Eletromagnetismo — 7600021

Gabarito da auarta prova - 27 de junho de 2024

1. (**5 pontos**) A figura 1 mostra uma seção de uma barra condutora com formato de paralelepípedo muito largo, infinitamente comprido e com altura $2a$, muito menor que as dimensões horizontais. Adote o sistema de coordenadas indicado na figura. A barra conduz uma densidade volumétrica uniforme de corrente $\vec{\mathbf{J}} = J\hat{\mathbf{x}}$ no sistema de coordenadas indicado.

   (a) Encontre o potencial vetor [1] perto do plano vertical $y = 0$, na região $z > a$;

   (b) Encontre o potencial vetor perto do plano vertical $y = 0$, na região $a > z > 0$;

   (c) Encontre o campo magnético na região $a > z > 0$.

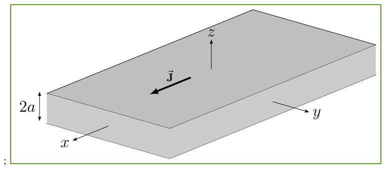

Figura 1: Questão 1

[1] Para facilitar: o potencial de um material com as dimensões do paralelepípedo, uniformemente carregado com densidade volumétrica ρ, na região $a > z > 0$ é $V(z) = -\rho z^2/(2\epsilon_0)$ e, na região $z > a$, $V(z) = \rho a(a - 2z)/(2\epsilon_0)$.

Solução. O potencial escalar obedece à equação de Poisson, $\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0$. Cada componente cartesiana do potencial vetor obedece a uma equação análoga. No caso, a densidade de corrente é na direção x, e a equação pertinente é

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J.$$

Efetuada as substituições $V \to A_x$, $\rho \to J$ e $\epsilon_0 \to \mu_0$, as expressões dadas para o potencial se convertem em

(a)

$$A_x(x, y, z) = -\mu_0 J \frac{z^2}{2} \qquad (0 < z < a).$$

e

(b)

$$A_x(x, y, z) = \mu_0 J a \frac{a - 2z}{2} \qquad (a < z).$$

(c) Uma vez que o potencial vetor só tem componente x e somente depende de z, seu rotacional é

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\partial A_x}{\partial z} \hat{\mathbf{y}},$$

ou seja

$$\vec{\mathbf{B}} = -\mu_0 J a \hat{\mathbf{y}} \qquad (a > z > 0).$$

2. (**5 pontos**) A figura 2 mostra uma casca esférica dielétrica com raio externo $2a$ que envolve uma esfera condutora com raio a. O dielétrico é linear e tem permissividade ϵ. O conjunto está imerso num campo elétrico que, na ausência das esferas seria $\vec{\mathbf{E}}_0 = E_0\hat{\mathbf{z}}$ no sistema de coordenadas da figura. Escolha como referência para o potencial o plano $z = 0$, isto é, $V(z = 0) = 0$.

   (a) Mostre que o potencial elétrico no interior do dielétrico obedece à equação de Laplace (assim como fora dele).

   (b) Escreva as condições de contorno que o potencial deve obedecer em $r = a$;

   (c) Escreva as condições de contorno que o potencial deve obedecer em $r = 2a$;

   (d) Escreva as expressões gerais mínimas (isto é, excluindo termos que são necessariamente nulos) para o potencial na região externa ($r > 2a$) e no dielétrico ($2a > r > a$);

   (e) Encontre o potencial no dielétrico ($2a > r > a$).

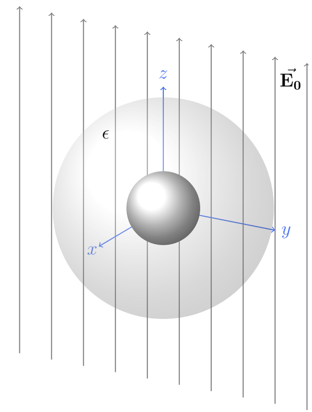

Figura 2: Questão 2
.

