

Conteúdo

P.1 Produto Escalar	P.1
P.1.1 Ângulo entre dois vetores não nulos de V^3	P.1
P.1.2 Produto escalar	P.4
P.2 Base Ortonormal	P.6
P.2.1 Projeção Ortogonal	P.8
P.2.2 Processo de Ortonormalização de Gram-Schmidt	P.10

Objetivo

Definir o conceito de **produto escalar** entre dois vetores e sua relação com ortogonalidade.

Construir **base ortonormal**: o cálculo com vetores com coordenadas em relação a base ortonormal se torna mais simples.

P.1 Produto Escalar

Para definir produto escalar precisamos responder as seguintes duas perguntas:

1. Como definir a medida do ângulo entre dois vetores \vec{u} e \vec{v} do espaço?
 2. Como “calcular” a medida do ângulo entre dois vetores \vec{u} e \vec{v} do espaço?
-

P.1.1 Ângulo entre dois vetores não nulos de V^3

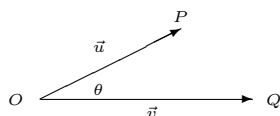
Considere os seguintes vetores não nulos de V^3 :



Fonte: Slides Profa. Maria do Carmo

Considere os pontos O , P e Q tais que

$$\vec{u} = \overrightarrow{OP} \quad \text{e} \quad \vec{v} = \overrightarrow{OQ}.$$



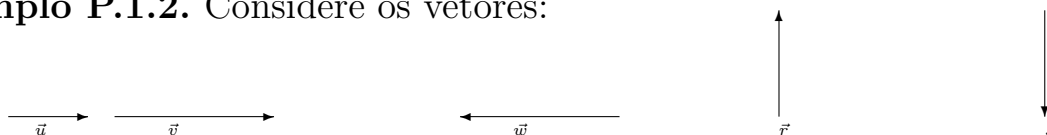
Fonte: Slides Profa. Maria do Carmo

Definição P.1.1. A **medida angular** (ou a **medida do ângulo**) entre os vetores \vec{u} e \vec{v} é a medida θ do ângulo \widehat{POQ} com $0 \leq \theta \leq \pi$. Escrevemos

$$\theta = \text{ang}(\vec{u}, \vec{v}) = \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}).$$

Nota: Existem duas escolhas para definir a medida do ângulo entre os vetores \vec{u} e \vec{v} . Nossa escolha é aquela de modo que a medida está entre 0 e π .

Exemplo P.1.2. Considere os vetores:



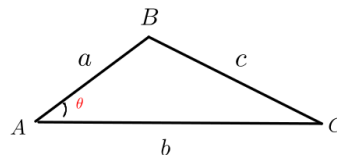
Fonte: Slides Profa. Maria do Carmo

- Qual a medida do ângulo entre os vetores \vec{u} e \vec{v} ? é zero.
- Qual a medida do ângulo entre os vetores \vec{u} e \vec{w} ? é π .
- Qual a medida do ângulo entre os vetores \vec{w} e \vec{v} ? é π .
- Qual a medida do ângulo entre os vetores \vec{u} e \vec{r} ? é $\pi/2$.
- Qual a medida do ângulo entre os vetores \vec{u} e \vec{s} ? é $\pi/2$.
- Qual a medida do ângulo entre os vetores \vec{w} e \vec{r} ? é $\pi/2$.
- Qual a medida do ângulo entre os vetores \vec{w} e \vec{s} ? é $\pi/2$.
- Qual a medida do ângulo entre os vetores \vec{r} e \vec{s} ? é π .

Se os vetores não são tão “bem comportados”, como calcular o ângulo?

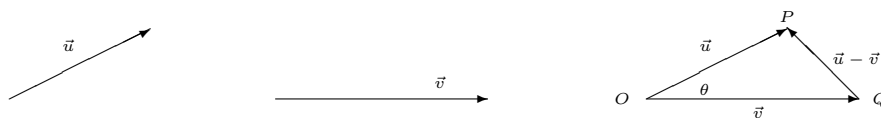
Lei dos cossenos: Sejam ABC um triângulo como na figura abaixo, a o comprimento do segmento \overline{AB} , b o comprimento do segmento \overline{AC} , c o comprimento do segmento \overline{BC} e θ o ângulo formado pelos segmentos \overline{AB} e \overline{AC} . Então,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta.$$



Considere dois vetores \vec{u} e \vec{v} não nulos e pontos O , P e Q tais que

$$\overrightarrow{OP} = \vec{u} \text{ e } \overrightarrow{OQ} = \vec{v}$$



Fonte: Slides Profa. Maria do Carmo

Pela Lei dos Cossenos:

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos \theta, \quad \theta = \text{ang}(\vec{u}, \vec{v}). \quad (\text{P.1.1})$$

Nota:

1. A equação acima diz que podemos calcular o ângulo entre os vetores \vec{u} e \vec{v} conhecendo os valores: $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ e $\|\vec{u} - \vec{v}\|$.

