Prova 3 - SMA0169 - EDP - 24.6.2024

Prof. Sergio H. Monari Soares

Nome:______________________________

Número USP:______________________________

Questão	Valor	Nota
1.ª	2,0	
2.ª	2,0	
3.ª	2,0	
4.ª	2,0	
5.ª	2,0	
Total	10,0	

1. Seja $B_1^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1, y>0\}$. Resolva o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } B_1^+ \\ u(x,0) = 0 & -1 \leq x \leq 1 \\ u(x,y) = y^3 & x^2+y^2=1, y>0 \end{cases}$$

Dica: Use o princípio da reflexão de Schwarz e a identidade

$$\sin^3\theta = \frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin(3\theta).$$

Solução: A dica para usar o princípio da reflexão de Schwarz é para evitar todos os passos do método de separação de variáveis indo direto para a solução do problema de Dirichlet na bola.

Observamos que a solução é única, pois o dado de fronteira é contínuo e consequentemente é possível aplicar o princípio do máximo. Uma vez que o problema é no semicírculo B_1^+ e $u(x,0)=0$ para $-1 \leq x \leq 1$, para encontrar a solução podemos usar o princípio da reflexão resolvendo o problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } B_1 \\ u(x,y) = y^3 & \text{sobre } \partial B_1 \end{cases}$$

Observamos que a escolha do dado de fronteira, y^3, sobre ∂B_1, $y<0$, foi feita mantendo-o ímpar em relação a y. Escrevendo esse problema em coordenadas polares, $v(r,\theta) := u(r\cos\theta, r\sin\theta)$, temos

$$\begin{cases} v_{rr} + \dfrac{1}{r}v_r + \dfrac{1}{r^2}v_{\theta\theta} = 0 & r<1, 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \\ v(1,\theta) = \sin^3\theta = \frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin(3\theta) & 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Utilizando a resolução do problema de Dirichlet no disco, sabemos que a solução é do tipo

$$v(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta\right)$$

Impondo o dado de fronteira $v(1, \theta) = \sin^3 \theta = \frac{3}{4} \sin \theta - \frac{1}{4} \sin(3\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, obtemos

$$a_n = 0 \quad \forall n \geq 0, \quad b_1 = \frac{3}{4}, \quad b_3 = -\frac{1}{4}, \quad b_n = 0 \ \text{ para } n \in \{2, 4, 5, \dots\}.$$

Portanto,

$$v(r, \theta) = \frac{3}{4} r \sin \theta - \frac{1}{4} r^3 \sin(3\theta).$$

Como $v(r, 0) = v(r, \pi) = 0$, a função $v\Big|_{[0,1]\times[0,\pi]}$ é a solução do problema no semicírculo, a qual escrita em coordenadas cartesianas é

$$u(x, y) = v(r, \theta) = \frac{3}{4} r \sin \theta - \frac{1}{4} r^3 \sin(3\theta) = \frac{y}{4} \left(3 - 3x^2 + y^2\right).$$

2. Seja u uma função harmônica em num conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e contínua em $\overline{\Omega}$. Seja (x_0, y_0) um ponto de Ω onde $u(x_0, y_0) = 2$. Seja E_1 o conjunto dado por

$$E_1 = \{(x, y) \in \Omega : u(x, y) \geq 1\}.$$

Mostre que a fronteira ∂E_1 não pode ser uma curva fechada contida em Ω.

Dica: use o princípio do máximo.

Solução. Suponha por absurdo que ∂E_1 seja uma curva fechada contida em Ω. Como u é contínua, $u(x, y) = 1$ para todo $(x, y) \in \partial E_1$. Portanto u resolve o problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \operatorname{int}(E_1) \\ u = 1 & \text{sobre } \partial E_1, \end{cases}$$

onde $\operatorname{int}(E_1)$ denota o interior de E_1. Pelo princípio do máximo, $u \equiv 1$ em E_1. Mas por hipótese, existe $(x_0, y_0) \in E_1$ tal que $u(x_0, y_0) = 2$, uma contradição.

