Conteúdo

OPv.1 Orientação em V^3 **OPv.2**

OPv.2 Produto Vetorial **OPv.4**

OPv.2.1 Área de paralelogramo OPv.6

OPv.2.2 Propriedades de produto vetorial OPv.7

OPv.3 Produto Misto **OPv.9**

OPv.3.1 Volume de paralelepípedo e tetraedro OPv.9

Objetivo

Definir o produto vetorial entre dois vetores e o produto misto de três vetores.

Estudar suas propriedades e aplicações ao cálculo de áreas e volumes.

Estudar a relação de produto vetorial com ortogonalidade.

Para isso necessitamos do conceito de "orientação" em V^3.

OPv.1 Orientação em V^3

Definição OPv.1.1. Sejam E e F duas bases de V^3. Dizemos que a base E é **equivalente a** (ou concordante com) F, e escrevemos $E \sim F$, se

$$\det(M_{EF}) > 0.$$

Seja $\mathcal{B}$ o conjunto de todas as bases de V^3.

A relação $\sim$ é uma relação de equivalência em $\mathcal{B}$, ou seja, satisfaz as três seguintes propriedades:

1. $\sim$ é reflexiva: $E \sim E$ para todo $E \in \mathcal{B}$:
$$M_{EE} = Id.$$
2. $\sim$ é simétrica: se $E \sim F$, então $F \sim E$:
$$M_{FE} = (M_{EF})^{-1}.$$
3. $\sim$ é transitiva: se $E \sim F$ e $F \sim G$, então $E \sim G$:
$$M_{EG} = M_{EF}M_{FG}.$$

Seja E uma base de V^3.

Definimos a **classe de equivalência de E**, denotada por $\overline{E}$ como sendo o conjunto de todas as bases equivalentes a E, ou seja,

$$\overline{E} = \{\, F \in \mathcal{B} \mid F \sim E \,\} = \{\, F \in \mathcal{B} \mid \det(M_{EF}) > 0 \,\}.$$

Proposição. *Existem apenas duas classes de equivalência em $\mathcal{B}$, ou seja,*

$$\mathcal{B} = \overline{E} \cup \overline{F}, \quad \overline{E} \cap \overline{F} = \emptyset.$$

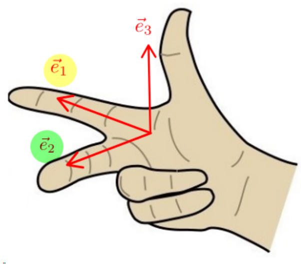
Definição OPv.1.2. Cada classe de equivalência de $\mathcal{B}$ chama-se **orientação** de V^3.

Uma vez escolhida e fixada uma classe de equivalência, diz-se que V^3 está **orientado**. Neste caso cada base da orientação escolhida é chamada **base positiva**, e cada base da outra orientação é chamada **base negativa**.

Para uma explicação geométrica da palavra "orientação", leia, por exemplo, Apêndice O do livro Geometria Analítica - Paulo Boulos.

Convenção:

Uma base $E = (\boxed{\overrightarrow{e_1}}, \boxed{\overrightarrow{e_2}}, \vec{e}_3)$ de V^3 obedece a regra da mão direita se podemos representar os vetores $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ na seguinte forma



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Regra_da_m%C3%A3o_direita.jpg

Orientamos V^3 com uma base que obedece a regra da mão direita.

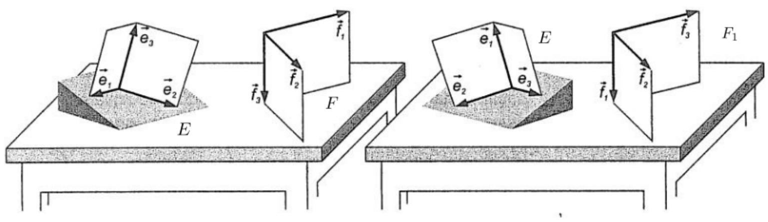


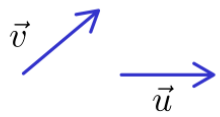
Figura 1: E e F obedecem a regra da mão direita, F_1 não obedece. Fonte: Livro Geometria Analítica, Boulos

Uma base positiva em V^3 é aquela que obedece a regra da mão direita.