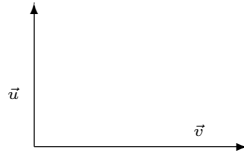
2. Sejam \vec{u} e \vec{v} vetores não nulos. Então,

$$\theta = \text{ang}(\vec{u}, \vec{v}) = \pi/2 \iff \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos \theta = 0.$$

Definição P.1.3. Dizemos que dois vetores \vec{u} e \vec{v} são **ortogonais** se:

- ou um deles é o vetor nulo;
- ou ambos não nulos e a medida do ângulo entre eles é $\pi/2$.

Notação: $\vec{u} \perp \vec{v}$.



P.1.2 Produto escalar

Definição P.1.4. O **produto escalar entre os vetores \vec{u} e \vec{v} de V^3** , indicado por $\vec{u} \cdot \vec{v}$, é o número real tal que

- Se \vec{u} ou \vec{v} é o vetor nulo, $\vec{u} \cdot \vec{v} := 0$.
- Se \vec{u} e \vec{v} são não nulos e θ é a medida do ângulo entre os vetores \vec{u} e \vec{v} ,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} := \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta.$$

Proposição P.1.5.

(P1) Se \vec{u} e \vec{v} são não nulos e $\theta = \text{ang}(\vec{u}, \vec{v})$, então

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}.$$

(P2) $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$.

(P3) $\vec{u} \perp \vec{v}$ se e somente se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

(P4) (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) Para quaisquer que sejam \vec{u} e \vec{v} em V^3 ,

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|.$$

A igualdade vale se, e somente se, \vec{u} e \vec{v} são LD.

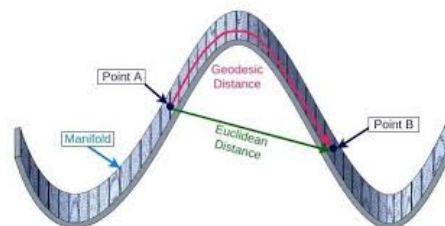
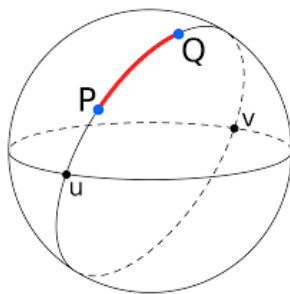
Curiosidade: Quando $x, y \in S_1(0)$ (esfera de raio 1), a função ângulo

$$\theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \arccos \left(\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} \right) = \arccos(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$$

é a **distância geodésica** entre os pontos x e y , usualmente dita a função que determina a “distância real” na Terra (“variedades”), veja **Geodésica**.



(a) Delfim Moreira-MG, 2019



(b) Ilustração distância geodésica: fonte internet

Nota: As propriedades P1 e P2 da Proposição [P.1.5](#) dizem que podemos calcular o ângulo entre dois vetores conhecendo o produto interno entre vetores.

MAS...

- Não sabemos CALCULAR a norma de um vetor...
- Não sabemos CALCULAR o produto interno entre vetores...
- Tudo o que foi feito é **geométrico**...
- Vamos retomar as coordenadas de vetores e base do espaço!
- Para termos propriedades **analíticas**!

P.2 Base Ortonormal

Definição P.2.1. Uma base $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de V^3 é uma **base ortonormal** quando os vetores \vec{e}_1 , \vec{e}_2 e \vec{e}_3 são unitários e dois a dois ortogonais, isto é,

$$\|\vec{e}_1\| = 1, \quad \|\vec{e}_2\| = 1 \quad \text{e} \quad \|\vec{e}_3\| = 1,$$

e

$$\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2, \quad \vec{e}_1 \perp \vec{e}_3, \quad \text{e} \quad \vec{e}_3 \perp \vec{e}_2.$$

Teorema P.2.2. *Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base ortonormal de V^3 .*

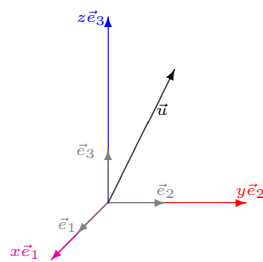
Se $\vec{u} = (x, y, z)_E$ e $\vec{v} = (a, b, c)_E$, então

1.

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

2.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xa + yb + zc.$$



Nota.

