## SMA0300 Geometria Analítica
## Quarta Lista de Exercícios – Produto escalar, Produto vetorial e Produto Misto

Nos exercício 1 a 12, $\mathbf{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é uma base ortonormal de $V^3$ e as coordenadas de vetores estão expressos nesta base $\mathbf{E}$.

Nos exercício 13 a 26, $\mathbf{C} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ é a base canônica (ortonormal e positivamente orientada segundo a regra da mão direita) de $V^3$ e as coordenadas de vetores estão expressos nesta base $\mathbf{C}$.

O produto vetorial é comumente denotado por $\wedge$ ou $\times$.

**Exercício 1.** Sabendo que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$, $\|\vec{u}\| = 3/2$, $\|\vec{v}\| = 1/2$, $\|\vec{w}\| = 2$, calcule $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{u}$.

**Exercício 2.** Demonstrar que a soma dos quadrados dos comprimentos das diagonais de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos quatro lados; em outras palavras, provar que $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\,\|\vec{u}\|^2 + 2\,\|\vec{v}\|^2$.

**Exercício 3.** (a) Prove que $\|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w})$, quaisquer que sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

(b) Dados os vetores não nulos $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, sejam $\alpha = \text{ang}(\vec{u}, \vec{v})$, $\beta = \text{ang}(\vec{u}, \vec{w})$, $\gamma = \text{ang}(\vec{v}, \vec{w})$. Prove que $-3/2 \leq \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq 3$.

(c) Supondo, no item anterior, que $\alpha = \beta = \gamma$, verifique se $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é base.

**Exercício 4.** Considere os vetores $\vec{u} = (1, 2, -3)$ e $\vec{v} = (2, 1, -2)$.

1. Determine um vetor unitário e paralelo ao vetor $\vec{u} + \vec{v}$.
2. Determine o cosseno do ângulo formado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

**Exercício 5.** Os vetores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ formam ângulo de $\frac{\pi}{3}$ radianos. Se $\|\vec{x}\| = 1$, $\|\vec{y}\| = 2$, $\vec{u} = \vec{x}+2\vec{y}$ e $\vec{v} = 2\vec{x}-\vec{y}$, determine o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

**Exercício 6.** Sejam os vetores $\vec{u} = (2, m, -1)$, $\vec{v} = (3, 1, -2)$ e $\vec{w} = (2m - 1, -2, 4)$. Determine $m$ de modo que $\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} + \vec{w})$.

**Exercício 7.** Determine o vetor $\vec{v}$, paralelo ao vetor $\vec{u} = (2, -1, 3)$, tal que $\vec{v} \cdot \vec{u} = -42$.

**Exercício 8.** Dados os vetores $\vec{u} = (1, 2, -3)$, $\vec{v} = (2, 0, 1)$ e $\vec{w} = (3, 1, 0)$, determine o vetor $\vec{x}$ tal que $\vec{x} \cdot \vec{u} = -16$, $\vec{x} \cdot \vec{v} = 0$ e $\vec{x} \cdot \vec{w} = 3$.

**Exercício 9.** Calcule $\|2\vec{u} + 4\vec{v}\|^2$, sabendo que $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 2$ e a medida em radianos do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\frac{2\pi}{3}$.

**Exercício 10.** Decomponha o vetor $\vec{v} = (-1, -3, 2)$ como soma de dois vetores $\vec{p}$ e $\vec{q}$, de modo que $\vec{p}$ seja paralelo e $\vec{q}$ seja ortogonal a $\vec{u} = (0, 1, 3)$.

**Exercício 11.** Determine um vetor $\vec{r}$ com norma $\sqrt{5}$ tal que $\vec{r}$ seja ortogonal a $(2, 1, -1)$ e tal que os vetores $\vec{r}$, $(1, 1, 1)$, $(0, 1, -1)$ sejam coplanares.

**Exercício 12.** Um vetor $\vec{v}$ forma com os vetores $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$ ângulos de $\dfrac{\pi}{3}$ e $\dfrac{2\pi}{3}$ radianos, respectivamente. Determine as coordenadas do $\vec{v}$, em relação à base $\mathbf{E}$, sabendo que $\|\vec{v}\| = 2$.

**Exercício 13.** Sejam

$$\vec{u} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}),\ \ \vec{v} = (-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}),\ \ \vec{w} = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

(i) Prove que $\mathbf{F} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é uma base ortonormal positiva.

(ii) Calcule a área do triângulo determinado pelos vetores $2\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$.

(iii) Determine a projeção ortogonal do vetor $3\vec{u}+5\vec{v}$ sobre o vetor $2\vec{u}$.

**Exercício 14.** Sejam os vetores $\vec{u}=(3\,,1\,,-1)$ e $\vec{v}=(a\,,0\,,2)$. Calcule o valor de $a\in\mathbb{R}$, para que a área do paralelogramo determinado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ seja igual a $2\sqrt{6}$.