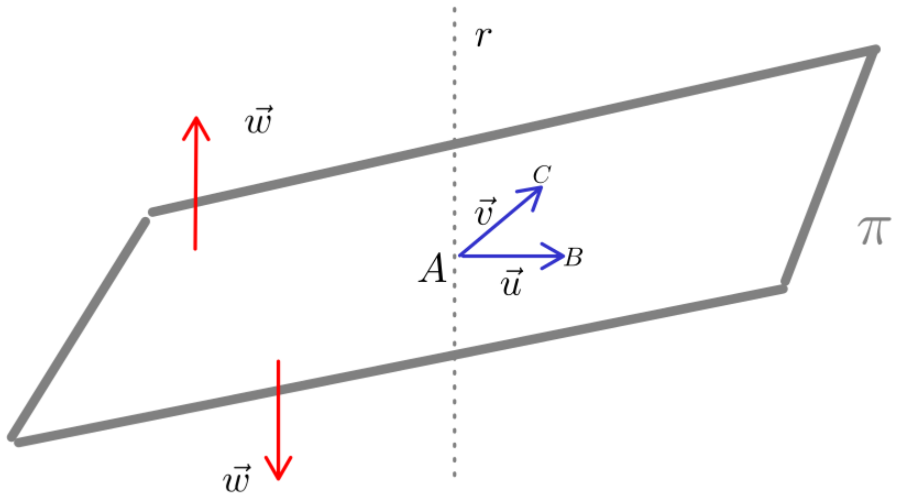
OPv.2 Produto Vetorial

Motivação

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores LI de V^3.



Então[1], existe um vetor não nulo $\vec{w}$ ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$:



Se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, os pontos A, B e C determinam um único plano π.

Existe uma única reta r perpendicular ao plano π.

A direção de $\vec{w}$ é dada pela reta r, portanto, é única.

O sentido e o módulo de $\vec{w}$ não são únicos.

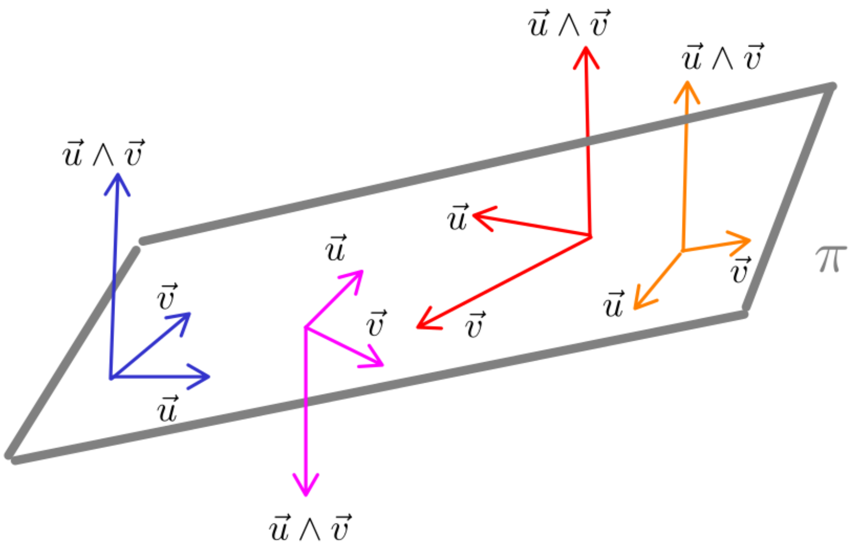
Como escolher de modo único um vetor ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$?

