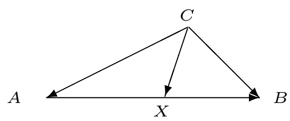
Este arquivo contém alguns dos exercícios que foram resolvidos ou discutidos durante as aulas. Seus enunciados podem não estar completos e pode ser que durante as aulas importantes comentários sobre as resoluções tenham sido feitos.[1]

Conteúdo

[1] Caso você encontre algum erro neste arquivo, por favor, reportá-lo para apperon@icmc.usp.br

E.1 Vetores

1. Verifique que $\vec{u}+\vec{x}=\vec{u}+\vec{y} \Longrightarrow \vec{x}=\vec{y}$.
2. Se $\vec{v} \neq \vec{0}$, mostre que $\dfrac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ possui comprimento 1.
3. Mostre que se $\alpha \neq 0$, então $\alpha\vec{v}=\vec{w} \Longrightarrow \vec{v}=\frac{1}{\alpha}\vec{w}$.
4. Conhecendo os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, encontre os vetores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ que satisfazem:
$$\begin{cases} \vec{x}+2\vec{y} & =\vec{u} \\ 3\vec{x}-\vec{y} & =2\vec{u}+\vec{v} \end{cases}$$
Resp.: $\vec{x}=\frac{1}{7}(5\vec{u}+2\vec{v})$, $\vec{y}=\frac{1}{7}(\vec{u}-\vec{v})$
5. Se $\alpha\vec{u}=\vec{0}$, mostre que $\alpha=0$ ou $\vec{u}=\vec{0}$.
6. Mostre que as diagonais de um paralelogramo têm o mesmo ponto médio.
7. Considere o triângulo ABC como na figura e seja X como na figura. Suponha que $\overrightarrow{AX}=m\cdot\overrightarrow{XB}$, com $m>0$. Escreva o vetor $\overrightarrow{CX}$ em função dos vetores $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$. (tarefa!)
Resp.: $\overrightarrow{CX}=\frac{1}{m+1}\overrightarrow{CA}+\frac{m}{m+1}\overrightarrow{CB}$.



Fonte: Slides Profa. Maria do Carmo

8. Sejam $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ vetores em V^n. Suponha que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam paralelos. Mostre que existe um $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.

E.2 Dependência Linear

9. Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^n$. Mostre que os vetores $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$ são LD, onde

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w} \\ \vec{b} &= 2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w} \\ \vec{c} &= 7\vec{v} - 3\vec{w}. \end{aligned}$$

10. Se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^3$ são LI, então $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} + \vec{w}$ e $\vec{v} + \vec{w}$ são LI.

E.3 Base

11. Verifique se os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dados são LD ou LI.

    (a) $\vec{u} = (0, 1, 0)_E$ e $\vec{v} = (1, 0, 1)_E$

    (b) $\vec{u} = (1, -3, 14)_E$ e $\vec{v} = (\frac{1}{14}, \frac{-3}{14}, 1)_E$

    Resp.: (a) LI (b) LD

12. Determine m e n de modo que os vetores

$$\vec{u} = (1, m, n + 1)_E, \qquad \vec{v} = (m, n, 10)_E$$

sejam LD.
Resp.: $m = 2, n = 4$

13. Verifique se $\vec{u} = (1, -1, 2)_E$, $\vec{v} = (-3, 4, 1)_E$ e $\vec{w} = (1, 0, 9)_E$ são LI ou LD.
Resp.: são LD

14. Determine se existe m tal que os vetores

$$\vec{u} = (m, 1, 1 + m)_E, \quad \vec{v} = (1, 2, m)_E, \quad \vec{w} = (1, 1, 1)_E$$

sejam LD.
Resp.: $\nexists m \in \mathbb{R}$ tal que os vetores sejam LD. Portanto $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ são LI e portanto base de V^3 para qualquer $m \in \mathbb{R}$.

15. Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base de V^3 e considere os vetores

$$\vec{f}_1 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \quad \vec{f}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \quad \vec{f}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3.$$

(a) Mostre que $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ é base de V^3.

(b) Calcule as coordenadas do vetor $\vec{u} = (1, 1, 1)_E$ na base F.

Resp.: (a) $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ são LI; (b) $\vec{u} = (-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{7}{3})_F$

E.3.1 Mudança de base

16. Dada uma base qualquer E de V^3, mostre que $M_{EE} = Id$.

17. Determine a, b, c sabendo que $(1, 1, 2)_E = (2, 1, 0)_F$ e que

$$M_{FE} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & a \\ 2 & 1 & b \\ 1 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Resp.: $a = \frac{3}{2}, b = -1$ e $c = -\frac{1}{2}$

18. Considere as bases $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ onde

$$\vec{f}_1 = (-3, 1, 1)_E, \quad \vec{f}_2 = (1, -2, 1)_E, \quad \vec{f}_3 = (1, 2, 0)_E.$$

(a) Determine as coordenadas de $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ na base F.

(b) Escreva a matriz de mudança da base E para F.

(c) Quais são as coordenadas do vetor $\vec{u} = (-4, 1, , -1)_F$ na base E?

Resp.: (a) $\vec{f}_1 = (1, 0, 0)_F, \vec{f}_2 = (0, 1, 0)_F, \vec{f}_3 = (0, 0, 1)_F$; (b) $M_{EF} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;
(c) $\vec{u} = (12, -8, -3)_E$

19. Sejam $E = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ uma base de V^3 e $F = (\vec{v} - \vec{u}, \vec{u} - \vec{w}, \vec{u})$.

(a) Mostre que F é base de V^3.

(b) Calcule as coordenadas de $\vec{u} + 2\vec{v} + 3\vec{w}$ na base F.

Resp.: (a) $\vec{v}-\vec{u}, \vec{u}-\vec{w}, \vec{u}$ são LI; (b) $\vec{u}+2\vec{v}+3\vec{w}=(2,-3,6)_F$.

PS: Em geral, se usarmos $(\vec{x})_E = (M_{EF})(\vec{x})_F$ para obtermos as coordenadas de $\vec{x}$ na base F é necessário resolver um sistema! Se usarmos $(\vec{x})_F = (M_{EF})^{-1}(\vec{x})_E$ não precisamos resolver sistema (lembrando que $(M_{EF})^{-1} = M_{FE}$)!

E.4 Produto escalar

20. Sejam $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base ortonormal de V^3 e

$$\vec{f}_1 = \vec{e}_1, \quad \vec{f}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \quad \vec{f}_3 = \vec{e}_3.$$

   (a) Mostre que $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ uma base de V^3.
   F é ortonormal?

