PRG0039 Fundamentos da Matemática Elementar

Aula 4 - Sistemas Lineares

Anarosa Brandão Fernando Kurokawa

June 12, 2024

Equações Lineares

Equações linerares

- Considere uma situação em que você vai enviar várias caixas de tamanhos distintos numa encomenda e o volume disponível para armazenamento é de $10m^3$. Suponha que você quer calcular os volumes das caixas para caber exatamente no container, sendo que são 10 caixas de tamanho P, 5 de tamanho M e 2 de tamanho G. Uma modelagem possível para esta situação é:

$$10p + 5m + 2g = 10$$

Equações da forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b, \quad n \in IN \quad e \quad a_i \in IR \quad algum \quad a_i \neq 0$$

são ditas **equações linerares**.

Exemplos

- São equações linerares:

$x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5$

$-x_1 + \frac{1}{2}x_2 = \sqrt{5}$

- Não são equações linerares:

$x_1^2 + 3x_2 + 4x_3 = 5$

$-x_1x_2 + \frac{1}{2}x_3 = \sqrt{5}$

- Para a equação $3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 9$, podemos afirmar que os valores $(x_1, x_2, x_3) = (5, 1, -2)$, $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$ e $(x_1, x_2, x_3) = (3, 0, 0)$ são **soluções** da equação pois:

  3.5 + 2.1 + 4.(-2) = 15 + 2 - 8 = 9

  3.1 + 2.1 + 4.1 = 3 + 2 + 4 = 9

  3.3 + 2.0 + 4.0 = 9

Exercício resolvido

1. Resolva a equação linear
$4x + 2y = 6$

Podemos isolar uma das variáveis de um lado da igualdade. Por exemplo y.

$$2y = 6 - 4x \Rightarrow$$

$$y = \frac{6 - 4x}{2} = 2.\frac{3 - 2x}{2}$$

$$y = 3 - 2x$$

x	y	(x,y)
0	3 - 2.0 $= 3$	(0,3)
1	3 - 2.1 $= 1$	(1,2)

Sistemas lineares

Sistemas lineares 2x2

- Um sistema linear 2x2 é composto por 2 equações e 2 incógnitas, como no exemplo abaixo.

$$S_1 \begin{cases} 2x + 3y & = 4 \\ x - y & = 2 \end{cases}$$

- O sistema linear 2x2 pode ser escrito como uma equação matricial, com os coeficientes das variáveis numa matriz 2x2, as variáveis numa matriz 2x1, e os termos independentes numa matriz 2x1.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Resolução por substituição

Os sistemas lineares mais simples podem ser resolvidos diretamente por substituição. Este método é geralmente usado quando o processo de se isolar uma das variáveis é fácil.

- Isolar uma das variáveis em uma das duas equações, deixando-a em função da outra;

$$S_1 \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - y = 2 \Rightarrow x = 2 + y \end{cases}$$

- Substituir a variável isolada na outra equação ainda não utilizada;

$$S_1 \begin{cases} 2(2 + y) + 3y = 4 \\ x = 2 + y \end{cases}$$

Resolução por substituição

- Resolver a equação que contém apenas uma variável;

$$S_1 \begin{cases} 2(2+y)+3y=4 \Rightarrow y=0 \\ x=2+y \end{cases}$$

- Substituir na equação ainda não resolvida o valor encontrado para aquela variável, calculado anteriormente, resolvendo-a;

$$S_1 \begin{cases} y=0 \\ x=2+(0) \Rightarrow x=2 \end{cases}$$

- Assim, são encontrados pelo método da substituição os valores de x = 2 e y = 0.

1. Resolver o sistema linear abaixo por substituição

$$S_1 \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$$

- Isolamos primeiro uma das variáveis, neste caso x;

$$S_1 \begin{cases} x + 2y = 5 \Rightarrow x = 5 - 2y \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$$

- Podemos, agora, substituir x em função de y na equação ainda não utilizada;

$$S_1 \begin{cases} x = 5 - 2y \\ 3x - 5y = 4 \Rightarrow 3.(5 - 2y) - 5y = 4 \end{cases}$$

Exemplos de resolução por substituição

- Resolvemos, então, a equação que possui apenas uma variável (neste caso a segunda equação);

$$S_1 \begin{cases} x = 5 - 2y \\ 3.(5 - 2y) - 5y = 4 \Rightarrow 15 - 6y - 5y = 4 \Rightarrow -11y = -11 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

- Assim, em posse do valor de uma das variáveis, a outra pode ser encontrada utilizando, novamente, a substituição;

$$S_1 \begin{cases} x = 5 - 2y \Rightarrow x = 5 - 2.(1) \Rightarrow x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

- Foram encontrados, portanto, os valores de x = 3 e y = 1.

