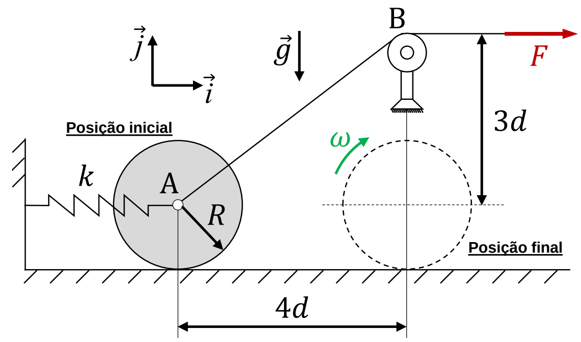
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

**PME 3100 – MECÂNICA I – Reoferecimento 2024 – Prova P3 – 18 de Junho de 2024**

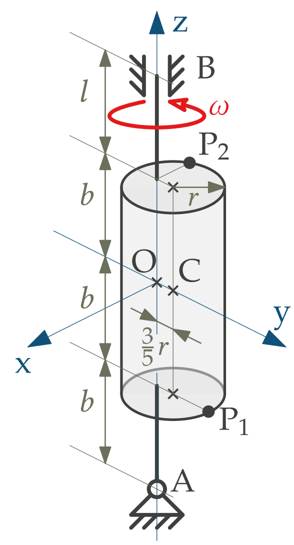
*Instruções gerais e formulário estão disponíveis na folha de respostas.*

**Questão 1 (3,5 pontos)**. Um disco rígido e homogêneo de raio $R$ de massa $m$, rola sem escorregar sobre um plano horizontal, conforme mostrado na figura. O disco está conectado a uma mola de rigidez $k$ que está distendida de $\delta_0 = d$ na posição inicial, onde o disco é liberado a partir do repouso. Uma força horizontal constante de magnitude $F$ puxa o disco por meio de um fio ideal acoplado a uma polia de massa desprezível que não oferece resistência ao movimento do fio. Admitindo que a direção da força $F$ permanece na horizontal durante todo o movimento do disco, pede-se:



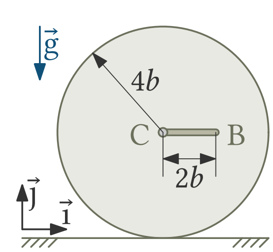

**a)** O diagrama de corpo livre do disco para uma posição genérica entre sua posição inicial e final;
**b)** A variação da energia cinética do disco entre as posições inicial e final, em função de sua velocidade angular $\omega$;
**c)** O trabalho realizado pelas forças aplicadas ao disco entre as posições inicial e final;
**d)** A velocidade angular $\omega$ do disco na posição final.

**Questão 2 (3,0 pontos)**. A figura ilustra um corpo rígido único de massa total $6m$, constituído por um cilindro rígido e homogêneo de centro C, raio $r$, comprimento $2b$ e massa $4m$, e por duas partículas materiais $P_1$ e $P_2$, cada uma de massa $m$. O corpo é preso a um eixo AOB, de massa desprezível, vinculado a uma base fixa por meio de uma articulação ideal em A e um anel ideal em B. O eixo AOB é paralelo ao eixo central do cilindro, distando $\frac{3}{5}r$ deste. O sistema de coordenadas Oxyz é solidário ao corpo. Admitindo que o corpo gire em torno do eixo AOB com velocidade angular $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$ constante, e sabendo que $(P_1 - O) = \frac{8r}{5}\vec{j} - b\vec{k}$ e $(P_2 - O) = -\frac{4r}{5}\vec{i} + b\vec{k}$ pede-se:




**a) (0,4)** o vetor posição $(G - O)$ do centro de massa G do corpo;
**b) (0,9)** o momento de inércia $J_{Oz}$ e os produtos de inércia $J_{Oxz}$ e $J_{Oyz}$ do corpo;
**c) (0,4)** a aceleração $\vec{a}_G$ do centro de massa G, expressa em função de $r$ e $\omega$;
**d) (0,4)** o diagrama de corpo livre;
**e) (0,9)** as equações obtidas a partir da aplicação do Teorema da Resultante ao corpo.