1. As fórmulas acima valem somente quando a base E é **ortonormal**.
2. As fórmulas acima valem para **qualquer** base ortonormal.

Exemplo P.2.3. Ver Exercícios 20 a 22 em [Slide de Exercícios](#).

Proposição P.2.4. Para quaisquer vetores \vec{u}, \vec{v} e \vec{w} de V^3 e qualquer escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, vale:

$$1. \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}; \quad (\text{distributiva})$$

$$2. \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v});$$

$$3. \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}; \quad (\text{comutativa})$$

$$4. \text{ Se } \vec{u} \neq \vec{0}, \text{ então } \vec{u} \cdot \vec{u} > 0.$$

Demonstração. **Tarefa!** (use as coordenadas dos vetores em uma fixada base ortonormal). \square

Nota.

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \implies \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$? Não, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ diz que \vec{u} é ortogonal a \vec{v} .

- Faz sentido as expressões: $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$ e $\vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w})$? Não, $\vec{u} \cdot \vec{v}$ é número e não se faz produto escalar entre número e vetor. Podemos fazer apenas multiplicação por escalar: $(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$.

- Se sim, vale $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w})$? (é associativa?)

Exemplo P.2.5. Sejam \vec{w} um vetor não nulo e T o conjunto dos vetores em V^3 que são ortogonais a \vec{w} . Prove que:

(a) $\vec{w} \notin T$;

(b) Qualquer combinação linear de vetores em T pertence a T ;

(c) Se $\vec{u}, \vec{v} \in T$ são LI, então $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LI;

(d) Três vetores quaisquer de T são LD;

(e) Se $\vec{u}, \vec{v} \in T$ são LI, então \vec{u}, \vec{v} geram T , isto é, todo vetor de T é combinação linear de \vec{u} e \vec{v} .

T é chamado **plano ortogonal** a \vec{w} .

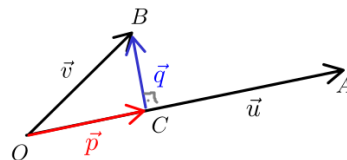
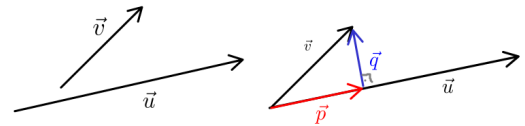
P.2.1 Projeção Ortogonal

Motivação: A projeção será usada na construção de base ortonormal.

Dados dois vetores \vec{u} e \vec{v} em V^3 , é possível decompor o vetor \vec{v} como soma de dois vetores \vec{p}, \vec{q} ,

$$\vec{v} = \vec{p} + \vec{q},$$

de forma que \vec{p} seja paralelo a \vec{u} e \vec{q} seja ortogonal a \vec{u} .



- O, A, B tais que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$
- C : ponto de intersecção da reta perpendicular à reta OA que passa por B
- Por construção (geométrica), os vetores

$$\vec{p} := \overrightarrow{OC}, \quad \vec{q} := \overrightarrow{CB}$$

satisfazem:

$$\vec{p} \parallel \vec{u}, \quad \vec{q} \perp \vec{u}, \quad \vec{v} = \vec{p} + \vec{q}.$$

Definição P.2.6. Seja \vec{u} um vetor não nulo em V^3 . Dado um vetor \vec{v} , a **projeção ortogonal de \vec{v} sobre \vec{u}** é o vetor \vec{p} , denotado por $proj_{\vec{u}}\vec{v}$, que satisfaz as condições:

$$\vec{p} \parallel \vec{u} \quad \text{e} \quad (\vec{v} - \vec{p}) \perp \vec{u}.$$

Sempre existe o vetor projeção ortogonal de um vetor \vec{v} sobre $\vec{u} \neq \vec{0}$?

Ele é único?

No caso de existir, temos uma expressão analítica para o vetor projeção \vec{p} ?

Proposição P.2.7. *Seja \vec{u} um vetor não nulo em V^3 . Para qualquer vetor \vec{v} , existe uma única projeção ortogonal de \vec{v} sobre \vec{u} dada por*

$$proj_{\vec{u}}\vec{v} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2} \right) \vec{u},$$

cuja norma é

$$\|proj_{\vec{u}}\vec{v}\| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\|}.$$

Exemplo P.2.8. Ver Exercício 24 em [Slide de Exercícios](#).

Vimos como **é fácil** calcular o produto escalar de dois vetores e, portanto, é fácil calcular:

- a norma de vetores, $(\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}})$

- a medida angular entre vetores, $(\theta = \arccos \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|})$

- a projeção ortogonal, $(proj_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u})$

quando as coordenadas dos vetores são em relação a uma **base ortonormal**.