   (b) Sejam $\vec{u} = (1,0,0)_F$ e $\vec{v} = (0,1,0)_F$. Calcule $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

   Resp.: (a) F não é base ortonormal; (b) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 1$

21. Seja E uma base ortonormal de V^3. Calcule $ang(\vec{u}, \vec{v})$, quando:

   (a) $\vec{u} = (1,0,1)_E$ e $\vec{v} = (-2,10,2)_E$

   (b) $\vec{u} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)_E$ e $\vec{v} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{3})_E$

   Resp.: (a) $\theta = \frac{\pi}{2}$; (a) $\theta = \frac{\pi}{6}$

22. Seja E uma base ortonormal de V^3. Obtenha os vetores de norma $3\sqrt{3}$ que são ortogonais aos vetores $\vec{u} = (2,3,-1)_E$ e $\vec{v} = (2,-4,6)_E$.
   Resp.: $\vec{x} = (-3,3,3)_E$ ou $\vec{x} = (3,-3,-3)_E$

23. Sejam $\vec{w}$ um vetor não nulo e T o conjunto dos vetores em V^3 que são ortogonais a $\vec{w}$. prove que:

   (a) $\vec{w} \notin T$;

   (b) Qualquer combinação linear de vetores em T pertence a T;

   (c) Se $\vec{u}, \vec{v} \in T$ são LI, então $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LI;

   (d) Três vetores quaisquer de T são LD;

   (e) Se $\vec{u}, \vec{v} \in T$ são LI, então $\vec{u}, \vec{v}$ geram T, isto é, todo vetor de T é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. T é chamado **plano ortogonal** a $\vec{w}$.

E.4.1 Projeção ortogonal e ortonormalização de Gram-Schimidt

24. Seja E uma base ortonormal.

    (a) Calcule a projeção ortogonal de $\vec{v} = (1, -1, 2)_E$ sobre $\vec{u} = (3, -1, 1)_E$.

    (b) Decomponha $\vec{v} = (-1, -3, 2)_E$ como soma de dois vetores $\vec{p}$ e $\vec{q}$ de modo que $\vec{p}$ seja paralelo a $\vec{u} = (0, 1, 3)_E$ e $\vec{q} \perp \vec{u}$.

    Resp.: (a) $proj_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{6}{11}(3, -1, 1)_E$
    (b) $\vec{p} = proj_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{3}{10}(0, 1, 3)_E$ e $\vec{q} = (-1, -\frac{33}{10}, \frac{11}{10})_E$

25. Sejam, em relação a uma base ortonormal,

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1), \quad \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1), \quad \vec{w} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, 1), \quad \vec{a} = (3, -2, -1).$$

    (a) Prove que $F = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é uma base ortonormal.

    (b) Calcule as coordenadas de $\vec{a}$ na base F.

    Resp.: (b) $\vec{a} = (\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-3}{\sqrt{2}}, \frac{7}{\sqrt{6}})_F$

26. Descreva os vetores $\vec{x}$ tais que $\vec{x} \cdot (\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{\kappa}) = 0$, onde $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\kappa})$ é uma base ortonormal.
    Resp.: $\vec{x}$ é gerado pelos vetores $\vec{\imath} + \vec{\kappa}$ e $\vec{\jmath} + \vec{\kappa}$ e pertence ao plano ortogonal ao vetor $\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{\kappa}$.

27. Sejam E uma base ortonormal e $E_1 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base, onde

$$\vec{e}_1 = (1, 2, 2)_E, \quad \vec{e}_2 = (1, 0, 1)_E, \quad \vec{e}_3 = (1, 1, 1)_E.$$

    Aplique o processo de Gram-Schimidt para obter uma base ortonormal $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\kappa})$ a partir de E_1. (tarefa!)
    Resp.: $\vec{\imath} = \frac{1}{3}(1, 2, 2)_E, \vec{\jmath} = \frac{1}{3}(2, -2, 1)_E, \vec{\kappa} = \frac{1}{3}(2, 1, -2)_E$

28. Determine se as matrizes são ortogonais e no caso afirmativo determine sua inversa.

    (a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $M = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$

Resp.: (a) M não é ortogonal; (b) M é ortogonal, $M^{-1} = M^t$

E.5 Orientação, Produto Vetorial, Produto Misto

29. Seja $E = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\kappa})$ uma base ortonormal positiva.

    (a) Sejam $\vec{u} = (1,2,3)_E$ e $\vec{v} = (-1,1,2)_E$. Calcule $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

    (b) Calcule $(2\vec{\kappa} - \vec{\imath} + 5\vec{\jmath}) \wedge (3\vec{\imath} - 2\vec{\kappa} + \vec{\jmath})$

    (c) Encontre um vetor ortogonal a $\vec{u} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 2\vec{\kappa}$ e $\vec{v} = -\vec{\jmath} + \vec{\kappa}$.

    (d) Mostre que
    $$\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{\kappa}, \quad \vec{\jmath} \wedge \vec{\kappa} = \vec{\imath}, \quad \vec{\kappa} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath}$$
    $$\vec{\jmath} \wedge \vec{\imath} = -\vec{\kappa}, \quad \vec{\kappa} \wedge \vec{\jmath} = -\vec{\imath}, \quad \vec{\imath} \wedge \vec{\kappa} = -\vec{\jmath}.$$

    Resp.: (a) $(1,-5,3)_E$; (b) $(-12,2,-16)_E$; (c) $(0,-1,-1)_E$;

30. Sejam B uma base ortonormal positiva,
    $$\vec{u} = \left(1, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)_B, \quad \vec{v} = (6,-2,4)_B, \quad \vec{w} = \left(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right)_B.$$
    Calcule $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ e $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$.
    Resp.: $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \frac{1}{7}(-10,22,-9)_B$ e $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = -\frac{1}{7}(20,25,39)_B$

Para os exercícios 31 a 33, considere $\mathcal{B}$ uma base ortonormal positiva de V^3

31. Calcule a área do paralelogramo $ABCD$ sendo $\overrightarrow{AB} = (1,1,-1)_B$ e $\overrightarrow{AD} = (2,1,4)_B$.
    Resp.: $\sqrt{27}$

32. Calcule a área do triângulo ABC sendo $\overrightarrow{AB} = (-1,1,0)_B$ e $\overrightarrow{AC} = (0,1,3)_B$.
    Resp.: $\sqrt{19}/2$

33. Sejam $\vec{u} = (1,1,1)_B$ e $\vec{v} = (0,1,2)_B$. Obtenha uma base ortonormal $E = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ tal que