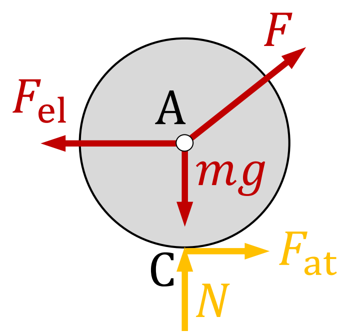
**Questão 3 (3,5 pontos)**. O sistema ilustrado na figura é constituído por um disco homogêneo de centro C, massa $4m$ e raio $4b$ que pode rolar sem escorregar sobre uma superfície plana horizontal fixa, e por uma barra esbelta homogênea BC, de centro G, massa $m$ e comprimento $2b$, vinculada ao disco apenas por meio de uma articulação ideal em C. Considerando somente a configuração ilustrada, da qual o sistema parte do repouso, pede-se:




**a) (0,8)** expressar as acelerações $\vec{a}_C$, do ponto C, e $\vec{a}_G$, do ponto G, em função das acelerações angulares $\vec{\alpha}_1 = \alpha_1\vec{k}$, do disco, e $\vec{\alpha}_2 = \alpha_2\vec{k}$, da barra;
**b) (0,8)** esboçar separadamente os diagramas de corpo livre do disco e da barra;
**c) (0,8)** aplicar a equação do Teorema da Quantidade de Movimento Angular à barra, com polo C, para determinar sua aceleração angular $\vec{\alpha}_2$;
**d) (1,1)** determinar a aceleração angular $\vec{\alpha}_1$ do disco e as componentes da força de contato sobre o disco, aplicadas pela superfície horizontal fixa.

## Resolução comentada

### Questão 1 (3,5 pontos)




**a)** Veja figura ao lado.
(1,0) para o diagrama correto; (0,5) se apenas uma força estiver incorreta; e (0,0) se duas ou mais forças estiverem incorretas.

**b)** Como o disco parte do repouso na posição inicial ($T_1 = 0$), a variação de sua energia cinética entre as posições inicial e final é dada por:

$$\Delta T = T_2 - T_1 = T_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta T = \frac{3mR^2\omega^2}{4}}$$

(0,5) para a expressão correta.

**c)** O trabalho total realizado pelas forças externas aplicadas ao disco entre as posições inicial e final é dado por:

$$W^{\text{ext}}_{1\to2} = W^{\text{N}}_{1\to2} + W^{\text{Fat}}_{1\to2} + W^{\text{P}}_{1\to2} + W^{\text{Fel}}_{1\to2} + W^{\text{F}}_{1\to2}$$

onde

$$\boxed{W^{\text{N}}_{1\to2} = 0} \quad \text{(A força normal é sempre perpendicular à direção do movimento)}$$

$$\boxed{W^{\text{Fat}}_{1\to2} = 0} \quad \text{(O disco rola sem escorregar sobre o plano horizontal)}$$

$$\boxed{W^{\text{P}}_{1\to2} = 0} \quad \text{(A posição do centro de massa do disco na vertical é constante)}$$

$$W^{\text{Fel}}_{1\to2} = -\Delta V_{\text{el}} = V^1_{\text{el}} - V^2_{\text{el}} = \frac{kd^2}{2} - \frac{k(d+4d)^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{W^{\text{Fel}}_{1\to2} = -12kd^2}$$

$$W^{\text{F}}_{1\to2} = F\Delta L = F(5d - 3d) \quad \Rightarrow \quad \boxed{W^{\text{F}}_{\text{A}\to\text{C}} = 2Fd}$$

sendo $\Delta L$ o deslocamento da extremidade do fio em que a força é aplicada entre as posições inicial e final do disco. Portanto, o trabalho total é dado por:

$$\boxed{W^{\text{ext}}_{1\to2} = 2Fd - 12kd^2}$$

(0,3) para termo do trabalho correto.

**d)** Aplicando o Teorema da Energia Cinética (TEC) entre as posições inicial e final, tem-se:

$$\Delta T = W^{\text{ext}}_{1\to2} \quad \Rightarrow \quad \frac{3mR^2\omega^2}{4} = 2Fd - 12kd^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{8d(F-6kd)}{3mR^2}}}$$

(0,5) para a expressão correta.

