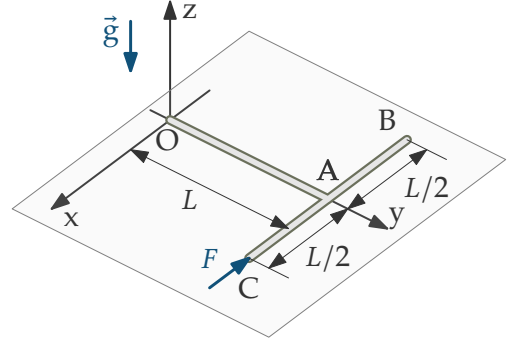




## PME 3100 – MECÂNICA I – Reoferecimento 2024 – Prova Substitutiva – 25 de Junho de 2024

Instruções gerais e formulário estão disponíveis na folha de respostas.

**Questão 1 (3,0 pontos).** A figura mostra uma peça rígida e homogênea OABC em formato de T, composta por duas barras delgadas iguais, de comprimento  $L$  e massa  $m$  cada, soldadas uma à outra. A peça encontra-se em repouso, apoiada sobre o plano horizontal Oxy, podendo movimentar-se livremente, sem atrito. Em um determinado instante, uma força  $\vec{F} = -F\vec{i}$  ortogonal à barra e paralela à superfície é aplicada no ponto C. Para o instante imediatamente após a aplicação da força e considerando-se o sistema de coordenadas Oxyz, de versores  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , determine em função dos parâmetros dados:

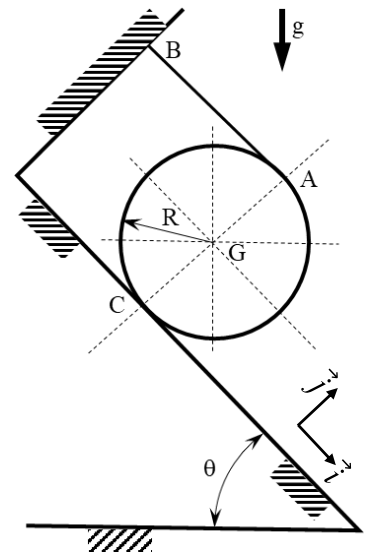


Dica: para a solução do item (f), utilize o resultado da equação vetorial  $\vec{x} \wedge \vec{u} = \vec{v} \Rightarrow \vec{x} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{v}}{|\vec{u}|^2}$ .

- (0,5) o diagrama de corpo livre da peça;
- (0,25) o vetor posição (G – O) do centro de massa G da peça;
- (0,75) o momento de inércia  $J_{Gz}$  e os produtos de inércia  $J_{Gxz}$  e  $J_{Gyz}$  da peça;
- (0,5) a aceleração  $\vec{a}_G$  do centro de massa G da peça;
- (0,5) a aceleração angular  $\vec{\alpha}$  da peça;
- (0,5) o vetor posição (P – G) do ponto P da peça para o qual a aceleração é nula no instante considerado.

**Questão 2 (3,5 pontos).** No sistema ilustrado na figura, um fio flexível ideal foi enrolado no disco de massa  $m$  e raio  $R$ . O disco está instalado no plano inclinado de um ângulo  $\theta$ . Ele é liberado a partir do repouso e começa a se mover vencendo o atrito com o plano inclinado, desenrolando o fio. O coeficiente de atrito no contato do disco com o plano é  $\mu$ . Pede-se:

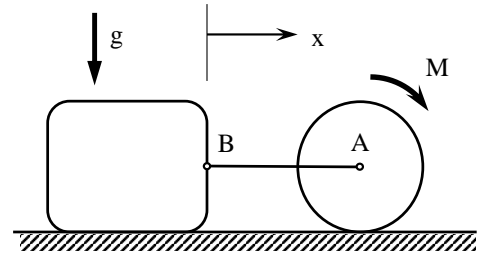
- (0,5) desenhar o diagrama de corpo livre do disco;
- (0,25) determinar a posição do CIR do disco;
- (0,25) calcular a aceleração do centro de massa do disco supondo conhecida a sua aceleração angular;
- (1,0) aplicar o Teorema da Resultante (TR) e o Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA) ao disco;
- (0,5) calcular a aceleração angular do disco;
- (0,5) calcular a força de tração no fio;
- (0,5) calcular qual deve ser a inclinação mínima do plano inclinado para que haja movimento, em função do coeficiente de atrito no contato.





