

Planejamentos Fatoriais em blocos

Profa. Cibele Russo

(Referências: Montgomery (2012), Notas de aula de Roseli Leandro; Clarice Demétrio; Marinho Andrade)

Planejamentos fatoriais em blocos

- Discutimos anteriormente os planejamentos fatoriais em um delineamento inteiramente casualizado
- Às vezes, não é viável ou prático aleatorizar completamente todas as execuções em um planejamento fatorial. Por exemplo, a **presença de um fator de incômodo (nuisance factor)** pode exigir que o experimento seja executado em blocos.
- Vamos agora considerar como a blocagem pode ser incorporada em um planejamento fatorial.

Planejamentos fatoriais inteiramente casualizados

Suponha um problema com 2 fatores com interação, ou seja, com modelo:

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \epsilon_{ijk}$$

sendo

i : o índice para os níveis do fator A ($i = 1, \dots, a$).

j : o índice para os níveis do fator B ($j = 1, \dots, b$).

k : o índice para as réplicas (repetições), por tratamento ($k = 1, 2, \dots, n$)

em que

- y_{ijk} : resposta da k -ésima réplica, no nível i de A e nível j de B.
- τ_i : efeito do i -ésimo nível de A.
- β_j : efeito do j -ésimo nível de B.
- $(\tau\beta)_{ij}$: efeito da interação entre i -ésimo nível de A e j -ésimo nível de B.
- ϵ_{ijk} : efeito aleatório da k -ésima observação do i -ésimo nível de A e j -ésimo nível de B,

em que ϵ_{ijk} 's são variáveis aleatórias independentes.

Planejamento fatorial em blocos

- Agora, suponha que para conduzir este experimento seja necessário um material bruto específico.
- Este material está disponível em lotes que não são grandes o suficiente para permitir que todas as abn combinações de tratamento sejam executadas a partir do mesmo lote.
- No entanto, se um lote contém material suficiente para observações ab , então um delineamento alternativo consiste em executar cada uma das n réplicas usando um lote separado de material bruto.
- Conseqüentemente, os lotes de material bruto representam uma restrição de randomização ou um bloco, e uma única réplica de um experimento fatorial completo é executada dentro de cada bloco.

Planejamentos fatoriais em blocos

Suponha um problema com 2 fatores com interação, ou seja, com modelo:

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \delta_k + \epsilon_{ijk}$$

sendo

i : o índice para os níveis do fator A ($i = 1, \dots, a$).

j : o índice para os níveis do fator B ($j = 1, \dots, b$).

k : o índice para os blocos ($k = 1, 2, \dots, n$)

Planejamentos fatoriais em blocos

em que

- y_{ijk} : resposta no nível i de A, nível j de B e k -ésimo bloco.
- τ_i : efeito do i -ésimo nível de A.
- β_j : efeito do j -ésimo nível de B.
- $(\tau\beta)_{ij}$: efeito da interação entre i -ésimo nível de A e j -ésimo nível de B.
- δ_k : efeito do k -ésimo bloco (efeito aleatório).
- ϵ_{ijk} : efeito aleatório da k -ésima observação do i -ésimo nível de A e j -ésimo nível de B,

em que ϵ_{ijk} 's são variáveis aleatórias independentes e são independentes de δ_k .

Planejamentos fatoriais em blocos

- Nesse modelo, os fatores são considerados efeitos fixos e o bloco efeito aleatório.
- O modelo assume que a interação entre blocos e tratamentos é negligenciável.
- Se essas interações existirem, elas não podem ser separadas do componente de erro.
- O termo de erro neste modelo na verdade consistiriam nas interações $(\tau\delta)_{ik}$, $(\beta\delta)_{jk}$ e $(\tau\beta\delta)_{ijk}$.
- A análise de variância é apresentada a seguir. O estimador ANOVA do componente de variância para blocos σ^2 é:

$$\sigma^2 = \frac{MS_{\text{Blocos}} - MSE}{n}$$

- Na prática, diversos fenômenos podem causar restrições de randomização, como tempo e operadores.
- Por exemplo, se não fosse possível executar todo o experimento fatorial em um dia, então o experimentador poderia executar uma réplica completa no dia 1, uma segunda réplica no dia 2 e assim por diante. Consequentemente, cada dia seria um bloco.