**Questão 2 (3,0 pontos)**

**a)** O cilindro tem massa $4m$ e centro de massa C, e cada uma partículas materiais $P_1$ e $P_2$ tem massa $m$. Assim:

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{G}-\mathrm{O}) &= \frac{4m(\mathrm{C}-\mathrm{O}) + m(\mathrm{P}_1-\mathrm{O}) + m(\mathrm{P}_2-\mathrm{O})}{4m+m+m} \\
&= \frac{4m\left(\frac{3r}{5}\vec{\jmath}\right) + m\left(\frac{8r}{5}\vec{\jmath} - b\vec{k}\right) + m\left(-\frac{4r}{5}\vec{\imath} + b\vec{k}\right)}{6m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{(\mathrm{G}-\mathrm{O}) = -\frac{2r}{15}\vec{\imath} + \frac{2r}{3}\vec{\jmath}}
\end{aligned}
$$

(0,2) por cada componente correta.

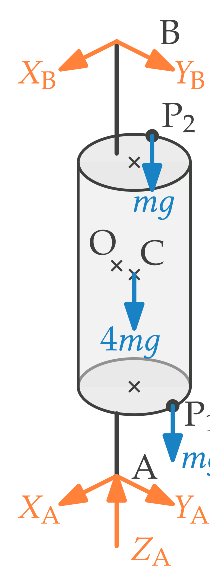
**b)** Considerando que o sólido rígido é constituído por um cilindro rígido e homogêneo e pelas partículas materiais $P_1$ e $P_2$, o momento de inércia $J_{\mathrm{O}z}$ e os produtos de inércia $J_{\mathrm{O}xz}$ e $J_{\mathrm{O}yz}$ do corpo são calculados, como segue:

$$J_{\mathrm{O}z} = \left[\frac{1}{2}(4m)r^2 + (4m)\left(\frac{3r}{5}\right)^2\right] + m\left(\frac{8r}{5}\right)^2 + m\left(\frac{4r}{5}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{J_{\mathrm{O}z} = \frac{166mr^2}{25}}$$

$$J_{\mathrm{O}xz} = (0 + 4mx_{\mathrm{C}}z_{\mathrm{C}}) + mx_{\mathrm{P}_1}z_{\mathrm{P}_1} + mx_{\mathrm{P}_2}z_{\mathrm{P}_2} = [0 + 4m(0)(0)] + m(0)(-b) + m\left(-\frac{4r}{5}\right)(b) \quad \Rightarrow \quad \boxed{J_{\mathrm{O}xz} = -\frac{4mrb}{5}}$$

$$J_{\mathrm{O}yz} = (0 + 4my_{\mathrm{C}}z_{\mathrm{C}}) + my_{\mathrm{P}_1}z_{\mathrm{P}_1} + my_{\mathrm{P}_2}z_{\mathrm{P}_2} = \left[0 + 4m\left(\frac{3r}{5}\right)(0)\right] + m\left(\frac{8r}{5}\right)(-b) + m(0)(b) \quad \Rightarrow \quad \boxed{J_{\mathrm{O}yz} = -\frac{8mrb}{5}}$$

(0,3) por cada resposta correta.




**c)** Aplicando a expressão do campo de acelerações para o corpo rígido, tem-se:

$$
\begin{aligned}
\vec{a}_{\mathrm{G}} &= \vec{a}_{\mathrm{O}} + \vec{\alpha} \wedge (\mathrm{G}-\mathrm{O}) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (\mathrm{G}-\mathrm{O})], \quad \vec{a}_{\mathrm{O}} = \vec{0}, \quad \vec{\alpha} = \vec{0} \\
&= \omega\vec{k} \wedge \left[\omega\vec{k} \wedge \left(-\frac{2r}{15}\vec{\imath} + \frac{2r}{3}\vec{\jmath}\right)\right] \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_{\mathrm{G}} = \frac{2\omega^2 r}{15}\vec{\imath} - \frac{2\omega^2 r}{3}\vec{\jmath}}
\end{aligned}
$$

(0,2) pela aplicação correta da equação do campo de acelerações, (0,2) pela resposta correta.

**d)** Diagrama de corpo livre indicado na figura ao lado. (0,4) pelo diagrama correto.

**e)** Pelo Teorema da Resultante (TR), obtém-se:

$$6m\vec{a}_{\mathrm{G}} = \vec{R}^{ext} \quad \Rightarrow \quad 6m\left(\frac{2\omega^2 r}{15}\vec{\imath} - \frac{2\omega^2 r}{3}\vec{\jmath}\right) = (X_{\mathrm{A}} + X_{\mathrm{B}})\vec{\imath} + (Y_{\mathrm{A}} + Y_{\mathrm{B}})\vec{\jmath} + (Z_{\mathrm{A}} - 10mg)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} X_{\mathrm{A}} + X_{\mathrm{B}} &= \dfrac{4m\omega^2 r}{5} \\ Y_{\mathrm{A}} + Y_{\mathrm{B}} &= -4m\omega^2 r \\ Z_{\mathrm{A}} &= 10mg \end{cases}}$$

(0,3) por cada equação correta.

