Lista de exercícios aula 8 - Solução

Manoel Galdino

8.1. Qual o equilíbrio de Nash em Estratégias Mistas (ENEM) do Dilema do Prisioneiro?

Para achar o ENEM, devemos igualar as utilidades esperadas das estratégias. Supondo que 2 joga C (coopera) com probabilidade q e NC (não-coopera) com probabilidade $1-q$ e similarmente para 1, só que com probabilidades p e $(1-p)$, temos:

$E[U_1(C)] = E[U_1(D)]$

$q * -2 + (1-q) * -10 = q * 0 + (1-q) * -5$

$-2q - 10 + 10q = -5 + 5q$

$8q - 5q = 10 - 5$

$3q = 5$

$q = 5/3$.

Notem que $q > 1$, o que não é possível. Isso significa que não há estratégia mista para 2. Cálculo similar mostra que também não há estratégia mista para 1. A razão é que para identificar uma estratégia mista de equilíbrio, queremos deixar cada jogadora indiferente entre as estratégias. Porém, não existe nenhuma probabilidade positiva de jogar cooperar que vá deixar uma jogadora indiferente entre essa estratégia de cooperar e não cooperar. Uma outra forma de ver isso é que (C,C) é um equilíbrio de estratégia dominante. Portanto, podemos usar EIESD para deixar o jogo com uma única estratégia para ambos os jogadores, e já não dá para usar nosso algoritmo de igualar utilidade esperada de estratégias.

8.2. Qual o ENEM do jogo do Chicken? Sejam as estratégias D (desvia) e ND (não desvia). E a matriz de payoff dada por:

	D	ND
D	(0,0)	(-1,2)
ND	(2,-1)	(-10,-10)

Então, o ENEM requer:

$E[U_1(D)] = E[U_1(DN)]$

$0 * q + -1 * (1 - q) = 2 * q + -10 * (1 - q)$

Resolvendo, temos: $-1 + q = 2q + -10 + 10q$

$-1 + q = -10 + 12q$

$9 = 11q$

$q = 9/11$.

Como os payoffs são simétricos, ambos jogadores vão aleatorizar com as mesmas probabilidades. Logo, o ENEM é (p=9/11, 1-p = 2/11; q = 9/11, 1-q = 2/11).

8.3. Considere o seguinte jogo representado na forma estratégica:

	Esquerda	Centro
Alto	(3,3)	(3,3)
Baixo	(3,3)	(3,3)

a) Existe algum equilíbrio de Nash em Estratégias Puras (ENEP)? Se sim, qual (ou quais)?

Existem 4 ENEP: (A,E); (A,C), (B,E) e (B,C), já que não é possível nenhum jogador melhorar unilateralmente em cada uma desses casos.

b) Quantos equilíbrios de Nash em estratégias mistas existem? O ENEM requer:

$E[U_1(A)] = E[U_1(B)]$

$3 * q + 3 * (1 - q) = 3 * q + 3 * (1 - q)$

$3 = 3$

Ou seja, qualquer valor de q torna a equação verdadeira. Isso significa que existem infinitos equilíbrios de Nash em estratégias mistas, dados por (p = [0,1], q=[0,1]).

ps.: Aqui eu incluí os ENEP como casos limites. Mas poderia ter excluído também, seguindo a convenção de não tratar ENEP como ENEM.

ps.2: Você podem verificar que de fato qualquer valor de q torna o jogador indiferente, calculando os payoffs esperados para casos particulares (digamos, $q = 1/2$, depois $q = 1/3$ etc.). Intuitivamente é fácil ver que isso é verdade, já que os payoffs são sempre iguais, não importa o que se jogue, com qualquer probabilidade.

8.4. Considere o seguinte jogo representado na forma estratégica:

	A	B	C
A	(4,4)	(0,5)	(-1,0)
B	(5,0)	(1,1)	(0,0)
C	(0,-1)	(0,0)	(1,1)

a) Existe algum equilíbrio de Nash em Estratégias Puras (ENEP)? Se sim, qual (ou quais)?