---

[1] Fizemos exercício para determinar $\vec{w}$, conhecendo as coordenadas de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ em relação a uma base ortonormal. Veja Exercício 22 em Slide de Exercícios.

Definição OPv.2.1. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores de V^3.
O **produto vetorial de $\vec{u}$ e $\vec{v}$** é o vetor, denotado por $\vec{u} \wedge \vec{v}$ (ou $\vec{u} \times \vec{v}$), tal que:

1. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LD, então $\vec{u} \wedge \vec{v} := \vec{0}$.
2. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI, então
   (a) $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$ (impõem $\vec{u} \wedge \vec{v}$ paralelo a r)
   (b) $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin\theta$, onde $\theta = ang(\vec{u}, \vec{v})$ ($\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| > 0$ fornece 2 pontos em r)
   (c) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ é uma base positiva. (determina o ponto de r a ser escolhido)



Nota.

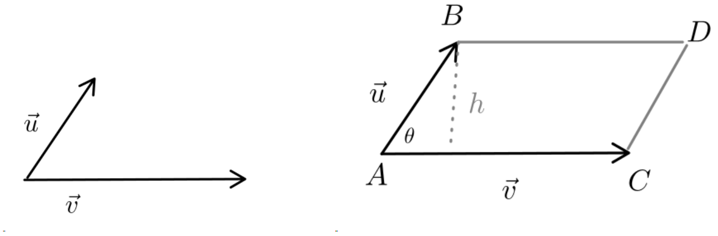
1. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI, as propriedades (a), (b) e (c) da definição determinam unicamente o vetor $\vec{u} \wedge \vec{v}$.
2. O produto vetorial é um **vetor**.
3. O produto escalar é um **número real**.
4. $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ se, e somente se, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LD.

OPv.2.1 Área de paralelogramo

Aplicação de produto vetorial:

A área A_{ABDC} do paralelogramo $ABDC$ gerado por dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ LI de V^3 é dada por:

$$A_{ABDC} = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|.$$



Como calcular $\vec{u} \wedge \vec{v}$?

Lembre-se da condição para dois vetores serem LD/LI: Proposição B.1.4.

Teorema OPv.2.2. *Seja $E = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\kappa})$ uma base ortonormal positiva. Se $\vec{u} = (x, y, z)_E$ e $\vec{v} = (a, b, c)_E$, então*

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & z \\ b & c \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} x & z \\ a & c \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} \vec{\kappa} =: \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{\kappa} \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix}.$$

Exemplo OPv.2.3. Ver Exercício 29 em Slide de Exercícios.

OPv.2.2 Propriedades de produto vetorial

Proposição OPv.2.4. *Para quaisquer vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ em V^3 e escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, vale:*

1. $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$. *(não é comutativa)*
2. $(\lambda\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})$.
3. $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$.
4. $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$.

Demonstração. Seguem das propriedades de determinante. (tarefa!) □

Nota.

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$? Não. $\vec{u}$ e $\vec{v}$ podem ser não nulos e paralelos
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{w} \Longrightarrow \vec{v} = \vec{w}$? Não, apenas que $\vec{u} \wedge (\vec{v} - \vec{w}) = 0$
- $\vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{w} \wedge \vec{u} = \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w})$? Não, $\vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{w} \wedge \vec{u} = \vec{u} \wedge (\vec{v} - \vec{w})$
- Faz sentido $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ e $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$? Sim.
- Se sim, vale $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$? Não, $(\vec{\jmath} \wedge \vec{\jmath}) \wedge \vec{\imath} = \vec{0}$ e $\vec{\jmath} \wedge (\vec{\jmath} \wedge \vec{\imath}) = -\vec{\kappa}$ (é associativa?)

Proposição OPv.2.5. *Para quaisquer vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$, valem*[2]*:*

1. $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = -(\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v}$;
2. $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$.

Demonstração. Tarefa! □

Corolário (Identidade de Jacobi).