**Questão 3 (3,5 pontos)**

**a)** A condição de rolamento sem escorregamento implica que o ponto de contato I do disco com a pista horizontal fixa tenha velocidade instantânea nula. Assim, pode-se obter as expressões para $\vec{v}_C$ e $\vec{a}_C$, válidas para qualquer instante de tempo (enquanto houver rolamento sem escorregamento):

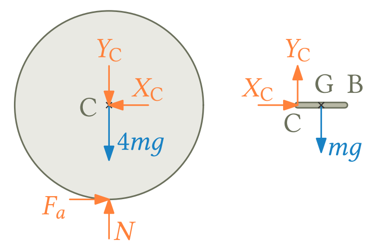
$$\vec{v}_C = \vec{v}_I + \vec{\omega}_1 \wedge (C - I) = \vec{0} + \omega_1 \vec{k} \wedge (4b\vec{j}) = -4b\omega_1\vec{i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_C = -4b\alpha_1\vec{i}}$$

Aplicando agora a equação de campo de acelerações à barra BC, considerando o sistema em repouso ($\vec{\omega}_2 = \vec{0}$):

$$\vec{a}_G = \vec{a}_C + \vec{\alpha}_2 \wedge (G - C) + \vec{\omega}_2 \wedge [\vec{\omega}_2 \wedge (G - C)] = -4b\alpha_1\vec{i} + \alpha_2\vec{k} \wedge (b\vec{i}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_G = -4b\alpha_1\vec{i} + b\alpha_2\vec{j}}$$

(0,4) por cada resposta correta.

**b)** Diagramas de corpo livre indicados na figura ao lado.
(0,4) por cada diagrama correto.




**c)** A equação do Teorema da Quantidade de Movimento Angular aplicada à barra, com polo C é:

$$m(G - C) \wedge \vec{a}_C + J_{Cz}^{barra}\vec{\alpha}_2 = \vec{M}_C^{barra}$$

$$m(b\vec{i}) \wedge (-4b\alpha_1\vec{i}) + \left[\frac{1}{12}m(2b)^2 + mb^2\right]\alpha_2\vec{k} = -mgb\vec{k}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_2 = -\frac{3g}{4b} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\alpha}_2 = -\frac{3g}{4b}\vec{k}}$$

(0,4) pela aplicação correta da equação do TQMA + (0,4) pela resposta correta.
Obs.: para o cálculo do momento de inércia $J_{Cz}$, usamos a expressão: $J_{Cz} = J_{Gz} + m(x_G^2 + y_G^2)$.

**d)** Aplicando as equações do Teorema da Resultante à barra, obtemos:

$$m\vec{a}_G = \vec{R}^{barra} \quad \Rightarrow \quad m\left(-4b\alpha_1\vec{i} + b\alpha_2\vec{j}\right) = X_C\vec{i} + (Y_C - mg)\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X_C = -4mb\alpha_1 & (1) \\ Y_C = \frac{1}{4}mg & (2) \end{cases}$$

Aplicando as equações do Teorema da Resultante ao disco, obtemos:

$$(4m)\vec{a}_C = \vec{R}^{disco} \quad \Rightarrow \quad (4m)\left(-4b\alpha_1\vec{i}\right) = (F_a - X_C)\vec{i} + (N - Y_C - 4mg)\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} F_a = -20mb\alpha_1 & (3) \\ N = \frac{17}{4}mg & (4) \end{cases}$$

Aplicando a equação do Teorema da Quantidade de Movimento Angular ao disco, com polo C, obtemos:

$$J_{Cz}^{disco}\vec{\alpha}_1 = \vec{M}_C^{disco} \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{1}{2}(4m)(4b)^2\right]\alpha_1\vec{k} = F_a(4b)\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\alpha}_1 = \vec{0}}$$

Assim, voltando às equações (3) e (4), obtemos:

$$\boxed{F_a = 0} \quad \text{e} \quad \boxed{N = \frac{17}{4}mg}$$

(0,5) pelo equacionamento correto + (0,2) por cada resposta correta.