**Exercício 15.** Sabendo que a medida em radianos do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\pi/6$, e que $\|\vec{u}\|=1$, $\|\vec{v}\|=7$, calcule $\|\vec{u}\times\vec{v}\|$ e $\|\frac{1}{3}\vec{u}\times\frac{3}{4}\vec{v}\|$.

**Exercício 16.** Ache um vetor unitário ortogonal a $\vec{u}=(1,-3,1)$ e a $\vec{v}=(-3,3,3)$.

**Exercício 17.** Sabe-se que $\vec{u}$ é ortogonal a $(1,1,0)$ e a $(-1,0,1)$, tem norma $\sqrt{3}$ e, sendo $\theta$ a medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $(0,1,0)$ tem-se $\cos\theta>0$. Ache $\vec{u}$.

**Exercício 18.** Calcule o volume do tetraedro $ABCD$ onde $\vec{AB}=(1,1,0)$, $\vec{AC}=(0,1,1)$ e $\vec{AD}=(-4,0,0)$.

**Exercício 19.** Calcule a área do triângulo $ABC$ onde $\vec{AC}=(-1,1,0)$ e $\vec{AB}=(0,1,3)$.

**Exercício 20.** Dados os vetores $\vec{u}=(0\,,1\,,-1)$, $\vec{v}=(2\,,-2\,,-2)$ e $\vec{w}=(1\,,-1\,,2)$, determinar as coordenadas do vetor $\vec{t}$ que seja paralelo ao vetor $\vec{w}$ e que satisfaça $\vec{t}\wedge\vec{u}=\vec{v}$.

**Exercício 21.** Dados os vetores $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$ e $\vec{v}=4\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$.
a) Calcule $\vec{u}\wedge\vec{v}$
b) Calcule o seno do ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

**Exercício 22.** Sejam $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ vetores de $V^3$, tais que $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|=3$, $\|\vec{w}\|=6$ e $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}$. Calcule $\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}+\vec{v}\wedge\vec{w}$.

**Exercício 23.** Suponha que os vetores $\vec{u},\vec{v},\vec{w},\vec{t}$ de $V^3$ verificam as relações $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{w}\wedge\vec{t}$ e $\vec{u}\wedge\vec{w}=\vec{v}\wedge\vec{t}$. Prove que os vetores $\vec{u}-\vec{t}$ e $\vec{v}-\vec{w}$ são L.D.

**Exercício 24.** Se os vetores $\vec{u},\vec{v}$ são L.I. em $V^3$ e o vetor $\vec{w}$ satisfaz $\vec{w}\wedge\vec{u}=\vec{w}\wedge\vec{v}=\vec{0}$, mostre que $\vec{w}=\vec{0}$.

**Exercício 25.** Resolva o seguinte sistema na incógnita $\vec{x}$

$$\begin{cases} \vec{x}\cdot(2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}) &= 9 \\ \vec{x}\wedge(-\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}) &= -2\vec{i}+2\vec{k} \end{cases}$$

**Exercício 26.** Prove que, qualquer que seja o vetor $\vec{v}$, vale a seguinte igualdade:

$$\|\vec{v}\wedge\vec{i}\|^2+\|\vec{v}\wedge\vec{j}\|^2+\|\vec{v}\wedge\vec{k}\|^2=2\|\vec{v}\|^2.$$

**GABARITO**

- Exercício 1: $\dfrac{13}{4}$
- Exercício 4: 1) $-\dfrac{\sqrt{43}}{43}(3,3,-5)$ 2) $\dfrac{\sqrt{14}}{3}$
- Exercício 5: $cos(ang(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}))=\dfrac{13}{2\sqrt{21}}$
- Exercício 6: $m=4$ ou $m=-4$
- Exercício 7: $\overrightarrow{v}=(-6,3,-9)$
- Exercício 8: $\overrightarrow{x}=(-22,69,44)$
- Exercício 9: 52.
- Exercício 10: $\overrightarrow{p}=(0,\dfrac{3}{10},\dfrac{9}{10})$ e $\overrightarrow{q}=(-1,\dfrac{-33}{10},\dfrac{11}{10})$

- Exercício 11: $\overrightarrow{r} = \pm(1, 0, 2)$
- Exercício 12: $\overrightarrow{v} = 1, -1)_E$
- Exercício 13: ii) 3/2, iii) $3\overrightarrow{u}$
- Exercício 14: $a = -6 \pm 2\sqrt{5}$
- Exercício 15: 7/2 e 7/8.
- Exercício 16: $-\dfrac{\sqrt{6}}{6}(2, 1, 1)$
- Exercício 17: $\overrightarrow{u} = (-1, 1 - 1)$
- Exercício 18: 2/3
- Exercício 19: $\dfrac{\sqrt{19}}{2}$.
- Exercício 20: $\overrightarrow{t} = (-2, 2 - 4)$
- Exercício 21: a) $(-4, 4, 10)$ b) $\sqrt{\dfrac{44}{119}}$
- Exercício 22: $\overrightarrow{0}$
- Exercício 25: $\overrightarrow{x} = (1, 1, 1)$