Experimentos fatoriais em blocos

■ TABLE 5.20

Analysis of Variance for a Two-Factor Factorial in a Randomized Complete Block

| Source of Variation | Sum of Squares | Degrees of Freedom | Expected Mean Square | F_0 |
|---------------------|---|--------------------|--|------------------------|
| Blocks | $\frac{1}{ab} \sum_k y_{..k}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn}$ | $n - 1$ | $\sigma^2 + ab\sigma_\delta^2$ | |
| A | $\frac{1}{bn} \sum_i y_{i..}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn}$ | $a - 1$ | $\sigma^2 + \frac{bn \sum \tau_i^2}{a - 1}$ | $\frac{MS_A}{MS_E}$ |
| B | $\frac{1}{an} \sum_j y_{.j.}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn}$ | $b - 1$ | $\sigma^2 + \frac{an \sum \beta_j^2}{b - 1}$ | $\frac{MS_B}{MS_E}$ |
| AB | $\frac{1}{n} \sum_i \sum_j y_{ij.}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn} - SS_A - SS_B$ | $(a - 1)(b - 1)$ | $\sigma^2 + \frac{n \sum \sum (\tau\beta)_{ij}^2}{(a - 1)(b - 1)}$ | $\frac{MS_{AB}}{MS_E}$ |
| Error | Subtraction | $(ab - 1)(n - 1)$ | σ^2 | |
| Total | $\sum_i \sum_j \sum_k y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn}$ | $abn - 1$ | | |

Exemplo

Uma engenheira está estudando métodos para melhorar a capacidade de detectar alvos em uma tela de radar.

Dois fatores que ela considera importantes são a quantidade de ruído de fundo, ou “desordem do solo”, na tela e o tipo de filtro colocado sobre a tela.

Um experimento é projetado usando três níveis de desordem do solo e dois tipos de filtro. Consideraremos esses como fatores do tipo fixo.

O experimento é realizado selecionando aleatoriamente uma combinação de tratamento (nível de desordem do solo e tipo de filtro) e, em seguida, introduzindo um sinal representando o alvo na tela.

Exemplo

O nível de intensidade deste alvo é aumentado até que o operador o observe. O **nível de intensidade na detecção** é então medido como a variável de resposta.

Devido à disponibilidade dos operadores, é conveniente seleccionar um operador e mantê-lo na tela até que todas as execuções necessárias tenham sido realizadas.

Além disso, **os operadores diferem em sua habilidade e capacidade de usar a tela**. Conseqüentemente, parece lógico usar os operadores como blocos.

Exemplo

Quatro operadores são selecionados aleatoriamente. Uma vez que um operador é escolhido, a ordem em que as seis combinações de tratamento são realizadas é determinada aleatoriamente.

Assim, temos um experimento fatorial 3×2 executado em blocos completos aleatorizados. Os dados estão mostrados na Tabela 5.21.

EXAMPLE 5.6

An engineer is studying methods for improving the ability to detect targets on a radar scope. Two factors she considers to be important are the amount of background noise, or “ground clutter,” on the scope and the type of filter placed over the screen. An experiment is designed using three levels of ground clutter and two filter types. We will consider these as fixed-type factors. The experiment is performed by randomly selecting a treatment combination (ground clutter level and filter type) and then introducing a signal representing the target into the scope. The intensity of this target is increased until the operator observes it. The intensity level at detection is then measured as the response variable. Because of operator availability, it is convenient to select an operator and keep him or her at the scope until all the necessary runs have been made. Furthermore, operators differ in their skill and ability to use the scope. Consequently, it seems logical to use the operators as blocks. Four operators are randomly selected. Once an operator is chosen, the order in which the six treatment combinations are run is randomly determined. Thus, we have a 3×2 factorial experiment run in a randomized complete block. The data are shown in Table 5.21.

The linear model for this experiment is

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \delta_k + \epsilon_{ijk} \quad \begin{cases} i = 1, 2, 3 \\ j = 1, 2 \\ k = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

where τ_i represents the ground clutter effect, β_j represents the filter type effect, $(\tau\beta)_{ij}$ is the interaction, δ_k is the block effect, and ϵ_{ijk} is the $NID(0, \sigma^2)$ error component. The sums of squares for ground clutter, filter type, and their interaction are computed in the usual manner. The sum of squares due to blocks is found from the operator totals $\{y_{\cdot k}\}$ as follows:

$$\begin{aligned} SS_{\text{Blocks}} &= \frac{1}{ab} \sum_{k=1}^n y_{\cdot k}^2 - \frac{y_{\cdot\cdot}^2}{abn} \\ &= \frac{1}{(3)(2)} [(572)^2 + (579)^2 + (597)^2 + (530)^2] \\ &\quad - \frac{(2278)^2}{(3)(2)(4)} \\ &= 402.17 \end{aligned}$$

■ **TABLE 5.21**
Intensity Level at Target Detection

| Operators (blocks) Filter Type | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | |
|-----------------------------------|-----|----|-----|----|-----|----|----|----|
| | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| Ground clutter | | | | | | | | |
| Low | 90 | 86 | 96 | 84 | 100 | 92 | 92 | 81 |
| Medium | 102 | 87 | 106 | 90 | 105 | 97 | 96 | 80 |
| High | 114 | 93 | 112 | 91 | 108 | 95 | 98 | 83 |

