Conteúdo

Objetivo

Apresentar o conceito de base e coordenadas de um vetor em relação a uma base para auxiliarem no cálculo entre vetores.

B.1 Base

Definição B.1.1. Uma terna ordenada $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de três vetores LI de V^3 chama-se **base** de V^3.

Vimos que (Proposição D.1.9 - Slide 2) um qualquer $\vec{x} \in V^3$ é combinação linear única dos elementos $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ de uma base, ou seja:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3, \tag{B.1.1}$$

onde os escalares x_1, x_2, x_3 são únicos para cada vetor $\vec{x}$.

Definição B.1.2. Chamamos a terna (x_1, x_2, x_3) de números reais em (B.1.1) de **coordenadas** do vetor $\vec{x}$ na base E. Escrevemos

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)_E.$$

Exemplo B.1.3.

(a) $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_E = \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)_E \iff u_1 = v_1,\ u_2 = v_2$ e $u_3 = v_3$.

(b) $\vec{0} = (0, 0, 0)_E$.

B.1.1 Interpretação das propriedades de vetores usando coordenadas

Propriedades:

Se $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_E$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)_E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ temos

(a) $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)_E$

(b) $\lambda\vec{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)_E$.

Dependência linear de dois vetores:

Queremos obter um critério para analisar quando os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ em V^3 são LD/LI através de suas coordenadas:

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_E, \qquad \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)_E$$

$$\vec{u}, \vec{v} \quad \text{LD} \iff \exists \alpha, \beta \text{ não ambos nulos tais que } \quad \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$$

$$\iff \exists \alpha, \beta \text{ não ambos nulos; } (\alpha u_1 + \beta v_1, \alpha u_2 + \beta v_2, \alpha u_3 + \beta v_3)_E = (0,0,0)_E$$

$$\iff \begin{cases} \alpha u_1 + \beta v_1 = 0 \\ \alpha u_2 + \beta v_2 = 0 \\ \alpha u_3 + \beta v_3 = 0 \end{cases} \quad \text{tem mais de uma solução (nula e não nula, SPI}^{1}\text{)}$$

Proposição B.1.4. *Dois vetores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_E$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)_E$ são LD se e somente se*

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0 \quad e \quad \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Corolário. *Se um dos determinantes acima é não nulo, então os vetores $\vec{u}, \vec{v}$ são LI.*

[1] Sistema Possível e Indeterminado

Exemplo B.1.5. Ver Exercícios 11 e 12 em Slide de Exercícios.

Dependência linear de três vetores:

Queremos obter um critério para analisar quando os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ em V^3 são LD/LI através de suas coordenadas.

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_E, \qquad \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)_E, \qquad \vec{w} = (w_1, w_2, w_3)_E$$

$$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \quad \text{LD} \iff \exists \alpha, \beta, \gamma \text{ não todos nulos tais que } \quad \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma \vec{w}_1 = 0 \\ \alpha u_2 + \beta v_2 + \gamma \vec{w}_2 = 0 \\ \alpha u_3 + \beta v_3 + \gamma \vec{w}_3 = 0 \end{cases} \quad \text{tem mais de uma solução } {\scriptstyle \text{(nula e não nula)}}$$

Proposição B.1.6. *Três vetores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_E$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)_E$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)_E$ são LD se e somente se*

$$\begin{array}{l} (\textit{coordenadas de } \vec{u} \rightarrow) \\ (\textit{coordenadas de } \vec{v} \rightarrow) \\ (\textit{coordenadas de } \vec{w} \rightarrow) \end{array} \qquad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Corolário. *Se o determinante acima é não nulo, então os vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são LI.*

Exemplo B.1.7. Ver Exercícios 13 a 15 em Slide de Exercícios.

Nota:

- Em V^3, uma base é formada por 3 vetores LI. As bases não são únicas!!
- Conhecendo-se uma base, um qualquer vetor pode ser representado de de maneira única por uma tripla ordenada de números reais, ou seja, podemos identificar V^3 com $\mathbb{R}^3$.
- Todas as propriedades de vetores podem ser reescritas usando coordenadas.
- Computacionalmente é mais fácil e prático realizar as operações sobre vetores usando as coordenadas.

B.1.2 Mudança de base

Já sabemos que V^3 não possui uma única base.

Motivação:

- Reescreva o sistema da resolução do Exercício 15-(b) em forma matricial.

Dado um vetor $\vec{u}$ em V^3 e duas bases E e F de V^3, qual a relação entre as coordenadas de $\vec{u}$ na base E com as coordenadas de $\vec{u}$ na base F?