    - $\vec{a}$ e $\vec{u}$ tenham a mesma direção e sentido;
    - $\vec{b}$ seja combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

    Resp.: $\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)_B$, $\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{8}}(-2,0,2)_B$ e $\vec{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)_B$

E.5.1 Produto misto

34. Sendo $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = 6$, calcule $[2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}, -\vec{u} + \vec{v}, \vec{v} - 3\vec{w}]$.
Resp.: 12

35. Seja $E = (\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{\kappa})$ uma base ortonormal positiva. Determine $x \in \mathbb{R}$ de modo que o volume do tetraedro determinado pelos vetores $\vec{u} = (1,1,1)$, $\vec{v} = (2,x,1)$ e $\vec{w} = (0,1,-1)$ seja 1.
Resp.: $x = 9$ ou $x = -3$

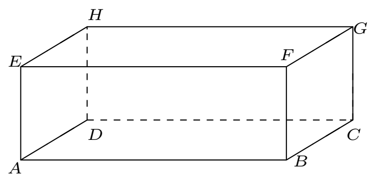
E.6 Retas e Planos

E.6.1 Sistema de coordenadas

36. Considere $ABCDEFGH$ um paralelepípedo como na figura abaixo e $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base de V^3.

(a) Se $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AD}$ e $\vec{e}_3 = \overrightarrow{AE}$, encontre as coordenadas do ponto H no sistema $\Sigma = (F, \mathcal{B})$.

(b) Se $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AC}$ e $\vec{e}_3 = \overrightarrow{AF}$, encontre as coordenadas do ponto H no sistema $\Sigma_1 = (A, \mathcal{B})$.



Resp.: (a) $H = (-1,1,0)_\Sigma$, (b) $H = (-2,1,1)_{\Sigma_1}$

E.6.2 Retas

37. Seja $\Sigma = (O, E)$ um sistema de coordenadas ortogonal em E^3 e considere os pontos $A = (1, 0, 2)$ e $B = (0, 1, 1)$.

    (a) Encontre equações vetorial, paramétricas e simétricas para a reta r que passa pelos pontos A e B.

    (b) O ponto $P = (1, 2, 3)$ pertence à reta r?

    (c) Encontre os pontos de r que são da forma $Q = (x, 2, z)$ e $S = (3, y, z)$

    Resp.: (a)
    $r : (x, y, z) = (1, 0, 2) + \lambda(1, -1, 1),\ \lambda \in \mathbb{R}$ OU $r : (x, y, z) = (0, 1, 1) + \lambda(-1, 1, -1),\ \lambda \in \mathbb{R}$

    $$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \qquad r: \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 1 + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

    $r\colon x - 1 = -y = z - 2;$ $\qquad r\colon -x = y - 1 = 1 - z;$

    (b) $P \notin r$; (c) $Q = (-1, 2, 0)$; $S = (3, -2, 4)$.

E.6.3 Planos

38. Seja $\Sigma = (O, E)$ um sistema de coordenadas ortogonal em E^3 e considere π o plano que contém os pontos $A = (1, 0, 1)_\Sigma$, $B = (2, 1, -1)_\Sigma$ e $C = (1, -1, 0)_\Sigma$.

    (a) Encontre equações vetorial, paramétricas e geral para o plano π

    (b) O ponto $P = (1, 2, 3)$ pertence ao plano π?

    Resp.: (a) $\pi\colon (x, y, z) = (2, 1, -1) + \lambda(1, 1, -2) + \mu(0, -1, -1), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$;

    $$\pi\colon \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + \lambda - \mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ z = -1 - 2\lambda - \mu \end{cases} \qquad \pi\colon 3x - y + z - 4 = 0;\ \text{(b) } P \in \pi$$

39. Sejam um ponto O de E^3 e $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base ortonormal de V^3. Considere o sistema de coordenadas $\Sigma = (O, E)$. Obtenha **equações gerais dos planos coordenados**.
    Resp.: $\pi_1 : z = 0$ (vetores diretores $\vec{e}_1, \vec{e}_2$: **plano** Oxy); $\pi_2 : x = 0$ (vetores

diretores $\vec{e}_2, \vec{e}_3$: **plano** Oyz); $\pi_3 : y = 0$ (vetores diretores $\vec{e}_1, \vec{e}_3$: **plano** Oxz),

40. Obtenha uma equação geral do plano que contém os pontos $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ e $C = (0, 0, 1)$. (Tarefa!)
Resp.: $x + y - 1 = 0$

41. Considere o plano π_1 cujas equações paramétricas são

$$\pi_1 \colon \begin{cases} x = 1 + \lambda + 2\mu \\ y = 2\lambda + \mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \\ z = -\lambda \end{cases}$$

Se π contém o ponto $A = (1, 1, 2)$ e é paralelo ao plano π_1, obtenha as equações paramétricas e uma equação geral do plano π.
Resp.: Eq. paramétricas: $\pi \colon \begin{cases} x = 1 + \lambda + 2\mu \\ y = 1 + 2\lambda + \mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$ Eq. geral: $\pi : x - 2y - 3z + 7 = 0$

42. Encontre vetores diretores e uma equação vetorial do plano

$$\pi \colon 2x + 3y - 6z + 12 = 0.$$

Resp.: $\vec{u} = (0, 2, 1)$ e $\vec{v} = (3, 0, 1)$ são vetores diretores. Uma equação vetorial é $\pi : X = (0, 0, 2) + \lambda(0, 2, 1) + \mu(3, 0, 1)$, $\lambda\mu \in \mathbb{R}$.

43. Descreva os pontos que pertencem à interseção dos planos

$$\pi_1 \colon 2x - y - z - 1 = 0 \quad \text{e} \quad \pi_2 \colon x - y + 2z + 2 = 0.$$

Resp.: todos os pontos que pertencem à reta $r : (3, 5, 0) + \lambda(2, 5, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

E.6.4 Posição relativa entre duas retas

Considere um sistema de coordenadas ortogonal $\Sigma = (O, B)$ de E^3, com B base positiva. As coordenadas dos pontos e as equações de retas são dadas em relação ao sistema Σ.

44. Verifique se as retas dadas na forma paramétrica

$$r\colon \begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = 1 - \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \qquad s\colon \begin{cases} x = 9 - 4\lambda \\ y = 2 + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2 - 2\lambda \end{cases}$$

são concorrentes, paralelas ou reversas. Se concorrentes, encontre o ponto de intersecção.
Resp.: r e s são concorrentes; ponto de intersecção $P = (1, 4, -2)$

45. Considere as retas com equações vetorial $r\colon X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 2, 4)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $s\colon X = (1, 0, -2) + \lambda(-1, -1, -1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Mostre que r e s são concorrentes.