Exemplos de resolução por substituição

2. Resolver o sistema linear abaixo por substituição

$$S_1 \begin{cases} 5x - 4y = -5 \\ x + 2y = 13 \end{cases}$$

- Isolamos primeiro a variável x, na segunda equação;

$$S_1 \begin{cases} 5x - 4y = -5 \\ x + 2y = 13 \Rightarrow x = 13 - 2y \end{cases}$$

- Podemos, então, substituir x em função de y na primeira equação;

$$S_1 \begin{cases} 5x - 4y = -5 \Rightarrow 5.(13 - 2y) - 4y = -5 \\ x = 13 - 2y \end{cases}$$

Exemplos de resolução por substituição

- Resolvemos a equação que possui apenas uma variável (no caso, a primeira;

$$S_1 \begin{cases} 5.(13-2y)-4y=-5 \Rightarrow 65-10y-4y=-5 \Rightarrow -14y=-70 \Rightarrow y=5 \\ x=13-2y \end{cases}$$

- Obtido o valor de y, podemos calcular x substituindo o valor encontrado na segunda equação;

$$S_1 \begin{cases} y=5 \\ x=13-2y \Rightarrow x=13-2.(5) \Rightarrow x=3 \end{cases}$$

- Assim, podem ser encontrados os valores de x = 3 e y = 5.

Resolução por adição

Os mesmos sistemas resolvidos anteriormente por substituição podem ser resolvidos pelo método da adição. Neste, uma das equações é manipulada de modo que, se for somada à outra, o coeficiente de uma das variáveis fica nulo, e a equação se torna dependente de uma só variável.

- Deve-se primeiramente identificar qual das variáveis se quer eliminar das equações. No caso do sistema estudado, eliminaremos a variável x das contas;

$$S_1 \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - y = 2 \Rightarrow x = 2 + y \end{cases}$$

- Assim, como temos como coeficientes de x os valores 2 e 1, devemos transformá-los de modo que ao somarmos as equações estes valores se anulem;

Resolução por adição

$$S_1 \begin{cases} 2x + 3y = 4 \Rightarrow (-1/2).2x + (-1/2).3y = (-1/2).4 \Rightarrow -x - (3/2)y = -2 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

ou

$$S_1 \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - y = 2 \Rightarrow (-2).x - (-2).y = (-2).2 \Rightarrow -2x + 2y = -4 \end{cases}$$

- Utilizando o segundo conjunto de equações obtido, as duas equações podem ser somadas, resultando em uma única equação com uma só variável;

$$S_1 \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ -2x + 2y = -4 \end{cases}$$

$$2x - 2x + 3y + 2y = 4 - 4 \Rightarrow 5y = 0 \Rightarrow y = 0$$

Resolução por adição

- Assim, com o resultado obtido para o valor de y, este pode ser substituido em qualquer uma das equações originais, de modo a se obter o x.

$$S_1 \begin{cases} 2x + 3y = 4 \Rightarrow 2x + 3.(0) = 4 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \\ x - y = 2 \Rightarrow x - (0) = 2 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

- E, portanto, os resultados obtidos utilizando o método de resolução por adição são os mesmos que os obtidos utilizando método de resolução por substituição, conforme esperado, com $x = 2$ e $y = 0$.

Exemplos de resolução por adição

1. Resolver o sistema linear abaixo por adição

$$S_1 \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$$

- Multiplicando a primeira equação por -3, obtemos uma expressão que, quando somada à segunda equação, resulta num coeficiente de x nulo;

$$S_1 \begin{cases} x + 2y = 5 \Rightarrow (-3).x + (-3).2y = (-3).5 \Rightarrow -3x - 6y = -15 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$$

- Somando as duas equações, obtemos

$$-3x + 3x - 6y - 5y = -15 + 4 \Rightarrow -11y = -11 \Rightarrow y = 1$$

Exemplos de resolução por adição

- Obtido o valor da variável y, este pode ser substituido em qualquer uma das equações originais para obtenção de x;

$$S_1 \begin{cases} x + 2y = 5 \Rightarrow x + 2.(1) = 5 \Rightarrow x = 3 \\ 3x - 5y = 4 \Rightarrow 3x - 5.(1) = 4 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

- Assim, obtemos os valores de x = 3 e y = 1, iguais aos obtidos pelo método de substituição anteriormente.

2. Resolver o sistema linear abaixo por substituição

$$S_1 \begin{cases} 5x - 4y = -5 \\ x + 2y = 13 \end{cases}$$

- Multiplicando a segunda equação por -5, obtemos uma expressão que, quando somada à primeira equação, resulta num coeficiente de x nulo;

$$S_1 \begin{cases} 5x - 4y = -5 \\ x + 2y = 13 \Rightarrow (-5).x + (-5).2y = (-5).13 \Rightarrow -5x - 10y = -65 \end{cases}$$

- Somando as duas equações, obtemos

$5x - 5x - 4y - 10y = -5 - 65 \Rightarrow -14y = -70 \Rightarrow y = 5$

Exemplos de resolução por adição

- Obtido o valor da variável y, este pode ser substituido nas equações originais para obtenção de x;

$$S_1 \begin{cases} 5x - 4y = -5 \Rightarrow 5x - 4.(5) = -5 \Rightarrow x = 3 \\ x + 2y = 13 \Rightarrow x + 2.(5) = 13 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

- Assim, obtemos os valores de $x = 3$ e $y = 5$, iguais aos obtidos pelo método de substituição anteriormente.