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} + (\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{u} + (\vec{w} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{0}.$$

Exemplo OPv.2.6. Ver Exercício 30 em Slide de Exercícios.

Corolário OPv.2.7. *Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ vetores LI. Então,*

1. $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ *é uma combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, para todo vetor $\vec{w} \in V^3$;*
2. $F = (\vec{u}, (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{u}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ *é uma base ortogonal positiva de V^3.*

Corolário OPv.2.8. *Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ vetores LI. Então, $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\kappa})$ onde*

$$\vec{\imath} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \quad \vec{\jmath} = \frac{(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{u}}{\|(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{u}\|}, \quad \vec{\kappa} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{v}}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|},$$

é uma base[3] *ortonormal positiva de V^3.*

Exemplo OPv.2.9. Ver Exercícios 31 a 33 em Slide de Exercícios.

---

[2] O duplo produto vetorial não depende da orientação!

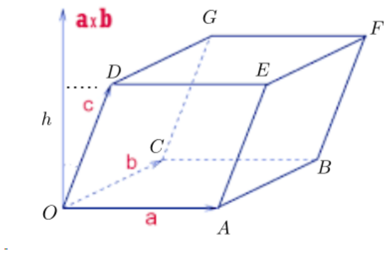
[3] Note que $\vec{\imath}$ é paralelo a $\vec{u}$, e $\vec{\jmath}$ é combinação linear de $\vec{u}$ e de $\vec{v}$.

OPv.3 Produto Misto

A definição do produto misto de três vetores (LI) no espaço é motivada pelo cálculo do volume de um paralelepípedo gerado por tais vetores.

OPv.3.1 Volume de paralelepípedo e tetraedro

Calcular o volume V_P do paralelepípedo $P = OABCDEFG$ determinado por três vetores $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$ LI de V^3.



Fonte: Slides da profa. Maria do Carmo

- $V_P =$ (área da base)(altura) $=$ (área paralelogramo $OABC$)h

- área da base $= \|\vec{a} \wedge \vec{b}\|$

- $h = \|proj_{\vec{a}\wedge\vec{b}}\vec{c}\| \overset{Prop.P.2.7}{=} \dfrac{|\vec{c} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b})|}{\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|}$

- Portanto,

$$\boxed{V_P = |\vec{c} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b})| = |(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}|}$$

Definição OPv.3.1. Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ três vetores de V^3.

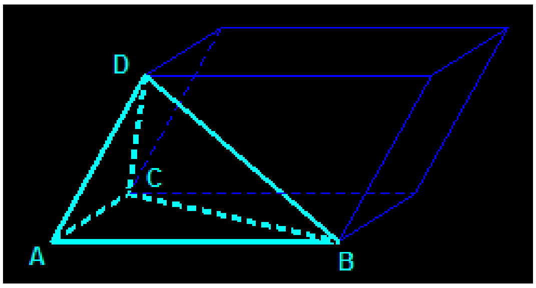
O **produto misto** dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, **nessa ordem**, é o número real $\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}$, denotado por $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] := (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}.$$

Nota. Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ vetores LI de V^3:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{AC}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{AD}.$$