(b) Encontre as coordenadas do ponto de interseção entre elas.

Resp.: (b) $P = (-1, -2, -4)$

E.6.5 Revisão para P1

46. Verdadeiro ou falso?

(a) Se ABC é um triângulo , então $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}$ são LI.

(b) Se $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\kappa})$ é uma base ortonormal, então a coordenada de qualquer vetor $\vec{v}$ na direção $\vec{\imath}$ é igual a $\vec{v} \cdot \vec{\imath}$.

Resp.: (a) Falso; (b) Verdadeiro

47. Sejam $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base e $\vec{u} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{v} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ e $\vec{w} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$. Encontre uma condição necessária e suficiente para que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ seja uma base.
Resp.: $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é base se, e somente se, $a \neq b$, $c \in \mathbb{R}$

48. Sejam $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ duas bases com

$$\vec{f}_1 = \vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad \vec{f}_2 = \vec{e}_2 - \vec{e}_3, \quad \vec{f}_3 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2.$$

Escreva a matriz de mudança da base F para base E, M_{FE}.

Resp.: $M_{FE} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

49. Verdadeiro ou falso? Sejam E e F duas bases de V^3:

    (a) $M_{EF} = (M_{FE})^{-1}$

    (b) $(M_{FE})^{-1} = (M_{FE})^t$ e $\det M_{FE} = \pm 1$

    Resp.: (a) Verdadeiro; (b) Falso

50. Prove que para quaisquer $\vec{u}, \vec{v} \in V^3$:

    (a) $4\,\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u} + \vec{v}\,\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$;

    (b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ se, e somente se, $\|\vec{u} + \vec{v}\,\| = \|\vec{u} - \vec{v}\,\|$;

    (c) os comprimentos das diagonais de um paralelogramo são iguais se, e somente se, o paralelogramo é um retângulo.

    Resp.: (a) use a Equação (P.1.1) ou o fato que $\|\vec{w}\,\|^2 = \vec{w} \cdot \vec{w}$.

51. Seja $E = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\kappa})$ uma base ortonormal positiva.

    (a) Resolva o sistema

$$\begin{cases} \vec{x} \wedge (\vec{\imath} + \vec{\jmath}) = -\vec{\imath} + \vec{\jmath} \\ \vec{x} \cdot (\vec{\imath} + \vec{\jmath}) = 2 \end{cases}$$

    (b) Descreva o conjunto solução da equação $\vec{x} \wedge (\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{\kappa}) = \vec{\imath} - \vec{\kappa}$.

    Resp.: (a) $\vec{x} = (1,1,1)_E$; (b) $\vec{x} = (c, 1-2c, c)$ para qualquer $c \in \mathbb{R}$

52. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores ortogonais e $\vec{w} = \vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v})$. Prove que

$$\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{w}) = \|\vec{u}\,\|^4\, \vec{v}.$$

    Resp.: use Proposição OPv.2.5

53. Prove que

    (a) $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge (\vec{u} - \vec{v}) = 2\,\vec{v} \wedge \vec{u}$.

(b) $\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w}$.

Resp.: use Proposição OPv.2.4 e definição de produto misto.

54. Seja $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\kappa})$ uma base ortonormal positiva.

(a) Decomponha o vetor $\vec{v} = (1, 2, -1)_B$ como soma de dois vetores $\vec{p}$ e $\vec{q}$, de modo que $\vec{p}$ seja paralelo a $\vec{u} = (2, -1, 0)_B$ e $\vec{q}$ seja ortogonal a $\vec{u}$.

(b) $(\vec{p}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ é uma base positiva? e se $\vec{v} = (-1, 1, -1)$?

Resp.: (a) $\vec{p} = \vec{0}$ e $\vec{q} = \vec{v}$; (b) Não é base. Se $\vec{v} = (-1, 1, -1)$, então $(\vec{p}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}) = (-\frac{3}{5}\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ é base negativa.

55. Resolva a equação $(\vec{x} \wedge \vec{a}) \wedge (\vec{x} \wedge \vec{b}) = \vec{c}$, sabendo que $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \neq 0$.

Resp.: Se $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] < 0$, não existe solução. Se $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] > 0$, então $\vec{x} = \pm \frac{1}{\sqrt{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]}} \vec{c}$. **Sugestão:** note que $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ é base; escreva $\vec{x}$ como combinação linear dos elementos dessa base e use a Proposição OPv.2.5

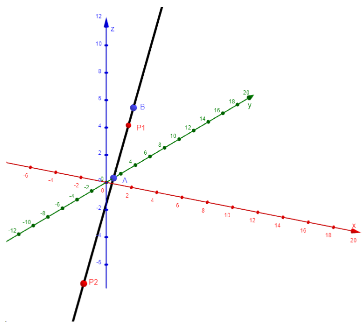
Para os exercícios 56 a 58 considere um sistema de coordenadas ortogonal $\Sigma = (O, B)$ de E^3, com B base positiva. As coordenadas dos pontos e as equações de retas são dadas em relação ao sistema Σ.

56. Escreva as equações paramétricas e simétricas da reta que passa por $A = (2, 0, -3)$ e é paralela a reta

$$\frac{1-x}{5} = \frac{3y}{4} = \frac{z+3}{6}.$$

Resp.: $r : \begin{cases} x = 2 - 15\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = -3 + 18\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$ $\qquad r : \dfrac{2-x}{15} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z+3}{18}.$

57. Sejam $A = (1, 2, 5)$ e $B = (0, 1, 0)$. Determine o(s) ponto(s) P da reta que passa por A e B tal que $\|\overrightarrow{PB}\| = 3\|\overrightarrow{PA}\|$.



Resp.: $P_1 = (\frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \frac{15}{4})$ e $P_2 = (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{15}{2})$

58. Sejam $r : X = (1, 0, 2) + \lambda(2, 1, 3)$ e $s : X = (0, 1, -1) + \lambda(1, m, 2m)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Estude, segundo os valores de m, a posição relativa de r e s.
Resp.: l Se $m = \frac{6}{11}$, então r e s são concorrentes. Se $m \neq \frac{6}{11}$, então r e s são reversas.

E.6.6 Posição relativa entre reta e plano

59. Sejam $r : X = (1, 0, 1) + \lambda(2, 1, 3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ uma reta, π um plano de equação geral $x + y + z = 20$. Qual a posição relativa entre r e π? Se transversais, encontre o ponto de intersecção.
Resp.: r e π são transversais e $P = (7, 3, 10)$ é o ponto de intersecção.