**Questão 3 (3,5 pontos).** O sistema da figura é formado por um disco homogêneo de massa  $m_A$  e raio  $R$  unido ao bloco de massa  $m_B$  por uma barra de massa desprezível bi-articulada. O disco rola sem escorregar. Sobre ele é aplicado um binário  $M$  conforme indicado. O coeficiente de atrito entre o bloco e o piso é  $\mu$ . Sabendo que o sistema parte do repouso, pede-se, para um deslocamento  $x$  do bloco:

- (0,5) a energia cinética do sistema em função da velocidade do bloco;
- (1,0) os DCLs do bloco e do disco;
- (1,0) o trabalho dos esforços atuantes no sistema em função da posição  $x$  do bloco;
- (0,5) a velocidade do bloco em função da posição  $x$  do mesmo;
- (0,5) a aceleração do bloco.





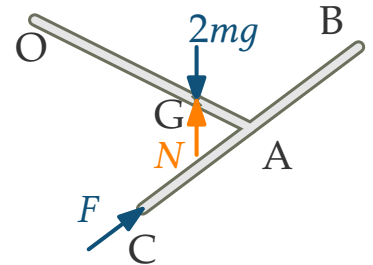
**Resolução comentada**

**Questão 1 (3,5 pontos)**

a) Veja figura ao lado.

(0,5) para o diagrama correto e (0,0) para o diagrama incorreto.

b) Cada barra tem massa  $m$  e centros de massa  $(G_{OA} - O) = \frac{L}{2}\vec{j}$  e  $(G_{BC} - O) = L\vec{j}$ . Assim:



$$(G - O) = \frac{m(G_{OA} - O) + m(G_{BC} - O)}{m + m} = \frac{m\left(\frac{L}{2}\vec{j}\right) + m(L\vec{j})}{2m} \Rightarrow \boxed{(G - O) = \frac{3L}{4}\vec{j}}$$

(0,25) para a componente correta.

c) Considerando que a peça é constituída por duas barras rígidas e homogêneas, o momento de inércia  $J_{Gz}$  e os produtos de inércia  $J_{Gxz}$  e  $J_{Gyz}$  da peça são calculados, como segue:

$$J_{Gz} = \left[ \frac{mL^2}{12} + m\left(\frac{L}{4}\right)^2 \right] + \left[ \frac{mL^2}{12} + m\left(\frac{L}{4}\right)^2 \right] \Rightarrow \boxed{J_{Gz} = \frac{7mL^2}{24}}$$

$$J_{Gxz} = (0 + mx_{G_{OA}}z_{G_{OA}}) + (0 + mx_{G_{BC}}z_{G_{BC}}) = (0 + m00) + (0 + m00) \Rightarrow \boxed{J_{Gxz} = 0}$$

$$J_{Gyz} = (0 + my_{G_{OA}}z_{G_{OA}}) + (0 + my_{G_{BC}}z_{G_{BC}}) = (0 + m00) + (0 + m00) \Rightarrow \boxed{J_{Gyz} = 0}$$

(0,25) por cada resposta correta.

d) Aplicando o TMB à peça:

$$2m\vec{a}_G = -F\vec{i} + (N - 2mg)\vec{k} = 2m(a_{G_x}\vec{i} + a_{G_y}\vec{j}) \Rightarrow \begin{cases} a_{G_x} = \frac{-F}{2m} \\ a_{G_y} = 0 \\ N = 2mg \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_G = \left(\frac{-F}{2m}\right)\vec{i}}$$

(0,3) para a aplicação correta do TMB e (0,2) para o cálculo correto da aceleração do centro de massa.

e) Aplicando o TQMA à peça, com polo em G:

$$\vec{M}_G = (J_{Gz}\alpha)\vec{k} \Rightarrow \left(\frac{FL}{4}\right)\vec{k} = (J_{Gz}\alpha)\vec{k} \Rightarrow \boxed{\vec{\alpha} = \left(\frac{6F}{7mL}\right)\vec{k}}$$

(0,3) para a aplicação correta do TQMA e (0,2) para o cálculo correto da aceleração angular da peça.

f) Aplicando a expressão do campo de acelerações para a peça, tem-se:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_G + \vec{\alpha} \wedge (P - G) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - G)], \quad \vec{\omega} = \vec{0} \quad (\text{parte do repouso})$$

$$0 = \left(\frac{-F}{2m}\right)\vec{i} + \left(\frac{6F}{7mL}\right)\vec{k} \wedge (P - G) \Rightarrow \boxed{(P - G) = \left(\frac{-7L}{12}\right)\vec{j}}$$

(0,2) pela aplicação correta da equação do campo de acelerações e (0,3) pela resposta correta.



