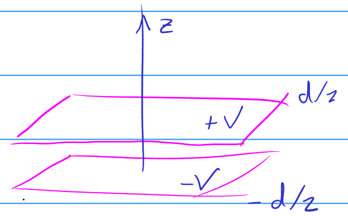
Resolução da P2

1.

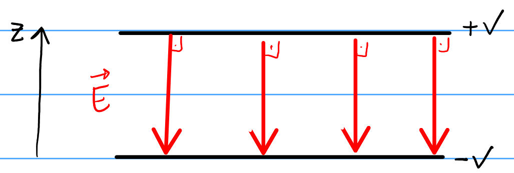
a) Eq. de Laplace: $\nabla^2 V = 0$



Logo, o potencial $V(x,y,z)$ deve satisfazer

$$\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0}$$

Temos, também, que o campo elétrico $\vec{E}$ é sempre perpendicular à superfície dos condutores



$\Rightarrow$ $E_x = 0$

$E_y = 0$

Logo $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$

Assim, nossas condições de contorno são

$$\boxed{\begin{array}{ll} (\mathrm{I})\ \dfrac{\partial V}{\partial x} = 0 & (\mathrm{III})\ V(x, y, d/2) = +V \\ (\mathrm{II})\ \dfrac{\partial V}{\partial y} = 0 & (\mathrm{IV})\ V(x,y,-d/2) = -V \end{array}}$$

b) $V(x,y,z) = X(x)\,Y(y)\,Z(z)$ (V)

Mas, de (I) e (II):

$\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \Rightarrow YZ\frac{\partial X}{\partial x} = 0$ $\;\Big|\!\!/\;$ $\frac{\partial V}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{XZ\,\partial Y}{\partial y} = 0$

Assim, tanto X quanto Y são constantes, o que nos permite reescrever (V) como

$$V(x,y,z) = XYZ(z) = AZ(z) \quad , \quad XY = A = cte$$

Agora, da eq. de Laplace, teremos

$$\nabla^2 V = 0 \Rightarrow A\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0$$

Logo $Z(z) = Z_0 + Z_1 z \Rightarrow V(z) = A(Z_0 + Z_1 z)$

Z_0 e Z_1 são constantes, então podemos escrever $V(z) = B_0 + B_1 z$

Com $AZ_0 = B_0$ e $AZ_1 = B_1$.

Usando as condições de contorno (III) e (IV):

$$V(d/2) = B_0 + B_1 \cdot d/2 = +V$$
$$V(-d/2) = B_0 - B_1 d/2 = -V$$
$$\Rightarrow 2B_1 \frac{d}{2} = 2V \Rightarrow B_1 = \frac{2V}{d}$$
$$B_0 = 0$$

Então: $$\boxed{V(x,y,z) = V(z) = \frac{2Vz}{d}}$$

c) $$\vec{E} = -\vec{\nabla} V(x,y,z) = -\frac{\partial V(z)}{\partial z}\hat{z} = -\frac{2V}{d}\hat{z}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{2V}{d}\hat{z}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}(-\hat{z})$$

campo entre placas paralelas

Placa $+V$: σ positivo

$$\vec{E} = \frac{\sigma_+}{2\epsilon_0}(-\hat{z}) = -\frac{2V\hat{z}}{2d} \Rightarrow \quad \sigma_+ = \frac{2V\epsilon_0}{d}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Placa } +V: \ \sigma = 2V\epsilon_0/d \\ \text{Placa } -V: \ \sigma = -2V\epsilon_0/d \end{array}}$$

d) Energia da placa de cima $(+V)$:

$$W_+ = \frac{1}{2}\int \sigma_+ V \, da = \frac{1}{2}\left(\frac{2V\epsilon_0}{d}\right) V A = \frac{V^2\epsilon_0 A}{d}$$

Energia da placa de baixo $(-V)$:

$$W_- = \frac{1}{2}\int \sigma_-(-V)\, da = \frac{1}{2}\left(\frac{-2V\epsilon_0}{d}\right)(-V)A = \frac{V^2\epsilon_0 A}{d}$$

Então, a energia total do sistema será

$$W_T = W_+ + W_- = \frac{2V^2\epsilon_0 A}{d} \qquad \boxed{W_T = \frac{2\epsilon_0 V^2 A}{d}}$$

e) $$W = \frac{\epsilon_0}{2}\int E^2 d\tau = \frac{\epsilon_0}{2}\left(\frac{4V^2}{d^2}\right)(d.A) = \boxed{\frac{2\epsilon_0 V^2 A}{d}}$$

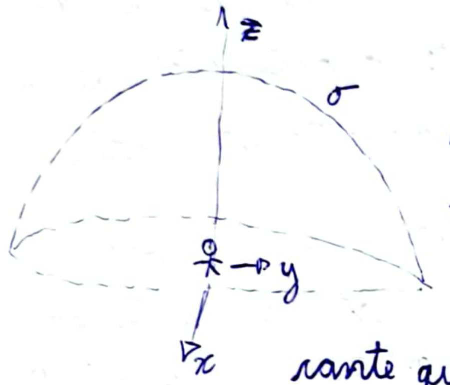
f) $$W = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2 \Rightarrow C = \frac{2W}{(\Delta V)^2} = 2\left(\frac{2\epsilon_0 V^2 A}{d}\right) \cdot \frac{1}{[V-(-V)]^2} = \frac{4\epsilon_0 V^2 A}{d(2V)^2}$$

$$\therefore \boxed{C = \frac{\epsilon_0 A}{d}}$$

Gabarito P2 - Questão 2.