60. Estude a posição relativa da reta r e do plano π dados por (Tarefa!)

$$r\colon \frac{x-1}{2} = y = -z$$

e

$$\pi\colon (x, y\ z)_\Sigma = (3, 0, 1)_\Sigma + \lambda(1, 0, 1)_E + \mu(2, 2, 0)_E, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Resp.: r e π são transversais e $P = (2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ é o ponto de intersecção.

E.6.7 Posição relativa entre dois planos

61. Determine a posição relativa dos planos

$$\pi_1 : x + 2y + 3z - 1 = 0 \quad \text{e} \quad \pi_2 : x - y + 2z = 0.$$

Descreva o conjunto dos pontos pertencentes à intersecção.
Resp.: π_1 e π_2 são transversais; o conjunto dos pontos da intersecção é uma reta cuja uma equação paramétrica é $r\colon \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 - 5\lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}$

62. Encontre uma equação do plano π que contém o ponto $A = (2, 0, 0)$ e a reta de intersecção dos planos $\pi_1 : 3x - 2y - z - 3 = 0$ e $\pi_2 : 2x + y + 4z - 2 = 0$. (Tarefa!)
Resp.: $\pi\colon y + 2z = 0$ (**Sugestão:** usar teoria de feixe de planos.)

E.7 Perpendicularismo, medida angular, distância

E.7.1 Perpendicularismo

63. Seja $\Sigma = (O, B)$ um sistema de coordenadas ortogonal. Obtenha uma equação geral do plano π que contém o ponto $A = (1, 1, 2)$ e que é paralelo ao plano de equação geral $x - y + 2z + 1 = 0$.
Resp.: $x - y + 2z - 4 = 0$

64. Encontre equações paramétricas da reta r que passa pelo ponto $A = (1, 0, -1)$ e é perpendicular à reta $s\colon X = (2, 1, 1) + \lambda(0, 1, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\text{Resp.: } r\colon \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}$$

E.7.2 Medida angular

65. Seja $\Sigma = (O, B)$ um sistema de coordenadas ortogonal. Obtenha equações de reta r que contenha o ponto $P = (1, 1, 1)$, seja concorrente com

$$s : x = 2y = 2z,$$

sabendo que o cosseno da medida angular entre r e s é $1/\sqrt{3}$.
Resp.: $r_1 : X = (1, 1, 1) + \lambda(0, 1, 1)$ e $r_2 : X = (1, 1, 1) + \lambda(-4, 1, 1)$

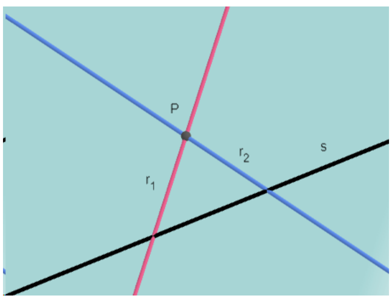


Figura 1: Geogebra

66. Seja $\Sigma = (O, B)$ um sistema de coordenadas ortogonal . Calcule a medida angular entre os planos

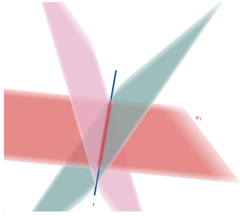
$$\pi_1 : x + y + z = 0, \qquad \pi_2 : X = (1, 0, 0) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(-1, 0, 0), \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Resp.:

67. Encontre uma equação geral do plano que contém a reta

$$r:\begin{cases} x = z+1 \\ y = z-1 \end{cases}$$

e que forma um ângulo de $\frac{\pi}{3}$ radianos com o plano $\pi_1: x+2y-3z+2=0$.
Resp.: $\pi: -3x+y+2z+4=0$ e $\pi: -2x+3y-z+5=0$

Geogebra 

E.7.3 Distância

68. Considere um sistema de coordenadas ortogonal $\Sigma = (O, E)$ fixado em E^3. Sejam $A = (a, b, c)$ e $B = (m, n, p)$ pontos distintos. Verifique que o lugar geométrico dos pontos de E^3 que equidistam de A e B é um plano perpendicular ao segmento AB que contém o seu ponto médio. Esse plano é chamado **plano mediador** de AB.

69. Calcule a distância entre o ponto $P = (1, -1, 4)$ e a reta

$$r: \frac{x-2}{4} = \frac{y}{-3} = \frac{1-z}{2}.$$

Resp.: $d(P, r) = \frac{\sqrt{270}}{\sqrt{29}}$

70. Calcule a distância do ponto $P = (9, 2, 2)$ ao plano

$$\pi: X = (0, -5, 0) + \lambda(0, \frac{5}{12}, 1) + \mu(1, 0, 0), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Resp.: $d(P, \pi) = \frac{94}{13}$

71. Calcule a distância entre as retas

$$r: X = (2, 1, 0) + \lambda(1, -1, 1),\ \lambda \in \mathbb{R}, \qquad s: x+y+z = 2x-y-1 = 0.$$

Resp.: $d(r, s) = \frac{7}{\sqrt{26}}$ (tarefa)

72. Sejam $\Sigma = (O, B)$ um sistema ortogonal de coordenadas onde B é uma base positiva. Considere $A = (0, 2, 1)$ um ponto e a reta $r : X = (0, 2, -2) + \lambda(1, -1, 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

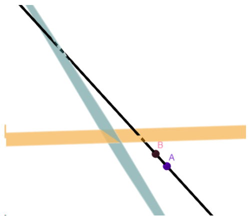
   (a) Obtenha os pontos da reta r que distam $\sqrt{3}$ de A.

   (b) $d(A, r)$ é maior, igual ou menor a $\sqrt{3}$? Por quê?