Experimentos fatoriais em blocos

■ TABLE 5.22

Analysis of Variance for Example 5.6

| Source of Variation | Sum of Squares | Degrees of Freedom | Mean Square | F_0 | P -Value |
|------------------------|----------------|--------------------|-------------|-------|------------|
| Ground clutter (G) | 335.58 | 2 | 167.79 | 15.13 | 0.0003 |
| Filter type (F) | 1066.67 | 1 | 1066.67 | 96.19 | <0.0001 |
| GF | 77.08 | 2 | 38.54 | 3.48 | 0.0573 |
| Blocks | 402.17 | 3 | 134.06 | | |
| Error | 166.33 | 15 | 11.09 | | |
| Total | 2047.83 | 23 | | | |

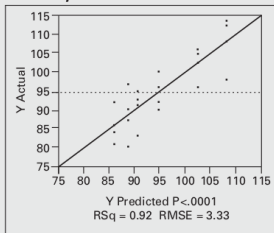
Experimentos fatoriais em blocos

■ TABLE 5.23

JMP Output for Example 5.6

Whole Model

Actual by Predicted Plot



Summary of Fit

| | |
|----------------------------|----------|
| RSquare | 0.917432 |
| RSquare Adj | 0.894497 |
| Root Mean Square Error | 3.329998 |
| Mean of Response | 94.91667 |
| Observations (or Sum Wgts) | 24 |

REML Variance component Estimates

| Random Effect | Var Ratio | Component | Std Error | 95% Lower | 95% Upper | Pct of Total |
|--------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|--------------|
| Operators (Blocks) | 1.8481964 | 20.494444 | 18.255128 | -15.28495 | 56.273839 | 64.890 |
| Residual | | 11.088889 | 4.0490897 | 6.0510389 | 26.561749 | 35.110 |
| Total | | 31.583333 | | | | 100.000 |

-2 LogLikelihood = 118.73680261

Experimentos fatoriais em blocos

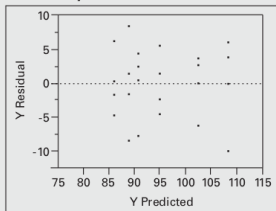
Covariance Matrix of Variance Component Estimates

| Random Effect | Operators (Blocks) | Residual |
|--------------------|-----------------------|-----------|
| Operators (Blocks) | 333.24972 | -2.732521 |
| Residual | -2.732521 | 16.395128 |

Fixed Effect Tests

| Source | Nparm | DF | DFDen | F Ratio | Prob > F |
|---------------------|-------|----|-------|---------|----------|
| Clutter | 2 | 2 | 15 | 15.1315 | 0.0003* |
| Filter Type | 1 | 1 | 15 | 96.1924 | <.0001* |
| Clutter*Filter Type | 2 | 2 | 15 | 3.4757 | 0.0575 |

Residual by Predicted Plot



No caso de duas restrições de aleatorização, cada uma com p níveis, se o número de combinações de tratamento em um delineamento fatorial de k fatores for exatamente igual ao número de níveis de restrição, ou seja, se $p = ab \dots m$, então o delineamento fatorial pode ser executado em um quadrado latino $p \times p$.

Por exemplo, considere uma modificação do experimento de detecção de alvos de radar do Exemplo 5.6.

Os fatores nesse experimento são tipo de filtro (dois níveis) e desordem no solo (três níveis), e os operadores são considerados como blocos.

Suponha agora que, devido ao tempo necessário para a configuração, apenas seis execuções possam ser feitas por dia.

Assim, os **dias se tornam uma segunda restrição de aleatorização**, resultando no delineamento de quadrado latino 6×6 , como mostrado na Tabela 5.24.