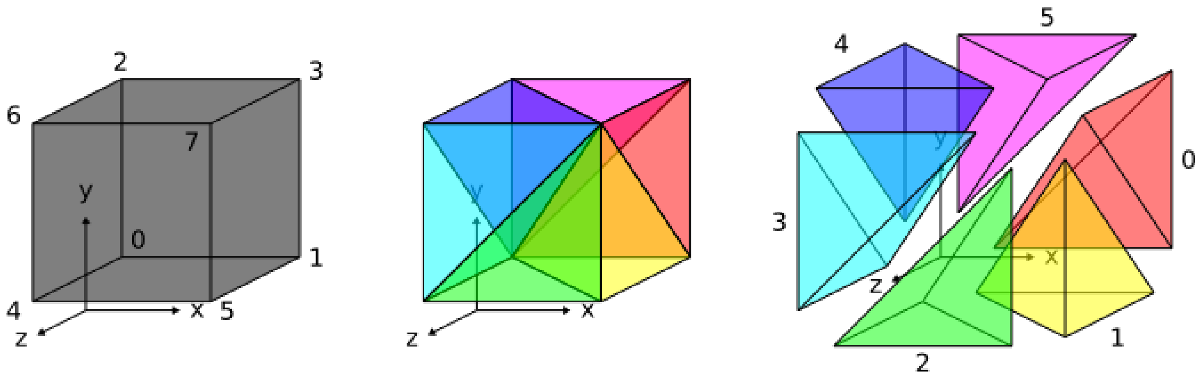
Estes vetores definem também um tetraedro:



Fonte: http://www.polyhedra-world.nc/tetra_.htm

O volume do tetraedro é:

$$V_T = \frac{1}{6}(\text{volume do paralelepípedo determinado por } \vec{a}, \vec{b} \text{ e } \vec{c}).$$



Fonte:https://www.dune-project.org/doxygen/2.6.0/classDune_1_1GridFactoryInterface.html

$$V_T = \frac{1}{6}\,|(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}| = \frac{1}{6}\,[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}].$$

Como calcular de maneira mais rápida o produto misto?

Proposição OPv.3.2. *Seja $E = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\kappa})$ uma base ortonormal positiva. Se*

$$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)_E, \quad \vec{v} = (x_2, y_2, z_2)_E, \quad \vec{w} = (x_3, y_3, z_3)_E,$$

então

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Corolário OPv.3.3. *Sejam $E = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\kappa})$ uma base ortonormal positiva e $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ três vetores de V^3.*

1. *$\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são LD se e somente se $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$.*
2. *$\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são LI se e somente se $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \neq 0$.*

Demonstração. Imediata: veja Proposição B.1.6. □

Corolário OPv.3.4. *Sejam $E = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\kappa})$ uma base ortonormal positiva, $F = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ e $G = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ bases quaisquer de V^3. Então,*

1. $\det M_{EF} = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.
2. $\det M_{FG} = \dfrac{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]}{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]}$.

Corolário OPv.3.5. *Sejam $E = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\kappa})$ uma base ortonormal positiva e $F = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, onde $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são três vetores de V^3.*

1. *Se $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$, então F não é base.*
2. *Se $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \neq 0$, então F é base;*
   (a) *se $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] > 0$, então F é base positiva;*
   (b) *se $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] < 0$, então F é base negativa.*

Proposição (Propriedades do produto misto).
Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *e* $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{u}_i, \vec{v}_i, \vec{w}_i \in V^3$, $i = 1, 2$.

1. *O produto misto é tri-linear:*
   (a) $[\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}] = \alpha[\vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w}] + \beta[\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}]$;
   (b) $[\vec{u}, \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2, \vec{w}] = \alpha[\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{w}] + \beta[\vec{u}, \vec{v}_2, \vec{w}]$;
   (c) $[\vec{u}, \vec{v}, \alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2] = \alpha[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_1] + \beta[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_2]$.

2. *O produto misto é alternado:*
$$\begin{aligned}
[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] &= -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = -[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] \\
&= -[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] \\
&= [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}].
\end{aligned}$$

3. *Se* $\vec{a} = a_1\vec{u} + b_1\vec{v} + c_1\vec{w}$, $\vec{b} = a_2\vec{u} + b_2\vec{v} + c_2\vec{w}$ *e* $\vec{c} = a_3\vec{u} + b_3\vec{v} + c_3\vec{w}$, *então:*
$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}].$$

Demonstração. Para os itens 1 e 2 usar a definição de produto misto (tarefa!) e para o item 3 basta usar o Corolário OPv.3.4.

□

Exemplo OPv.3.6. Ver Exercícios 34 e 35 em Slide de Exercícios.