3. Sejam $B_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

Seja $u \in C^2(B_1) \cap C^0(\overline{B_1})$ uma função satisfazendo

$$\begin{cases} \Delta u = \sin(u) & \text{em } B_1 \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B_1 \end{cases}$$

e $|u(x, y)| < \pi$ para todo $(x, y) \in B_1$. Mostre que $u \equiv 0$.

Solução (<u>Primeiro modo</u>): Sendo $\overline{B_1}$ é compacto e $u \in C^0(\overline{B_1})$, segue do Teorema de Weierstrass que existem (x_m, y_m), $(x_M, y_M) \in \overline{B_1}$ tais que

$$u(x_m, y_m) \leq u(x, y) \leq u(x_M, y_M) \quad \forall\, (x, y) \in \overline{B_1}.$$

Se (x_m, y_m), $(x_M, y_M) \in \partial B_1$, então $u \equiv 0$.

Se $(x_m, y_m) \in B_1$, então

$$0 \leq \Delta u(x_m, y_m) = \sin(u(x_m, y_m)).$$

Isto e o fato que $|u(x,y)| < \pi$ para todo $(x,y) \in B_1$, resulta que $0 \leq u(x_m, y_m) < \pi$. Como $u = 0$ sobre ∂B_1, segue que o valor mínimo de u é zero e também é assumido em ∂B_1.

De modo análogo, se $(x_M, y_M) \in B_1$, então

$$0 \geq \Delta u(x_M, y_M) = \sin(u(x_M, y_M)).$$

Isto e o fato que $|u(x,y)| < \pi$ para todo $(x,y) \in B_1$, resulta que $-\pi < u(x_M, y_M) \leq 0$. Como $u = 0$ sobre ∂B_1, segue que o valor máximo de u é zero e também é assumido em ∂B_1.

Portanto, de todo modo, os valores máximo e mínimo de u em $\overline{B_1}$ são assumidos em ∂B_1. Como $u \equiv 0$ sobre ∂B_1, temos $u \equiv 0$.

Solução (<u>Segundo modo</u>): Multiplicando a equação pela solução u e integrando temos

$$\int_{B_1} u \Delta u \, dxdy = \int_{B_1} u \sin(u) \, dxdy. \tag{1}$$

Pela primeira identidade de Green

$$\int_{B_1} u \Delta u \, dxdy = \int_{\partial B_1} u \frac{\partial u}{\partial \eta} \, dS - \int_{B_1} |\nabla u|^2 \, dxdy$$

Como $u = 0$ sobre ∂B_1, temos

$$\int_{B_1} u \Delta u \, dxdy = -\int_{B_1} |\nabla u|^2 \, dxdy \tag{2}$$

Por hipótese, $|u(x,y)| < \pi$ para todo $(x,y) \in B_1$. Assim, o lado direito de (1) é não negativo. Portanto, por (1) e (2), temos

$$\int_{B_1} |\nabla u|^2 \, dxdy \leq 0,$$

ou seja, $|\nabla u| \equiv 0$ em B_1. Usando que B_1 é conexo e $u \in C^2(B_1) \cap C^0(\overline{B_1})$ segue que u é constante, a qual é nula porque $u = 0$ sobre ∂B_1.

4. (Problema de Neumann e o princípio da reflexão de Schwarz).

   (a) Sejam $B_1^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, y > 0\}$ e $u \in C^2(B_1^+) \cap C^0(\overline{B_1^+})$ uma função harmônica em B_1^+ tal que $\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0$. Demonstre que a função

   $$U(x,y) = \begin{cases} u(x,y) & y \geq 0 \\ u(x,-y) & y < 0 \end{cases}$$

   obtida de u pela reflexão par em relação ao eixo y, é harmônica em B_1.

(b) Seja u a solução do problema misto no semicírculo

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } B_1^+ \\ u(x,y) = x^2 & \text{sobre } \partial B_1,\ y > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0 & -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Calcule $u(0,0)$.