**Questão 2 (3,0 pontos)**

a) Veja figura ao lado. (0,5)

b)  $\boxed{\text{CIR} \equiv A} \Rightarrow \vec{v}_A = \vec{0}$  (0,25)

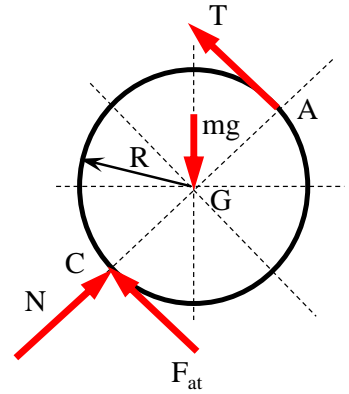
c)  $\vec{v}_G = \vec{v}_A + \omega \vec{k} \wedge (-R\vec{j}) = \omega R\vec{i} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_G = \dot{\omega} R\vec{i}}$  (0,25)

d) Aplicando o TMB ao disco: (0,5)

$$\boxed{m\vec{a}_G = (mg \sin \theta - T - F_{at})\vec{i} + (N - mg \cos \theta)\vec{j}}$$

$$m\dot{\omega}R = mg \sin \theta - T - F_{at}$$

$$0 = N - mg \cos \theta$$



Como o disco escorrega em relação ao piso:  $\boxed{F_{at} = \mu N = \mu mg \cos \theta}$

Aplicando o TQMA ao disco, com polo em G: (0,5)

$$\dot{H}_G = \vec{M}_G, \quad \vec{H}_G = J_{Gz}\omega\vec{k}, \quad \dot{H}_G = \frac{mR^2}{2}\dot{\omega}\vec{k}, \quad \vec{M}_G = (T - F_{at})R\vec{k}$$

$$\frac{mR^2}{2}\dot{\omega}\vec{k} = (TR - \mu mgR \cos \theta) \Rightarrow mR\dot{\omega} = 2T - 2\mu mg \cos \theta$$

e-f) Das expressões acima:

$$\boxed{\dot{\omega} = \frac{2g}{3R}(\sin \theta - 2\mu \cos \theta)}$$
 (0,5)

$$\boxed{T = \frac{mg}{3}(\sin \theta + \mu \cos \theta)}$$
 (0,5)

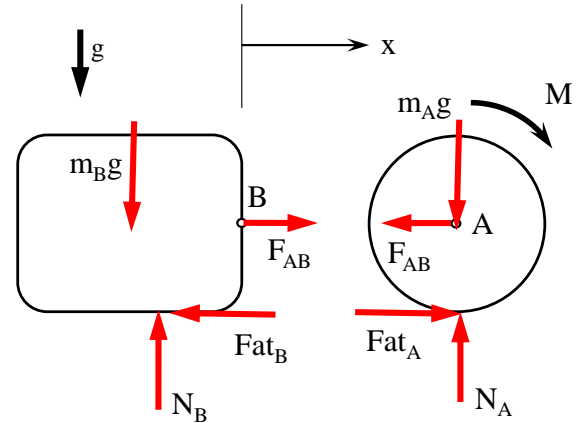
g) Condição para que ~~não~~ haja movimento:  $\dot{\omega} > 0 \Rightarrow \boxed{\tan \theta > 2\mu}$  (0,5)

**Questão 3 (3,5 pontos)**

a) Energia cinética do sistema:

$$T = \frac{m_A v_A^2}{2} + \frac{J_{Az}}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{m_B v_B^2}{2}$$
$$x = \theta R, \quad J_{Az} = \frac{m_A R^2}{2}, \quad v_A = v_B = \dot{x} = \dot{\theta} R$$

$$T = \frac{1}{4} (3m_A + 2m_B) \dot{x}^2 \quad (0,5)$$



b) Veja figura ao lado. (0,5 + 0,5)

c) Trabalho dos esforços atuantes no sistema:

$$W_{\text{pesoA}} = W_{\text{pesoB}} = W_{\text{normais}} = W_{\text{FatA}} = W_{\text{Finternas}} = 0$$

Bloco escorrega:  $Fat_B = \mu N_B = \mu m_B g$ . Portanto:

$$W = M\theta - \mu m_B g x \Rightarrow W = \left( \frac{M}{R} - \mu m_B g \right) x \quad (0,5 + 0,5)$$

d) Aplicando o TEC ao sistema:

$$W = \Delta T \Rightarrow \frac{1}{4} (3m_A + 2m_B) \dot{x}^2 = \left( \frac{M}{R} - \mu m_B g \right) x \Rightarrow \dot{x} = \sqrt{\frac{4 \left( \frac{M}{R} - \mu m_B g \right)}{3m_A + 2m_B}} x \quad (0,5)$$

e) Derivando a expressão de  $\dot{x}$  em relação ao tempo:

$$\ddot{x} = \frac{2 \left( \frac{M}{R} - \mu m_B g \right)}{3m_A + 2m_B} \quad (0,5)$$