Equação de Laplace

Introdução

A equação de Laplace $\Delta u = 0$ aparece com frequência nas ciências aplicadas, particularmente no estudo de fenômenos estacionários (independente do tempo), e suas soluções levam o nome de funções harmônicas. Por exemplo,

- Suponha que o fluxo seja irrotacional (sem redemoinhos) de modo que $\mathrm{rot}\vec{v} = 0$ numa região simplesmente conexa, onde $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$ é a velocidade na posição (x, y, z), assumido independente do tempo. Daí $\vec{v} = \nabla\phi$ para alguma função ϕ (chamada potencial de velocidade). Suponha que o fluido seja incompressível (por exemplo, água) e sem fontes ou sumidouros, então $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$. Portanto,

$$\Delta\phi = \mathrm{div}\,(\nabla\phi) = \mathrm{div}\,\vec{v} = 0,$$

  que é a equação de Laplace.

- A temperatura de um corpo homogêneo e isotrópico em condições de equilíbrio é harmônica e neste caso a equação de Laplace constitui a contraparte estacionária (independente do tempo) da equação de difusão.
- Seja a função $f = u + iv$ analítica num domínio do plano complexo. Então, em todo ponto do domínio valem as equações de Cauchy-Riemann:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x,$$

e, portanto,

$$u_{xx} = v_{xy}, \quad u_{yy} = -v_{xy}.$$

Assim, $\Delta u = 0$ em todos os pontos do domínio. Análogo para v, onde Δ é o operador laplaciano em dimensão dois.

A versão não homogênea da equação de Laplace

$$\Delta u = f,$$

para uma função f dada, é chamada equação de Poisson e desempenha um papel importante na teoria de campos conservativos (elétrico, magnético, gravitacional e outros) onde o campo vetorial é um gradiente de um potencial.

Por exemplo, em eletrostática, pela equações de Maxwell,

$$\mathrm{rot}\vec{E} = \vec{0} \quad \text{e} \quad \mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho$$

onde $\vec{E}$ é o campo elétrico gerado por uma distribuição de cargas em uma região Ω de $\mathbb{R}^3$ e ρ é a densidade de carga. A primeira equação diz que $\vec{E} = -\nabla\phi$ para alguma função escalar ϕ (chamada de potencial elétrico). Portanto,

$$\Delta u = \mathrm{div}(\nabla\phi) = -\mathrm{div}\vec{E} = -4\pi\rho,$$

a qual é uma equação de Poisson com $f = -4\pi\rho$. Se não houver carga em ω, então $\rho = 0$ e portanto u é uma função harmônica naquela região.

O problema matemático básico é resolver a equação de Laplace ou Poisson em um determinado domínio D com uma condição na fronteria ∂D de D:

- *O problema de Dirichlet*. Dada uma função contínua $h : \partial D \to \mathbb{R}$, determinar uma função $u : \overline{D} \to \mathbb{R}$ satisfazendo
$$\begin{cases} \Delta u = f \quad \text{em } D, \\ u = h \text{ sobre } \partial D. \end{cases}$$
- *O problema de Neumann*. Dada uma função contínua $h : \partial D \to \mathbb{R}$, determinar uma função $u : \overline{D} \to \mathbb{R}$ satisfazendo
$$\begin{cases} \Delta u = f \quad \text{em } D, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = h \text{ sobre } \partial D. \end{cases}$$
- *O problema com condição de Robin*. Dadas uma função contínua $h : \partial D \to \mathbb{R}$ e constante a, determinar uma função $u : \overline{D} \to \mathbb{R}$ satisfazendo
$$\begin{cases} \Delta u = f \quad \text{em } D, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} + au = h \text{ sobre } \partial D. \end{cases}$$

Exemplo. Considere o movimento browniano em um recipiente D. Isso significa que as partículas dentro de D movem-se aleatoriamente até atingirem a fronteira de D, quando param. Divida a fronteira de D arbitrariamente em duas partes, C_1 e C_2. Seja $u(x, y, z)$ a probabilidade de que uma partícula que começa no ponto (x, y, z) pare em algum ponto de C_1. Então pode-se deduzir que

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{em } D \\ u = 1 \text{ sobre } C_1 \text{ e } u = 0 \text{ sobre } C_2. \end{cases}$$

Assim, u é a solução de um problema de Dirichlet.