Mudança de base:

- $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ bases de V^3
- Dado um $\vec{u} \in V^3$ com coordenadas $(x_1, x_2, x_3)_E$ e $(y_1, y_2, y_3)_F$, temos
$$\vec{u} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 \quad \text{e} \quad \vec{u} = y_1\vec{f}_1 + y_2\vec{f}_2 + y_3\vec{f}_3.$$
- Cada vetor de F pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores da base E, ou seja, existem escalares α_{ij} tais que

$$\begin{aligned}
\vec{f}_{\mathbf{1}} &= \alpha_{1\mathbf{1}}\vec{e}_1 + \alpha_{2\mathbf{1}}\vec{e}_2 + \alpha_{3\mathbf{1}}\vec{e}_3 \\
\vec{f}_{\mathbf{2}} &= \alpha_{1\mathbf{2}}\vec{e}_1 + \alpha_{2\mathbf{2}}\vec{e}_2 + \alpha_{3\mathbf{2}}\vec{e}_3 \\
\vec{f}_{\mathbf{3}} &= \alpha_{1\mathbf{3}}\vec{e}_1 + \alpha_{2\mathbf{3}}\vec{e}_2 + \alpha_{3\mathbf{3}}\vec{e}_3.
\end{aligned}$$

$$\alpha_{ij}$$

o coeficiente de $\vec{e}_i$ o índice de $\vec{f}_j$

- Logo,

$$\begin{aligned}
\vec{u} &= y_1\vec{f}_1 + y_2\vec{f}_2 + y_3\vec{f}_3 \\
&= y_1(\alpha_{11}\vec{e}_1 + \alpha_{21}\vec{e}_2 + \alpha_{31}\vec{e}_3) + y_2(\alpha_{12}\vec{e}_1 + \alpha_{22}\vec{e}_2 + \alpha_{32}\vec{e}_3) \\
&+ y_3(\alpha_{13}\vec{e}_1 + \alpha_{23}\vec{e}_2 + \alpha_{33}\vec{e}_3) \\
&= (\alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3)\vec{e}_1 + (\alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \alpha_{23}y_3)\vec{e}_2 \\
&+ (\alpha_{31}y_1 + \alpha_{32}y_2 + \alpha_{33}y_3)\vec{e}_3.
\end{aligned}$$

- Pela unicidade das coordenadas,

$$\begin{aligned}
x_1 &= \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3 \\
x_2 &= \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \alpha_{23}y_3 \\
x_3 &= \alpha_{31}y_1 + \alpha_{32}y_2 + \alpha_{33}y_3.
\end{aligned}$$

Escrevendo as equações acima na forma matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_E}_{(\vec{u})_E} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}}_{M_{EF}} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}_F}_{(\vec{u})_F}, \tag{B.1.2}$$

- $(\vec{u})_E$: é a matriz coluna $n \times 1$ formada pelas coordenadas de u na base E;
- $(\vec{u})_F$: é a matriz coluna $n \times 1$ formada pelas coordenadas de u na base F;
- M_{EF}: é a matriz quadrada $n \times n$ na qual a coluna 1 é formada pelas coordenadas de $\vec{f}_1$ na base E; a coluna 2 é formada pelas coordenadas de $\vec{f}_2$ na base E e a coluna 3 é formada pelas coordenadas de $\vec{f}_3$ na base E.

Definição B.1.8. A matriz M_{EF} é chamada **matriz de mudança da base E para a base F.**
Notações:

$$(\vec{u})_E = M_{EF}(\vec{u})_F; \qquad (\ )_E = M_{EF}(\ )_F. \tag{B.1.3}$$

Nota: Como $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ são LI (pois F é uma base), temos que o determinante de M_{EF} é não nulo. Portanto, a matriz mudança de base possui matriz inversa $(M_{EF})^{-1}$ e vale

$$M_{EF}(M_{EF})^{-1} = (M_{EF})^{-1}M_{EF} = Id,$$

onde Id é a matriz identidade:

$$Id := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo B.1.9. Ver Exercícios 16 a 18 em Slide de Exercícios.

Existe alguma relação entre M_{EF} e M_{FE}??

Proposição B.1.10. *Sejam* E, F, G *três bases de* V^3. *Então,*

$$M_{EF}M_{FG} = M_{EG}.$$

Corolário B.1.11. *Sejam* E *e* F *bases de* V^3. *Então,*

$$M_{FE} = (M_{EF})^{-1}.$$

Exemplo B.1.12. Ver Exercício 19 em Slide de Exercícios.