então
$$d(\pi_1, \pi_2) = 0.$$



- Se π_1 e π_2 são idênticos ($\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ LD), então
$$d(\pi_1, \pi_2) = 0.$$



- Se π_1 e π_2 são paralelos distintos ($\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ LD), então

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P, \pi_2) = d(Q, \pi_1),$$

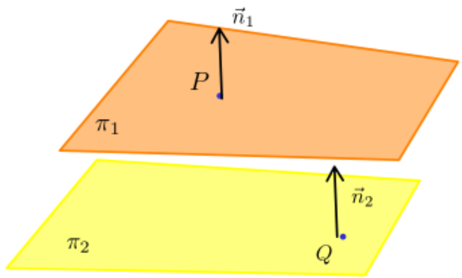
para quaisquer $P \in \pi_1$ ou $Q \in \pi_2$.

Pela Equação Pad.3.3,

se π_1 e π_2 são paralelos distintos, então

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}\,|}{\|\vec{n}\,\|}, \tag{Pad.3.6}$$

onde $\vec{n}$ é um vetor normal a π_1 (ou π_2), P é um ponto de π_1 e Q um ponto de π_2 quaisquer.



Em particular (Tarefa!):

Se $P = (x_0, y_0, z_0)$ é um ponto de π_1 e

$$\pi_1\colon ax + by + cz + d_1 = 0, \qquad \pi_2\colon ax + by + cz + d_2 = 0,$$

então

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Exemplo Pad.3.10. Ver Exercícios 72 a 75 em Slide de Exercícios.