- E se a base não é ortonormal? 

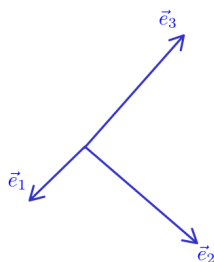
Se $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é uma base de V^3 que **não é ortonormal**, então é possível construir uma **base ortonormal** $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ a partir de E !

Como??

Nota. Obtendo a base B , podemos fazer a mudança de base de E (não ortonormal) para B (ortonormal) e trabalhar sempre com as coordenadas dos vetores em relação à base ortonormal B , onde é fácil fazermos os cálculos!!

P.2.2 Processo de Ortonormalização de Gram-Schmidt

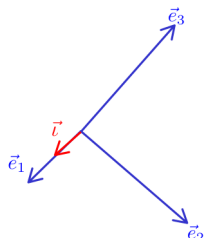
Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base de V^3 .



- **Construção¹** de $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ortonormal a partir de E :

1. Escolher \vec{i} como o versor \vec{e}_1 :

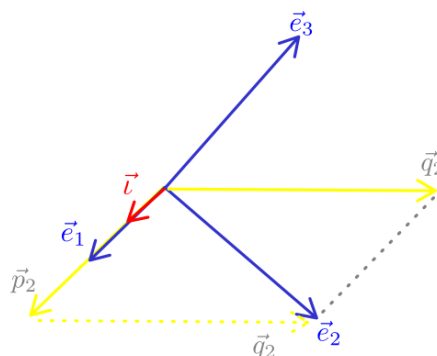
$$\vec{i} = \frac{\vec{e}_1}{\|\vec{e}_1\|}.$$



¹Ver simulação no [Wikipedia](#)

2. Decompor \vec{e}_2 em dois vetores \vec{p}_2 e \vec{q}_2 tais que:

- $\vec{e}_2 = \vec{p}_2 + \vec{q}_2$
- $\vec{p}_2 \parallel \vec{t}$
- $\vec{q}_2 \perp \vec{t}$.



Sabemos que

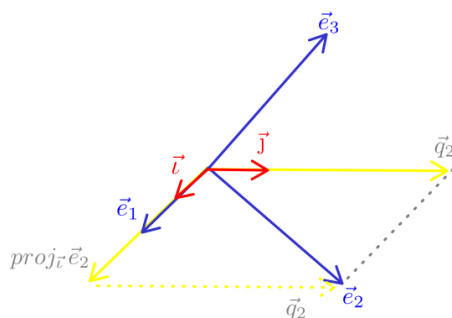
$$\vec{p}_2 = \text{proj}_{\vec{t}} \vec{e}_2 = \left(\frac{\vec{e}_2 \cdot \vec{t}}{\|\vec{t}\|^2} \right) \vec{t} = (\vec{e}_2 \cdot \vec{t}) \vec{t} \quad \text{e} \quad \vec{q}_2 = \vec{e}_2 - \vec{p}_2.$$

Logo,

$$\vec{q}_2 = \vec{e}_2 - (\vec{e}_2 \cdot \vec{t}) \vec{t}.$$

Escolha^{2 3},

$$\vec{j} = \frac{\vec{q}_2}{\|\vec{q}_2\|}. \quad (\vec{j} \perp \vec{t})$$

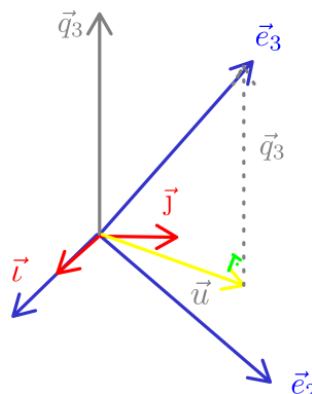


² $\vec{q}_2 \neq \vec{0}$ pois $\{\vec{e}_2, \vec{t}\}$ é LI.

³Note: \vec{t} é paralelo a \vec{e}_1 e \vec{j} é combinação linear de \vec{e}_1 e \vec{e}_2

3. Decompor \vec{e}_3 em dois vetores \vec{u} e \vec{q}_3 tais que:

- $\vec{e}_3 = \vec{u} + \vec{q}_3$
- \vec{u} , \vec{i} e \vec{j} são coplanares;
- \vec{q}_3 é ortogonal a \vec{i} e a \vec{j} .