Sistemas lineares 3x3

- Um sistema linear 3x3 é composto por 3 equações e 3 incógnitas, como no exemplo abaixo.

$$S \begin{cases} x + y + z & = 6 \\ 2x + y - z & = 1 \\ 3x - y + z & = 4 \end{cases}$$

- O sistema linear 3x3 pode ser escrito como uma equação matricial, com os coeficientes das variáveis numa matriz 3x3, as variáveis numa matriz 3x1, e os termos independentes numa matriz 3x1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Resolução pela regra de Cramer

Considerando um sistema linear S com um número de equações igual ao de incógnitas, ou seja, de matriz M quadrada, definimos D como: $D = \det M$

Regra de Cramer: Considerando o sistema S, se o determinante for diferente de 0, i.e. $D \neq 0$, então diz-se que S é **possível** e terá **solução única** $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$, tal que:

$$\alpha_i = \frac{D_i}{D},\ i = \{1, 2, 3, ..., n\}$$

Em que D_i é o determinante da matriz obtida substituindo a coluna de número i da matriz M pela coluna dos termos independentes das equações do sistema. Vejamos a seguir o exemplo.

Exemplo regra de Cramer

- Seja o sistema:

$$S\begin{cases} x+y+z &= 6 \\ x-y-z &= -4 \\ 2x-y+z &= 1 \end{cases}$$

$$\text{Temos que: } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Logo, calculando o determinate da matriz M

$$\det M = \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right| = -4 \neq 0$$

Exemplo regra de Cramer

Substituindo a coluna dos termos independentes nas colunas da matriz M, encontra-se:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -12$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8$$

Exemplo regra de Cramer

- Calculando as incógnitas buscadas:

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{-4}{-4} = 1$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{-12}{-4} = 3$$

$$z = \frac{D_3}{D} = \frac{-8}{-4} = 2$$

Concluí-se, portanto, que a única solução possível para esse sistema linear é

$$(x, y, z) = (1, 3, 2)$$

Matrizes e sistemas lineares

Vimos que sistemas lineares com n equações e n incógnitas podem ser representados como **equações matriciais** do tipo $A_{nxn}X_{nx1} = B_{nx1}$

- Exemplo

O sistema $\begin{cases} x+y+z & = 6 \\ x-y-z & = -4 \\ 2x-y+z & = 1 \end{cases}$ é equivalente a $AX = B$, para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matrizes e representação de sistemas lineares

- Resolver um sistema linear equivale a resolver equações matriciais do tipo $AX = B$, onde A_{nxn}, X_{nx1} e B_{nx1}.
- A equação matricial (ou o sistema) só tem solução se $det(A) \neq 0$
- Solução no caso geral:

  $A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow IX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$
- Calcular a matriz inversa pode ser custoso, mas se a matriz A tiver algumas características particulares, fica simples resolver o sistema usando a técnica de escalonamento.

- A resolução por escalonamento pressupõe a transformação do sistema linear dado por $AX = B$ num sistema linear **triangular superior**. Um sistema é triangular superior se sua matriz de coeficientes é uma **matriz triangular superior**.
- Uma matriz quadrada A é **triangular superior** se e somente se todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- A resolução por escalonamento pressupõe a transformação do sistema linear dado por $AX = B$ num sistema linear **triangular superior**. Um sistema é triangular superior se sua matriz de coeficientes é uma **matriz triangular superior**.

- Considere o exemplo do sistema $\begin{cases} x + y + z & = 6 \\ x - y - z & = -4 \\ 2x - y + z & = 1 \end{cases}$, equivalente a $AX = B$,

  para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matrizes e sistemas lineares: resolução por escalonamento

- Para escalonar o sistema executamos operações algébricas elementares entre pares de linhas da matriz estendida, obtida a partir de A com a coluna adicional B.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow L_2 = (L_1 - L2) \quad e \quad L_3 = (2L_1 - L_3) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 10 \\ 0 & 3 & 1 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow L_3 = (3L_2 - 2L_3) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Matrizes e sistemas lineares: resolução por escalonamento

Assim, o sistema $\left\{\begin{array}{rcr} x+y+z & = & 6 \\ x-y-z & = & -4 \\ 2x-y+z & = & 1 \end{array}\right.$, é equivalente ao sistema

$\left\{\begin{array}{rcr} x+y+z & = & 6 \\ 2y+2z & = & 10 \\ 4z & = & 8 \end{array}\right.$, cuja solução é dada por:

$z = 2$

$2y + 2.2 = 10 \Rightarrow y = 3,$

$x + 3 + 2 = 6 \Rightarrow x = 1$

Material baseado nos livros:

Paiva, Manoel. Matemática, vol. único, 1^a ed., Moderna, 2005.

Smole, K.C.S. e Diniz, M.I. Matemática: Ensino Médio, vol. 2, 6^a ed., Ed. Saraiva, 2010

Obrigado

Perguntas?