Solução (a): Seja v a solução do problema (levamento harmônico de U)

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{em } B_1 \\ v = U & \text{sobre } \partial B_1 \end{cases}$$

a qual existe, é única e é dada pela fórmula de Poisson. Afirmamos que v é uma função par em y. De fato, primeiramente é fácil verificar que $v(x,-y)$ é harmônica em B_1. Seja a função

$$w(x,y) = v(x,y) - v(x,-y).$$

Assim, w satisfaz

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{em } B_1 \\ w = 0 & \text{sobre } \partial B_1 \end{cases}$$

Pela unicidade de solução, $w \equiv 0$; logo,

$$v(x,y) = v(x,-y) \quad \forall\, (x,y) \in B_1 \tag{3}$$

verificando a afirmação. De (3), temos

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = -v_y(x,-y)$$

em particular,

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Portanto, u e v são soluções do seguinte problema

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{em } B_1^+ \\ v = U & \text{sobre } \partial B_1,\ y > 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,0) = 0 & -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Em particular, $z = u - v$ é solução do problema

$$\begin{cases} \Delta z = 0 & \text{em } B_1^+ \\ z = 0 & \text{sobre } \partial B_1,\ y > 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}(x,0) = 0 & -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Afirmamos que $z = u - v \equiv 0$. De fato, pela primeira identidade de Green,

$$\int_{B_1^+} z\Delta z dxdy = \int_{\partial B_1^+} z\frac{\partial z}{\partial \eta} ds - \int_{B_1^+} |\nabla z|^2 dxdy.$$

Assim,

$$\int_{B_1^+} |\nabla z|^2 dxdy = 0.$$

Como z é contínua em $\overline{B_1^+}$ e $z = 0$ sobre $\partial B_1,\ y > 0$, seque que $z \equiv 0$, ou seja, $v = u = U$ em B_1^+ e sendo par com relação a y, temos $v = U$ em B_1. Portanto, U é harmônica.

(b) Seja u a solução do problema misto no semicírculo

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } B_1^+ \\ u(x,y) = x^2 & \text{sobre } \partial B_1,\ y > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0 & -1 \le x \le 1 \end{cases}$$

Pelo item (a), a função

$$U(x,y) = \begin{cases} u(x,y) & y \ge 0 \\ u(x,-y) & y < 0, \end{cases}$$

coincide com u em $\overline{B_1^+}$ e é solução do problema

$$\begin{cases} \Delta U = 0 & \text{em } B_1 \\ U(x,y) = x^2 & \text{sobre } \partial B_1. \end{cases}$$

Observamos que a escolha do dado de fronteira, x^2, em $\partial B_1 \cap \{y < 0\}$ foi feita mantendo-o par em relação a y. Pela fórmula de Poisson

$$U(r,\theta) = \frac{1-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\phi}{r^2 + 1 - 2r\cos(\phi - \theta)} d\phi$$

onde temos usado $x^2 = \cos^2\phi$ sobre ∂B_1. Em particular para $r = 0$,

$$u(0,0) = U(0,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2\phi d\phi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2\phi)}{2} d\phi = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\sin(2\phi)}{4}\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}.$$

5. (Versão do teorema de Liouville). Seja u harmônica em $\mathbb{R}^2$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(x)|^2 dx < +\infty.$$

Mostre que u é constante.

Dica: Exercício 8 da Lista 10.

Solução: Como u harmônica em $\mathbb{R}^2$, segue do Exercício 8 da Lista 10 que as derivadas u_x e u_y também são harmônicas em $\mathbb{R}^2$. Pelo Exercício 13(a) da Lista 10,

$$|\nabla u|^2 = (u_x)^2 + (u_y)^2$$

é subharmônica em $\mathbb{R}^2$ porque é uma soma de funções subharmônicas em $\mathbb{R}^2$. Por hipótese

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(x)|^2 dx < +\infty.$$

Segue do Exercício 13(c) da Lista 10 que $|\nabla u|^2 = 0$ em $\mathbb{R}^2$, implicando que u é constante, pois $\mathbb{R}^2$ é conexo e u é C^∞.