Princípio do Máximo

Teorema 1 (Princípio do Máximo). Seja D um conjunto aberto limitado conexo (em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$). Seja u uma função contínua em $\overline{D} = D \cup \partial D$ e harmônica em D. Então os valores máximo e mínimo de u são atingidos na fronteira ∂D de D e em nenhum ponto de D, a menos que u seja constante.

A ideia do princípio do máximo em dimensão 2 é a seguinte: em um ponto de máximo (x_0, y_0) no interior de D, se houvesse, teríamos $u_{xx}(x_0, y_0) \leq 0$ e $u_{yy}(x_0, y_0) \leq 0$ (teste de derivada segunda). Assim, $u_{xx}(x_0, y_0) + u_{yy}(x_0, y_0) \leq 0$. Se no ponto ponto de máximo tivéssemos $u_{xx}(x_0, y_0) < 0$ ou $u_{yy}(x_0, y_0) < 0$, teríamos

$$0 = \Delta u(x_0, y_0) = u_{xx}(x_0, y_0) + u_{yy}(x_0, y_0) < 0$$

o que é uma contradição. No entanto, como é possível que $u_{xx} = 0 = u_{yy}$ em um ponto máximo, temos que trabalhar um pouco mais para conseguir uma prova.

Demonstração (em dimensão 2). Dado $\epsilon > 0$, Defina a função

$$v(x,y) = u(x,y) + \epsilon(x^2 + y^2), \quad (x,y) \in \overline{D}.$$

Assim,

$$\Delta v = \Delta u + \epsilon \Delta(x^2 + y^2) = 0 + 4\epsilon > 0 \quad \text{em } D. \tag{1}$$

Como v é contínua em $\overline{D}$ e $\overline{D} = D \cup \partial D$ é compacto, v assume máximo e mínimo em $\overline{D}$. Se o máximo de v é atingindo em um ponto interior $(x_0, y_0) \in D$, então $\Delta v(x_0, y_0) \leq 0$, contradizendo (1). Assim, o máximo de v é atingido em ∂D. Daí, para todo $(x,y) \in D$, temos

$$u(x,y) \leq v(x,y) \leq v(x_0,y_0) = u(x_0,y_0) + \epsilon(x_0^2 + y_0^2) \leq \max_{\partial D} u + \epsilon L^2,$$

onde L é a maior distância de ∂D a origem.

Como isso é verdade para qualquer $\epsilon > 0$, temos

$$u(x, y) \leq \max_{\partial D} u, \quad \forall\, (x, y) \in D.$$

Agora este máximo é atingido em algum ponto $(x_M, y_M) \in \partial D$. Então

$$u(x, y) \leq u(x_M, y_M) \quad \forall (x, y) \in \overline{D},$$

como queríamos mostrar.

A prova da existência de um ponto mínimo é similar. A ausência de tais pontos no interior de D será provada posteriormente.

Unicidade do Problema de Dirichlet

Para provar a unicidade, suponha que u e v satisfazem

$$\Delta u = f \text{ em } D, \quad u = h \text{ sobre } \partial D$$

e

$$\Delta v = f \text{ em } D, \quad v = h \text{ sobre } \partial D.$$

Então $w = u - v$ satisfaz

$$\Delta w = 0 \text{ em } D, \quad w = 0 \text{ sobre } \partial D.$$

Pelo princípio do máximo,

$$0 = \min_{\partial D} w \leq w(x) \leq \max_{\partial D} u = 0, \quad \forall\, x \in D.$$

Portanto, $w \equiv 0$ e, portanto, $u \equiv v$.

Invariância em dimensão 2

O operador laplaciano é invariante por movimentos rígidos. Um movimento rígido no plano consiste de translações e rotações.

- Uma translação no plano é uma transformação

$$x' = x + a \qquad y' = y + b.$$

Como

$$u_{xx} + u_{yy} = u_{x'x'} + u_{y'y'},$$

isto prova a invariância por translação.