   Resp.: (a) $P = (1, 1, 0)$; (b) $d(A, r) = \sqrt{3}$, pois P é a projeção ortogonal de A a r (tarefa)

73. Sejam $\Sigma = (O, B)$ um sistema ortogonal de coordenadas onde B é uma base positiva. Obtenha os pontos da reta $r : x-y = 2y = z$ que equidistam de $A = (1, 1, 0)$ e $B = (0, 1, 1)$.
   Resp.: $P = (0, 0, 0)$ (tarefa)

74. Sejam $\Sigma = (O, B)$ um sistema ortogonal de coordenadas onde B é uma base positiva. Obtenha os pontos da reta $r : X = (0, 1, 1) + \lambda(1, 1, 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, que equidistam dos planos $\pi_1 : x + 2y - z - 3 = 0$ e $\pi_2 : x - y + 2z = 1$.
   Resp.: $A = (-\frac{2}{3}.\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$, $B = (-\frac{2}{5}.\frac{3}{5}, \frac{1}{5})$ (tarefa)

   Geogebra 

75. Sejam $\Sigma = (O, B)$ um sistema ortogonal de coordenadas onde B é uma base positiva. Obtenha uma equação geral do plano que contém os pontos $A = (1, 1, 1)$ e $B = (0, 2, 1)$ e equidista dos pontos $C = (2, 3, 0)$ e $D = (0, 1, 2)$.
   Resp.: $\pi_1 : x + y - 2 = 0$ e $\pi_2 : z = 1$ (tarefa) (Wolfram Alpha resolve sistemas)

E.8 Mudança de sistema de coordenadas, translação e rotação

76. Sejam $\Sigma_1 = (O_1, (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3))$ e $\Sigma_2 = (O_2, (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3))$ dois sistemas de coordenadas com

$$O_2 = (1, 0, 0)_{\Sigma_1}, \quad \vec{f}_1 = \vec{e}_1, \quad \vec{f}_2 = -\vec{e}_3, \quad \vec{f}_3 = \vec{e}_2.$$

Obtenha, em relação a Σ_2,

(a) uma equação vetorial da reta $r : [X = (0, 0, 0) + \lambda(0, 1, -1)]_{\Sigma_1}$.

(b) uma equação geral do plano $\pi : [2x - y + z = 0]_{\Sigma_1}$.

Resp.: $r : [X = (-1, 0, 0) + \lambda(0, 1, 1)]_{\Sigma_2}$ e $\pi : [2u - v - w + 2 = 0]_{\Sigma_2}$

E.9 Elipses, hipérboles e parábolas

E.9.1 Elipse

77. Verifique que o centro e os focos da elipse não pertencem à elipse.

78. Se $\overline{PQ}$ é uma corda qualquer da elipse, então $d(P, Q) \leq 2a$.

79. Seja
$$4x^2 + 169y^2 = 676$$
uma equação de uma elipse (em relação a um sistema de coordenadas ortogonal). Calcule

- a distância focal;
- a medida do eixo maior;
- a medida do eixo menor.

Resp.: (a) $2\sqrt{165}$; (b) 26; (c) 4

E.9.2 Hipérbole

80. (Tarefa!) Verifique que o centro e os focos da hipérbole não pertencem à hipérbole.

81. (Tarefa!) Se $\overline{PQ}$ é uma corda qualquer da hipérbole de modo que P e Q pertencem a ramos distintos, então $d(P, Q) \geq 2a$. A igualdade ocorre se, e somente se, P e Q são os vértices da hipérbole.

82. Considere a hipérbole
$$25x^2 - 144y^2 = 9.$$

(a) Escreva as coordenadas dos vértices;

(b) escreva as coordenadas dos focos;

(c) obtenha as equações das assíntotas;

(d) faça um esboço da hipérbole.

Resp.: (a) $A_1 = (-3/5, 0)$, $A_2 = (3/5, 0)$; (b) $F_1 = (-13/20, 0)$, $F_1 = (13/20, 0)$; (c) $y = \pm 5x/12$

83. Considerando o s.c.o $\Sigma = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, classifique e desenhe as curvas cujas equações reduzidas são:

(a) $x^2 + 4y^2 = 4$
(b) $9x^2 + 4y^2 = 1$
(c) $x^2 - 4y^2 = 4$
(d) $9y^2 - x^2 = 9$
(e) $x = 2y^2$
(f) $y = 2x^2$
(g) $y = -\frac{1}{5}x^2$
(h) $x = -\frac{1}{3}y^2$

Resp.: (a) elipse com focos $(\pm\sqrt{3}, 0)$ no eixo-x; (b) elipse com focos $(0, \pm\sqrt{5}/6)$ no eixo-y; (c) hipérbole com focos $(\pm\sqrt{5}, 0)$ no eixo-x; (d) hipérbole com focos $(0, \pm\sqrt{10})$ no eixo-y; (e) parábola com foco $(1/8, 0)$ no eixo-x positivo e $d(F, r) = \frac{1}{4}$; (f) parábola com foco $(0, 1/8)$ no eixo-y positivo e $d(F, r) = \frac{1}{4}$; (g) parábola com foco $(0, -5/4)$ no eixo-y negativo e $d(F, r) = \frac{5}{2}$; (h) parábola com foco $(-3/4, 0)$ no eixo-x negativo e $d(F, r) = \frac{3}{2}$

E.10 Cônicas

84. Determine se é possível transformar g em um polinômio $\tilde{g}$ livre dos termos lineares. No caso afirmativo, encontre $\tilde{g}$.

(a) $g(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2 - 4x - 30y + 175$

(b) $g(x, y) = 7x^2 + 28xy + 28y^2 - 2x - 4y - 1$

Resp.: (a) impossível; (b) $\tilde{g}(u, v) = 7u^2 + 28uv + 28v^2 - \frac{8}{7}$

85. Identifique e esboce as cônicas:

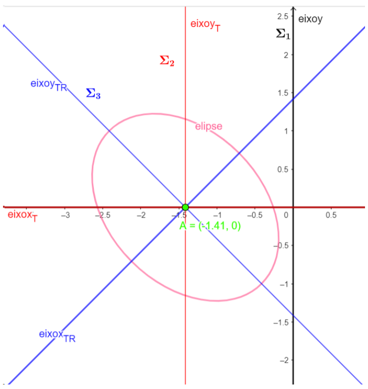
(a) $g(x, y) = 3x^2 + 2xy + 3y^2 + 6\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + 2 = 0$ (tarefa!)

(b) $g(x, y) = 7x^2 + 24xy - 256x - 192y + 1456 = 0$ (tarefa!)

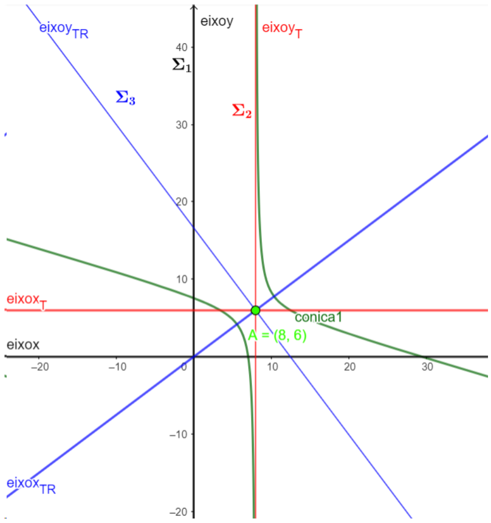
(c) $g(x, y) = 16x^2 - 24xy + 9y^2 - 85x - 30y + 175 = 0$ (ver p. 369-370, Boulos) (tarefa!)