R.: Vejam que A é estritamente dominada por B do ponto de vista da jogadora 1. Portanto, podemos eliminar essa estratégia do jogo. Similarmente, A é estritamente dominada por B para a jogadora 2, de forma que também podemos eliminar essa estratégia. Ficamos então com a seguinte matriz:

	B	C
B	(1,1)	(0,0)
C	(0,0)	(1,1)

Temos então dois ENEP: (B,B) e (C,C).

b) Existe ENEM em que as jogadoras aleatorizam entre A e B? Explique.

R.: Nós já sabemos que uma estratégia estritamente dominada não pode ser aleatorizada com probabilidade positiva em estratégias mistas. Portanto, não existe ENEM em que as jogadoras aleatorizam entre A e B.

c) Existe ENEM em que as jogadoras aleatorizam entre B e C? Explique.

R. Nós sabemos que (quase sempre) os equilíbrios de Nash em estratégias puras e mistas somam um número ímpar de equilíbrios. Se temos 2 ENEP, esperamos que devemos ter pelo menos mais um ENEM (ou 3, 5 etc.). Para achar o ENEM, devemos igualar as utilidades esperadas. Supondo que 1 joga B com probabilidade p e C com probabilidade $1-p$ e, analogamente, 2 joga B com probabilidade q e C com probabilidade $1-q$, temos:

$E(U_1(B^*)) = E(U_2(C))$

$1 * q + 0 * (1-q) = 0 * q + 1 * (1-q)$

$q = 1 - q$

$2q = 1$

$q = 1/2.$

Como os payoffs são simétricos, calculo similar revelará que $p = 1/2$. Portanto, o ENEM é formado por (p=1/2, 1-p = 1/2; q=1/2, 1 - q = 1/2).

8.5. Uma funcionária (jogadora 1) que trabalha para uma chefe (jogadora 2) pode tanto trabalhar (T) quanto enrolar (E), enquanto sua chefe pode tanto monitorar a funcionária (M) quanto ignorá-la (I). Como em muitos relacionamentos entre funcionária e chefe, se a funcionária estiver trabalhando, a chefe prefere não monitorá-la, mas se a chefe não estiver monitorando, a funcionária prefere enrolar. A matriz de payoff abaixo representa uma situação como essa.

	M	I
T	(1,1)	(1,2)
E	(0,2)	(2,1)

a) escreva a fução de melhor resposta de cada jogadora (isto é, para a jogadora 1, qual probabilidade p ela deve escolher para cada possível escolha de probabilidade q da jogadora 2).

Seja p a probabilidade que a jogadora 1 escolha T e $1-p$ a probabilidade de escolha E. Já para a jogadora 2, q probabilidade de jogar M e $1-q$ de jogar I. Segue que a $E[U_1(T,q)] > E[U_1(E,q)]$ se e somente se:

$1 * q + 1 * (1-q) > 0 * q + 2 * (1-q)$

$1 > 2 - 2q$

$2q > 1$

$q > 1/2$. Similarmente, $E[u_q(p,M)] > E[u_2(p,I)]$ se e somente se:

$1 * p + 2 * (1-p) > 2 * p + 1 * (1-p)$

$p + 2 - 2p > 2p + 1 - p$

$2 - p > p + 1$

$1 > 2p$

$p < 1/2$

Portanto, para a jogadora 1:

Melhor Resposta da jogadora 1 para cada q da jogadora 2 é:

MR_1(q): =

1. Se $q < 1/2$, $p = 0$.
2. Se $q > 1/2$, $p = 1$
3. se $q = 1/2$, $p \in [0,1]$.

E analogamente para a jogadora 2.

b) qual o equilíbrio de Nash do jogo?

Pela matriz de payoff, é fácil verificar que não há ENEP. Resta checar então qual o ENEM (sabemos, pelo teorema de Nash, que todo jogo finito de informação completa sempre tem pelo menos um equilíbrio de Nash, seja em puras ou mistas).

Das correspondências de melhor resposta, vemos que o único ENEM é p = q = 1/2, ou (1/2, 1/2). Outra forma de achar o ENEM é igualando as utilidades esperadas, o que também dá 1/2.