\vec{u} é a projeção ortogonal de \vec{e}_3 ao plano gerado por \vec{i} e \vec{j}

Segue do Exemplo P.2.5-(e)^a que existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\vec{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}.$$

Temos $\vec{e}_3 = \vec{u} + \vec{q}_3$ e

$\vec{u}, \vec{i}, \vec{j}$ são coplanares $\implies \vec{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$ para algum $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

\vec{q}_3 é ortogonal a $\vec{i} \implies \vec{i} \cdot \vec{q}_3 = 0$.

\vec{q}_3 é ortogonal a $\vec{j} \implies \vec{j} \cdot \vec{q}_3 = 0$.

Logo,

$$\vec{q}_3 = \vec{e}_3 - \vec{u} = \vec{e}_3 - \alpha\vec{i} - \beta\vec{j}$$

e

$$\vec{i} \cdot \vec{q}_3 = 0 \iff \vec{i} \cdot (\vec{e}_3 - \alpha\vec{i} - \beta\vec{j}) = 0 \iff \vec{i} \cdot \vec{e}_3 - \alpha\vec{i} \cdot \vec{i} = 0 \iff \alpha = \frac{\vec{i} \cdot \vec{e}_3}{\vec{i} \cdot \vec{i}}$$

e

$$\vec{j} \cdot \vec{q}_3 = 0 \iff \vec{j} \cdot (\vec{e}_3 - \alpha\vec{i} - \beta\vec{j}) = 0 \iff \vec{j} \cdot \vec{e}_3 - \beta\vec{j} \cdot \vec{j} = 0 \iff \beta = \frac{\vec{j} \cdot \vec{e}_3}{\vec{j} \cdot \vec{j}}.$$

Logo,

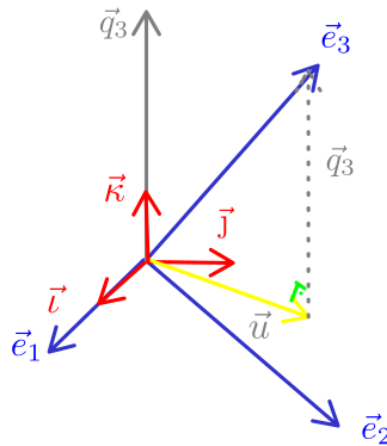
$$\vec{q}_3 = \vec{e}_3 - (\vec{i} \cdot \vec{e}_3)\vec{i} - (\vec{j} \cdot \vec{e}_3)\vec{j}.$$

^a $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ LI

Escolha⁴,

$$\vec{\kappa} = \frac{\vec{q}_3}{\|\vec{q}_3\|}. \quad (\vec{\kappa} \perp \vec{i}, \vec{\kappa} \perp \vec{j})$$

A base $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{\kappa})$ é ortonormal!



Nota. A matriz de mudança de base E para B é uma matriz triangular superior:

$$M_{EB} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Exemplo P.2.9. Ver Exercícios 25 e 26 em [Slide de Exercícios](#).

ALGUMA PROPRIEDADE A MAIS SOBRE A RELAÇÃO ENTRE M_{EB} E M_{BE} ?

⁴ $\vec{q}_3 \neq \vec{0}$ pois pelo Exemplo P.2.5-(c) temos que $\{\vec{e}_3, \vec{i}, \vec{j}\}$ é LI.

- $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ base e $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ base ortonormal de V^3
- $\vec{e}_1 = (a, b, c)_B$; $\vec{e}_2 = (d, e, f)_B$; $\vec{e}_3 = (g, h, i)_B$;
- $M_{BE} = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$
-

$$(M_{BE})^t M_{BE} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 \end{pmatrix}$$

Proposição P.2.10. *Sejam $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base e $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ uma base ortonormal de V^3 . Então, E é ortonormal se, e somente se,*

$$(M_{BE})^t M_{BE} = Id. \quad (\text{P.2.1})$$

Corolário P.2.11. *Se B e E são bases ortonormais de V^3 , então ⁵*

$$M_{EB} = (M_{BE})^{-1} = (M_{BE})^t$$

e

$$\det M_{BE} = 1 \quad \text{ou} \quad \det M_{BE} = -1.$$

⁵Veja Nota na pág. [B.6](#)

Nota.

1. É muito mais fácil encontrar a matriz transposta que a matriz inversa de uma matriz.
2. Matrizes M que satisfazem a condição (P.2.1), isto é,

$$M^t M = Id,$$

são chamadas **matrizes ortogonais**.

3. Dada uma matriz M , ela pode ser pensada como uma matriz de mudança M_{BE} de uma base ortonormal B para uma base E e
 M é ortogonal se, e somente se E é ortonormal.

Portanto, M é ortogonal se, e somente se,

- Cada coluna de M constitui um vetor unitário.
- Duas a duas de quaisquer colunas (distintas) de M constituem vetores ortogonais.