(d) $g(x, y) = x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + 8\sqrt{3}x - 8y + 32 = 0$

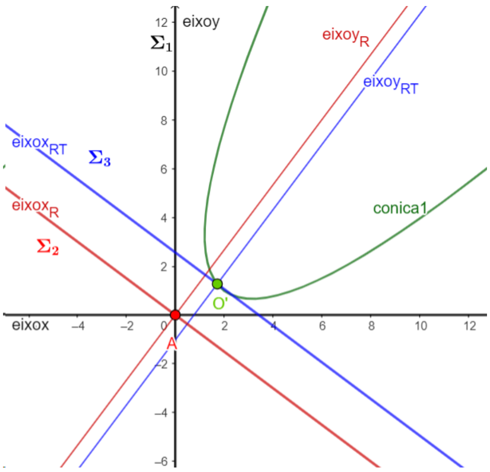
Resp.: (a) elipse (Geogebra-TR), (b) hipérbole, (c) e (d) parábola (Geogebra-RT)



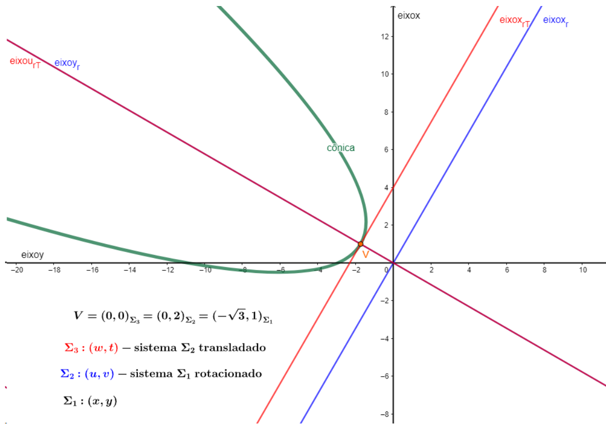
(a)



(b)



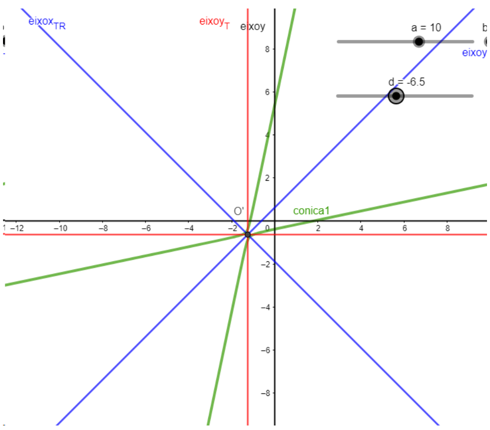
(c)



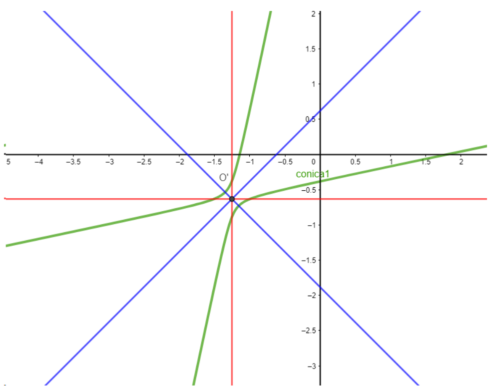
(d)

Geogebra: cônica genérica

Cuidado: a cônica abaixo parece retas concorrentes...



mas é hipérbole!



E.10.1 Retas tangentes, secantes

86. Analise as posições relativas das retas $r : X = (x, y) = (0, k) + \lambda(m, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e da elipse
$$C : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$
Resp.: para $k = 1$ ou $k = -1$, a reta r é tangente a C; para $|k| < 1$, a reta r é secante a C; para $|k| > 1$, a reta r não intercepta C. geogebra

E.11 Quádricas

87. Determine o conjunto que é descrito pela equação
$$x^2 + y^2 + z^2 - \sqrt{3}x - 4y + 8 = 0.$$
Resp.: conjunto vazio

88. Determine o centro C e o raio ρ da esfera de equação
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 15 = 0.$$
Resp.: $C = (1, 2, 0)$ e $\rho = \sqrt{20}$

89. Quantas esferas passam, respectivamente, por 1, 2 e 3 pontos?
Resp.:
por 1 ponto P: infinitas esferas: todos pontos do espaço distintos de P podem ser centro;
por 2 pontos $P \neq Q$: infinitas esferas: todos pontos do plano mediador de $\overline{PQ}$ podem ser centro;
por 3 pontos P, Q, R não colineares: infinitas esferas: todos pontos da reta de intersecção dos planos mediadores de $\overline{PQ}$ e $\overline{PR}$ podem ser centro.

90. Localize o ponto $A = (2, -1, 3)$ em relação à esfera
$$S : x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 2z + 7 = 0.$$
Resp.: A é exterior a S.

91. Obtenha uma equação geral do plano tangente π à esfera S no ponto T, onde
$$S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 1 = 0, \qquad T = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \right).$$
Resp.: $\pi : 4x - y + z + 2 = 0$

92. Identifique as seguintes quádricas (superfícies em E^3):

(a) $x^2 + 4y^2 + 5z^2 = 20$

(b) $x^2 - y^2 + 4z^2 = 4$

(c) $x^2 - y^2 + 4z^2 = -4$

(d) $z = x^2 + 4y^2$

(e) $16z^2 - x^2 - 4y^2 = 0$

(f) $x^2 + 4y^2 = 4$

(g) Para os itens (a), (b) e (d): identifique a curva de intersecção da quádrica com o plano $x = 1$ e determine os vértices e assíntotas de tais curvas (caso existam). Desenhe as curvas no plano Oyz.

Resp.: (a) elipsóide; (b) hiperbolóide de 1 folha (eixo Oy é o eixo distinguido); (c) hiperbolóide de 2 folhas; (d) parabolóide elíptico; (e) cone elíptico; (f) cilindro elíptico;

(g)-(a) elipse $\frac{y^2}{\frac{19}{4}} + \frac{z^2}{\frac{19}{5}} = 1$, vértices: $(1, 0, \pm\sqrt{\frac{19}{5}})$ e $(1, \pm\sqrt{\frac{19}{4}}, 0)$, não possui assíntota

(g)-(b) hipérbole $\frac{z^2}{\frac{4}{3}} - \frac{y^2}{3} = 1$, vértices: $(1, 0, \pm\sqrt{\frac{4}{3}})$, assíntotas $z = \pm\frac{2}{3}y$

(g)-(d) parábola $z = 1 + 4y^2$, vértice: $(1, 0, 1)$, não possui assíntota.