2)

a.i) $z = 0$



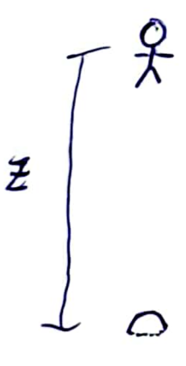
Na situação descrita toda a distribuição de carga está equidistante do nosso ponto de interesse e cada elemento de carga dessa distribuição contribuirá com um elemento infinitesimal de potencial $dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq}{R}$, o princípio da superposição nos garante que o potencial em um ponto será a soma de todos os potenciais gerados pelos elementos de carga na superfície do hemisfério.

Então $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_{total}}{R}$, como $Q_{total} = \sigma . A$, o potencial é dado por:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\sigma \cdot \frac{4\pi R^2}{2}}{R} = \boxed{\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}}$$

---

a.ii) $z \gg R$



À medida que nos afastamos da superfície ela se parecerá cada vez menor, de forma que os efeitos da geometria se tornem irrelevantes, se comportando como uma distribuição pontual de carga. Portanto seu potencial deve ser o ~~mesmo~~ mesmo de uma carga puntiforme

$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{z}$, onde novamente $Q = \sigma . A$,

portanto $$\boxed{V = \frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_0 z}}$$

a.iii) $z = R + a$, $a \ll R$

Estando suficiente perto em uma região acima da superfície, de nossa prospectiva, ela parecerá plana e portanto o potencial sentido deve corresponder ao de uma placa plana $V = -\frac{\sigma a}{2\varepsilon_0}$, no entanto ainda escite o potencial devido a fração da superfície que não estamos enchergando que também deverá ser proporcional a distância "a" da placa, $V = \gamma a$, e por último temos que levar em conta que a distuibuição de carga está associada a R, então deve excitir um termo proporcional a R como uma constante de referencial $V = \beta R$.

Assim, uma expressão para o potencial na situação deve ~~dos~~ ser $V = \underbrace{-\frac{\sigma a}{2\varepsilon_0}}_{\text{Parte plana}} + \underbrace{\gamma a}_{\text{Parte que não enchega}} + \underbrace{\beta R}_{\text{referencial}}$, onde γ e β são constantes difíceis de determinar sem fazer cálculos.

2.b)

b.i) $0 < z \ll R$

$$V(z) = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0 z}\left(\sqrt{R^2+z^2} - |R-z|\right) \Rightarrow V(z) = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0 z}\left[\sqrt{R^2\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)} - (R-z)\right]$$

$$= \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0 z}\left[R\left(1 + \frac{1}{2}\frac{z^2}{R^2}\right) - (R-z)\right] = \frac{\sigma z}{4\varepsilon_0 R} + \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}$$, tomando o limite $z \to 0$

$$\Rightarrow V(0) = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}$$

b.ii) $z \gg R$

$$V(z) = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0 z}\left(\sqrt{R^2+z^2} - |R-z|\right) \Rightarrow V(z) = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0 z}\left[z\sqrt{1+\frac{R^2}{z^2}} - (z-R)\right]$$

muito pequeno

$$= \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0 z}\left[\cancel{z}\left(\cancel{1} + \cancel{\frac{R^2}{2z^2}}\right) - (\cancel{z} - R)\right] \Rightarrow V(z) = \frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_0 z}$$

b. iii) $z = R + a$, $a \ll R$

$$V(z) = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0 z}\left(\sqrt{R^2+z^2} - |R - z|\right) \rightarrow V(R+a) = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0 (R+a)}\left[\sqrt{R^2+(R+a)^2} - (R+a-R)\right]$$

$$\Rightarrow V(R+a) = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0 (R+a)}\left[\sqrt{R^2+R^2+2Ra+\cancel{a^2}} - a\right]$$

$$= \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0 (R+a)}\left[\sqrt{2(R^2+Ra)} - a\right] = \frac{\sigma \cancel{R}}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{\cancel{R}}\cdot\left(1 - \frac{a}{R}\right)\left[R\sqrt{2}\left(1+\frac{a}{2R}\right) - a\right]$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{a}{R}\right)\left[R\sqrt{2}\left(1+\frac{a}{2R}\right) - a\right]$$, fazendo a distributiva temos:

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}R\sqrt{2} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{\cancel{R}\sqrt{2}a}{2\cancel{R}} - \frac{\sigma a}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma a}{2\varepsilon_0}\frac{\cancel{R}\sqrt{2}}{\cancel{R}} - \cancel{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{a}{R}\cdot\frac{a}{2R}} + \cancel{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{a}{R}\cdot a}$$

Portanto

$$V(R+a) = \underbrace{\frac{\sigma R\sqrt{2}}{2\varepsilon_0}}_{\text{Referencial}} - \underbrace{\frac{\sigma\sqrt{2}}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{a}{2}}_{\text{não menor}} - \underbrace{\frac{\sigma a}{2\varepsilon_0}}_{\text{plano}}$$

Relacionando com a. iii)

$$\gamma = -\frac{\sigma\sqrt{2}}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{2} \quad , \quad \beta = \frac{\sigma\sqrt{2}}{2\varepsilon_0}$$