Planejamentos fatoriais - Quadrado latino

■ TABLE 5.24

Radar Detection Experiment Run in a 6×6 Latin Square

| Day | Operator | | | | | |
|-----|---------------------|---------------------|---------------------|--------------------|---------------------|---------------------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | $A(f_{1g_1} = 90)$ | $B(f_{1g_2} = 106)$ | $C(f_{1g_3} = 108)$ | $D(f_{2g_1} = 81)$ | $F(f_{2g_3} = 90)$ | $E(f_{2g_2} = 88)$ |
| 2 | $C(f_{1g_3} = 114)$ | $A(f_{1g_1} = 96)$ | $B(f_{1g_2} = 105)$ | $F(f_{2g_3} = 83)$ | $E(f_{2g_2} = 86)$ | $D(f_{2g_1} = 84)$ |
| 3 | $B(f_{1g_2} = 102)$ | $E(f_{2g_2} = 90)$ | $G(f_{2g_3} = 95)$ | $A(f_{1g_1} = 92)$ | $D(f_{2g_1} = 85)$ | $C(f_{1g_3} = 104)$ |
| 4 | $E(f_{2g_2} = 87)$ | $D(f_{2g_1} = 84)$ | $A(f_{1g_1} = 100)$ | $B(f_{1g_2} = 96)$ | $C(f_{1g_3} = 110)$ | $F(f_{2g_3} = 91)$ |
| 5 | $F(f_{2g_3} = 93)$ | $C(f_{1g_3} = 112)$ | $D(f_{2g_1} = 92)$ | $E(f_{2g_2} = 80)$ | $A(f_{1g_1} = 90)$ | $B(f_{1g_2} = 98)$ |
| 6 | $D(f_{2g_1} = 86)$ | $F(f_{2g_3} = 91)$ | $E(f_{2g_2} = 97)$ | $C(f_{1g_3} = 98)$ | $B(f_{1g_2} = 100)$ | $A(f_{1g_1} = 92)$ |

Planejamentos fatoriais - Quadrado latino

Nesta tabela, usamos as letras minúsculas f_i e g_j para representar os i -ésimos e j -ésimos níveis do tipo de filtro e da desordem no solo, respectivamente.

Ou seja, f_1g_2 representa o tipo de filtro 1 e desordem no solo média. Note que agora são necessários seis operadores, em vez de quatro como no experimento original, então o número de combinações de tratamento no delineamento fatorial 3×2 é exatamente igual ao número de níveis de restrição.

Além disso, neste delineamento, cada operador seria usado apenas uma vez por dia.

As letras latinas A, B, C, D, E e F representam as combinações de tratamento fatorial $3 \times 2 = 6$ da seguinte forma: $A = f_1g_1$, $B = f_1g_2$, $C = f_1g_3$, $D = f_2g_1$, $E = f_2g_2$ e $F = f_2g_3$.

Planejamentos fatoriais - Quadrado latino

Os cinco graus de liberdade entre as seis letras latinas correspondem aos efeitos principais do tipo de filtro (um grau de liberdade), desordem no solo (dois graus de liberdade) e sua interação (dois graus de liberdade). O modelo estatístico linear para este delineamento é

$$y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \tau_j + \beta_k + (\tau\beta)_{jk} + \theta_l + \epsilon_{ijk}$$

com

$$i = 1, 2, \dots, 6$$

$$j = 1, 2, 3$$

$$k = 1, 2$$

$$l = 1, 2, \dots, 6$$

Planejamentos fatoriais - Quadrado latino

$$y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \tau_j + \beta_k + (\tau\beta)_{jk} + \theta_l + \epsilon_{ijk}$$

onde τ_j e β_k são efeitos da desordem no solo e tipo de filtro, respectivamente, e α_i e τ_l representam as restrições de aleatorização de dias e operadores, respectivamente.

Planejamentos fatoriais - Quadrado latino

Para calcular as somas dos quadrados, a seguinte tabela de totais de tratamento é útil:

| Ground Clutter | Filter Type 1 | Filter Type 2 | $y_{j.}$ |
|-----------------------|----------------------|----------------------|-------------------|
| Low | 560 | 512 | 1072 |
| Medium | 607 | 528 | 1135 |
| High | <u>646</u> | <u>543</u> | <u>1189</u> |
| $y_{..k}$ | 1813 | 1583 | 3396 = $y_{....}$ |

Planejamentos fatoriais - Quadrado latino

■ TABLE 5.25

Analysis of Variance for the Radar Detection Experiment Run as a 3×2 Factorial in a Latin Square

| Source of Variation | Sum of Squares | Degrees of Freedom | General Formula for Degrees of Freedom | Mean Square | F_0 | P -Value |
|---------------------|----------------|--------------------|--|-------------|--------|------------|
| Ground clutter, G | 571.50 | 2 | $a - 1$ | 285.75 | 28.86 | <0.0001 |
| Filter type, F | 1469.44 | 1 | $b - 1$ | 1469.44 | 148.43 | <0.0001 |
| GF | 126.73 | 2 | $(a - 1)(b - 1)$ | 63.37 | 6.40 | 0.0071 |
| Days (rows) | 4.33 | 5 | $ab - 1$ | 0.87 | | |
| Operators (columns) | 428.00 | 5 | $ab - 1$ | 85.60 | | |
| Error | 198.00 | 20 | $(ab - 1)(ab - 2)$ | 9.90 | | |
| Total | 2798.00 | 35 | $(ab)^2 - 1$ | | | |