93. Sejam $A = (0, 3, 0)$ e $B = (0, -3, 0)$ dois pontos de E^3. Obtenha uma equação geral do lugar geométrico dos pontos X de E^3 tais que

$$d(X, A) - d(X, B) = m.$$

Note que a equação acima é equivalente a

$$4m^2x^2 + (4m^2 - 144)y^2 + 4m^2z^2 + (36m^2 - m^4) = 0.$$

Identifique o lugar geométrico nos casos:

(a) $m = 2$ (b) $m = 6$ (c) $m = 10$

Resp.: (a) hiperbolóide de duas folhas; (b) reta (eixo Oy); (c) elipsóide

E.12 Coordenadas polares, cilíndricas e esféricas

E.12.1 Coordenadas polares

94. Escreva as coordenadas polares dos pontos dados em coordenadas cartesianas:

(a) $P = (0,1)$
(b) $P = (2,0)$
(c) $P = (0,-1)$
(d) $P = (-3,0)$
(e) $P = (1,1)$

Resp.: (a) $P = (1, \pi/2)$; (b) $P = (2,0)$; (c) $P = (1,\pi)$; (d) $P = (3, 3\pi/2)$; (e) $P = (\sqrt{2}, \pi/4)$

95. Descreva as curvas dadas pelas equações:

(a) $r = 4$
(b) $\theta = \frac{\pi}{3}$
(c) $r = 2\cos\theta$
(d) $r = 1 - \sin\theta$
(e) $r = \cos 2\theta$ (tarefa!)
(f) $r^2 = \sin 2\theta$ (tarefa!)
(g) $r\cos\theta = 2$

Resp.:(a) circunf. de centro (0,0) e raio 2; (b) semi-reta; (c) circunf. centro (1,0) e raio 1; (d) cardióide (Wikipédia); (e) reta $x = 2$; (e) rosa de 4 pétalas; (e) lemminiscata;

E.12.2 Coordenadas cilíndricas

96. Descreva as superfícies dadas pelas equações:

(a) $r = 4$
(b) $\theta = \frac{\pi}{3}$
(c) $\tau = 1$
(d) $r = 2\cos\theta$
(e) $\tau = r^2$
(f) $\tau = r$

Resp.: (a) cilindro de centro (0,0,0) e raio 2; (b) plano de ângulo $\pi/3$ com o plano coordenado Oxz; (c) plano paralelo ao plano coordenado Oxy (d) cilindro circular de centro $(1,0,0)$ e raio 1; (e) parabolóide; (f) cone (com $z > 0$)

E.12.3 Coordenadas esféricas

97. Descreva as superfícies dadas pelas equações:

(a) $\rho = 4$
(b) $\theta = \frac{\pi}{3}$
(c) $\varphi = \frac{\pi}{4}$
(d) $\varphi = \frac{\pi}{2}$
(e) $\varphi = \frac{4\pi}{5}$

Resp.: (a) esfera de centro (0,0,0) e raio 2; (b) plano de ângulo $\pi/3$ com o plano coordenado Oxz; (d) cone (com $z > 0$); (e) plano Oxy; (f) cone (com $z < 0$)

E.13 Revisão para P2

98. Faça os exercícios que foram deixados como tarefa: 60, 62, 71–75, 80, 81, 85a–85c.

99. O plano π é determinado pelas retas $r : x + z = 5 = y + 4$ e $s : X = (4, 1, 1) + \lambda(4, 2, -3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Obtenha equações gerais dos planos que distam 2 de π.
Resp.: $\pi : 2x - y + 2 - 9 = 0$. Os planos que distam 2 de π são: $2x - y + 2z - 15 = 0$ e $2x - y + 2z - 3 = 0$.

100. Seja C a cônica de equação geral $x^2-2xy+y^2-10x-6y+25 = 0$. Identifique a cônica e, quando for o caso, obtenha seus parâmetros geométricos (a, b, c ou p) e determine, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal inicial, os elementos geométricos principais: centro, focos, vértices, assíntotas, eixos, diretriz, etc.
Resp.: parábola $w^2 = 4\sqrt{2}t$, com parâmetro $p = \sqrt{2}$. No sistema inicial: foco $F = (3, 2)$; vértice $V = (2, 1)$, diretriz $r : x + y = 1$, eixo de simetria $s : x - y = 1$.

101. Identifique, em cada caso, o lugar geométrico dos pontos X de E^3 tais que $d(X, A) + d(X, B) = m$.
    (a) $A = (1, 0, 0)$, $B = (-1, 0, 0)$, $m = 2$;
    (b) $A = (2, 0, 2)$, $B = (2, 0, 0)$, $m = 1$.

    Resp.: (a) eixo Ox; (b) hiperbolóide de 2 folhas

102. Faça uma mudança de coordenadas conveniente para concluir que a quádrica $\Omega : z = xy$ é um parabolóide hiperbólico (sela) e faça seu esboço.
Resp.: $\begin{cases} x = -\frac{u}{a} + \frac{v}{b} \\ y = \frac{u}{a} - \frac{v}{b} \\ z = w \end{cases}$ (se $a = b = \sqrt{2}$, uma rotação de ângulo $\theta = \frac{3\pi}{4}$)
use Geogebra-sela para verificar seu esboço

103. Sendo $\Omega : 2x^2 - y^2 + 4z^2 = 1$, determine os planos paralelos aos planos coordenados que interceptam Ω em uma cônica de distância focal $\sqrt{6}$.
Resp.: os planos são $x = \pm\frac{11}{10}$, $y = \pm\sqrt{5}$, $z = 0$ e $z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

104. Sejam $E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ uma elipse e $H : \frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1$ uma hipérbole confocais (isto é, que possuem os mesmos focos). Verifique que:

(a) $E \cap H$ contém exatamente quatro pontos;

(b) Em cada ponto T da intersecção $E \cap H$, a elipse e a hipérbole se interceptam ortogonalmente, isto é, as retas tangentes às curvas em T são perpendiculares.

Dica: (a) escreva o sistema que um ponto $X = (x, y) \in E \cap H$ deve satisfazer e verifique que as curvas serem confocais implica $a^2 - b^2 = m^2 - n^2$

Fim do curso! *Bons estudos!*

Boas Férias!