SMA0300 Geometria Analítica
Sexta Lista de Exercícios – Equações de planos

Nos exercícios abaixo, considere fixado um sistema de coordenadas ortogonal $\Sigma = (O, C)$ do espaço $\mathbb{R}^3$. Isto é, um ponto $P \in \mathbb{R}^3$ é representado por uma terna $P = (x, y, z)$, significando que $P = O + (x, y, z)_{\mathcal{C}}$, onde "+"denota a soma de ponto com vetor e $\mathcal{C}$ é a base canônica de V^3 (base ortonormal positivamente orientada). As equações de retas e planos são dadas em relação a este sistema.

Exercício 1. Escreva equações vetorial e paramétricas para os planos:
(a) que passa por $A = (1, 1, 0)$ e $B = (1, -1, -1)$ e é paralelo ao vetor $\vec{v} = (2, 1, 0)$.
(b) que passa por $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, 1, -1)$ e $C = (1, -1, 0)$.

Exercício 2. Escreva equações paramétricas da reta interseção dos planos $\pi_1 : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = -2 \\ z = -\lambda - \mu \end{cases}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
e $\pi_2 : X = (1, 0, 3) + \lambda(1, 2, 0) + \mu(-1, 1, -1)$.

Exercício 3. Encontrar uma equação vetorial e equações paremétricas do plano π que passa pelos pontos $P_1 = (1/2, 0, 0)$ $P_2 = (0, 1/2, 0)$ e $P_3 = (0, -1/2, 1/2)$.

Exercício 4. Mostre que o ponto $P = (4, 1, -1)$ não pertence à reta $r : X = (2, 4, 1) + \lambda(1, -1, 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, e obtenha uma equação geral do plano determinado por r e P.

Exercício 5. (a) Faça um esboço da representação geométrica dos planos cujas equações gerais são dadas por:

$$(i)\, x = 2 \quad (ii)\, y + 1 = 0 \quad (iii)\, z + 4 = 0 \quad (iv)\, x - z = 0 \quad (v)\, 2x + 3y + 4z - 12 = 0.$$

Sugestão: Para o caso (v), facilita o esboço se você marcar nos eixos coordenados os 3 pontos em que este plano os intercepta.
(b) Dê a equação paramétrica para cada um dos três planos coordenados.
(c) Dê a equação geral para cada um dos três planos coordenados.

Exercício 6. Encontre uma equação geral, uma vetorial e uma paramétrica do plano que contém as retas r e s cujas equações na forma simétrica são dadas por $r : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{2} = z$ e $s : x - 1 = y = z$.

Exercício 7. Obtenha um vetor normal ao plano π em cada caso:
(a) π contém $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 0, 1)$ e $C = (1, 2, 3)$.
(b) $\pi : X = (1, 2, 0) + \lambda(1, -1, 1) + \mu(0, 1, -2)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
(c) $\pi : x - 2y + 4z + 1 = 0$.

Exercício 8. Sendo o vetor $\vec{\eta} = (2, 1, -1)_E$ um vetor normal ao plano π que passa pelo ponto $A = (1, 2, 2)_\Sigma$, escrever as equações paramétricas de π.

Gabarito

- Exercício 1: a) $\pi_1 : X = (1, 1, 0)_\Sigma + \mu(0, -1, -2)_C + \lambda(2, 1, 0)_C, \ \mu, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\pi_1 : \begin{cases} x = 1 + 2\mu \\ y = -1 - 2\lambda + \mu \\ z = -\lambda \end{cases}, \ \mu, \lambda \in \mathbb{R}.$$

  b) $\pi_2 : X = (1, 0, 1)_\Sigma + \mu(1, 1, -2)_C + \lambda(0, -1, -1)_C, \ \mu, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\pi_2 : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda - \mu \\ z = 1 - 2\lambda - \mu \end{cases}, \ \mu, \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Exercício 2: $r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 \\ z = 3 + \frac{2}{3}\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

- Exercício 3: $\pi : X = (1/2, 0, 0)_\Sigma + \mu(-1/2, -1/2, 1/2)_C + \lambda(-1/2, 1/2, 0)_C,\ \ \mu, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\pi : \begin{cases} x = 1/2 - \lambda/2 - \mu/2 \\ y = \lambda/2 - \mu/2 \\ z = \mu/2 \end{cases},\ \ \mu, \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Exercício 4: $\pi : 8x + 6y - z - 39 = 0$

- Exercício 5: b) $\pi_{xy} : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 0 \end{cases},\ \mu, \lambda \in \mathbb{R}$, $\pi_{xz} : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \mu \end{cases},\ \mu, \lambda \in \mathbb{R}$, $\pi_{yz} : \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases},\ \mu, \lambda \in \mathbb{R}$. c) $\pi_{xy} : z = 0$, $\pi_{xz} : y = 0$, $\pi_{yz} : x = 0$.

- Exercício 6: $\pi : X = (1, 0, 0) + \lambda(2, 2, 1) + \mu(1, 1, 1), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

  $\pi : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda + \mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = \lambda + \mu \end{cases},\ \ \mu, \lambda \in \mathbb{R}$,

  $\pi : x - y - 1 = 0.$

- Exercício 7: a) (2,0,0) b) (1,2,1) c) (1,-2,4)

- Exercício 8: $\pi : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \mu \\ z = 2 + 2\lambda + \mu \end{cases},\ \ \mu, \lambda \in \mathbb{R}$,