Solução

(a) Como não há cargas livres no interior do dielétrico, $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{D}} = 0$. Como o dielétrico é linear, $\vec{\mathbf{D}} = \epsilon\vec{\mathbf{E}}$, o que mostra que $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = 0$, também. Por outro lado, $\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla}V$, e assim, $\nabla^2 V = 0$.

(b) Uma vez que a esfera é condutora, seu potencial é constante. De fato, seu potencial é nulo, visto que o plano $z = 0$ a atravessa no equador. O potencial deve obedecer, portanto, à condição de contorno [2]

$$V(r = a, \theta) = 0.$$

(c) Na superfície externa do dielétrico, o potencial deve ser contínuo,

$$V(r = 2a_-) = V(r = 2a_+).$$

Como não há cargas livres, a componente perpendicular do vetor deslocamento deve ser contínua, $D_\perp(r = a_-) = D_\perp(r = a_+)$, ou seja, $\epsilon E_\perp(r = a_-) = \epsilon_0 E_\perp(r = a_+)$. Por outro lado, $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\nabla}V$, em todo o espaço. Segue que

$$\epsilon \left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{2a_-} = \epsilon_0 \left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{2a_+}.$$

(d) Para $r \to \infty$, o potencial é controlado pelo campo elétrico, isto é, $V(r, \theta) = -E_0 r\cos\theta$, ou $V(r, \theta) = -E_0 r P_1(\cos\theta)$. A solução da

[2] Há uma segunda condição, pois o campo elétrico perto de um condutor é sempre perpendicular à superfície. Isso quer dizer que $\frac{\partial *}{\partial V} r = 0$ para $r = a$; entretanto, essa condição pode ser deixada de lado porque acaba sendo equivalente a dizer que o potencial é nulo.

equação de Laplace na região externa ($r > 2a$) envolve apenas termos proporcionais a P_1, ou seja

$$V(r,\theta) = -E_0 r\cos(\theta) + \frac{B_1}{r^2}P_1(\cos\theta) \qquad (r > 2a).$$

Para que esse potencial satisfaça as condições de contorno na superfície do dielétrico, é necessário que o potencial dentro do dielétrico também compreenda apenas termos proporcionais a $P_1(\cos\theta)$; em outras palavras

$$V(r,\theta) = A_1 r\cos(\theta) + \frac{D_1}{r^2}P_1(\cos\theta) \qquad (2a > r > a).$$

Se o dielétrico ocupasse todo o espaço $r < 2a$, poderíamos excluir o termo proporcional a $1/r^2$, que diverge quando $r = 0$. Aqui, porém, o dielétrico não chega à origem, e o termo proporcional a D_1 tem de ser mantido.

(e) A condição de contorno em $r = a$ mostra que

$$A_1 a + \frac{D_1}{a^2} = 0,$$

ou $D_1 = -a^3 A_1$.

Daqui para a frente, podemos trocar D_1 por $-a^3 A_1$. Assim, as duas condições em $r = 2a$ definem duas igualdades:

$$2A_1 a - A_1 a^3\frac{1}{4a^2} = -2aE_0 + \frac{B_1}{4a^2}$$

e

$$\epsilon\Big(A_1 - 2(-A_1 a^3)\frac{1}{8a^3}\Big) = \epsilon_0(-E_0 - \frac{B_1}{4a^3}),$$

que constituem um sistema de duas equações com duas variáveis. Queremos A_1. Para encontrá-la, basta dividir a segunda equação por ϵ_0 e somar as duas para eliminar B_1. Resulta que

$$A_1 = -\frac{12\epsilon_0}{7\epsilon_0 + 5\epsilon}E_0,$$

O potencial no interior do dielétrico é

$$V(r,\theta) = \Big(A_1 r + \frac{(-A_1 a^3)}{r^2}\Big)P_1(\cos\theta),$$

e assim

$$V(r,\theta) = -\frac{12\epsilon_0}{7\epsilon_0 + 5\epsilon}E_0(r - \frac{a^3}{r^2})\cos(\theta).$$