- Uma rotação no plano de ângulo α é dada por

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha \qquad y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

Pela regra da cadeia,

$$u_x = u_{x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + u_{y'}\frac{\partial y'}{\partial x} = \cos\alpha\, u_{x'} - \sin\alpha\, u_{y'}$$
$$u_y = u_{x'}\frac{\partial x'}{\partial y} + u_{y'}\frac{\partial y}{\partial x} = \sin\alpha\, u_{x'} + \cos\alpha\, u_{y'}$$

Novamente pela regra da cadeia,

$$
\begin{aligned}
u_{xx} &= (\cos\alpha u_{x'} - \sin\alpha u_{y'})_{x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + (\cos\alpha u_{x'} - \sin\alpha u_{y'})_{y'}\frac{\partial y'}{\partial x} \\
&= (\cos\alpha u_{x'} - \sin\alpha u_{y'})_{x'}\cos\alpha - (\cos\alpha u_{x'} - \sin\alpha u_{y'})_{y'}\sin\alpha \\
&= (\cos\alpha u_{x'x'} - \sin\alpha u_{y'x'})\cos\alpha - (\cos\alpha u_{x'y'} - \sin\alpha u_{y'y'})\sin\alpha \\
u_{yy} &= (\sin\alpha u_{x'} + \cos\alpha u_{y'})_{x'}\frac{\partial x'}{\partial y} + (\sin\alpha u_{x'} + \cos\alpha u_{y'})_{y'}\frac{\partial y'}{\partial y} \\
&= (\sin\alpha u_{x'} + \cos\alpha u_{y'})_{x'}\sin\alpha + (\sin\alpha u_{x'} + \cos\alpha u_{y'})_{y'}\cos\alpha \\
&= (\sin\alpha u_{x'x'} + \cos\alpha u_{y'x'})\sin\alpha + (\sin\alpha u_{x'y'} + \cos\alpha u_{y'y'})\cos\alpha
\end{aligned}
$$

Somando, obtemos

$$u_{xx} + u_{yy} = (u_{x'x'} + u_{y'y'})(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = u_{x'x'} + u_{y'y'}.$$

Comentário. Nas ciências físicas, o laplaciano é um modelo para situações físicas homogêneas (todas as posições são equivalentes) e isotrópicas (todas as direções são equivalentes).

Laplaciano em coordenadas polares

Considere o operador laplaciano em coordenadas cartesianas (x, y):

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

A transformação

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

tem matriz jacobiana

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

Pela regra da cadeia, temos

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

que matricialmente se escreve como

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \left[\frac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)}\right]^t \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

Sabemos que

$$\frac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)} = \left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right]^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{\sin\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix}$$

Assim,

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\dfrac{\sin\theta}{r} \\ \sin\theta & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} \\ \dfrac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \\
&= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \\
&= \cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \\
&\quad + \frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \\
&= \sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \\
&= \sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \\
&\quad - \frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}
\end{aligned}
$$

Somando estes dois operadores, obtemos,

$$
\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \qquad (2)
$$

Vamos usar a expressão do laplaciano em coordenadas polares para determinar as funções harmônicas no plano que são rotacionalmente invariantes (funções radiais). Isso significa que usamos coordenadas polares (r, θ) e procuramos soluções dependendo apenas de r. Por (2),

$$0 = u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r,$$

ou equivalentemente,

$$(ru_r)_r = 0,$$

a qual é uma edo cuja resolução por primitivação tem solução geral

$$u = c_1 \ln r + c_2 = c_1 \ln(x^2 + y^2)^{1/2} + c_2.$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

Invariância em dimensão 3

Uma rotação em dimensão 3 é dada por $X' = BX$, onde $X' = (x_1', x_2', x_3')^t$, $X = (x_1, x_2, x_3)^t$ e B é uma matriz ortogonal ($B^tB = BB^t = I$). O laplaciano é

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{3} u_{x_i x_i} = \sum_{i,j=1}^{3} \delta_{ij} u_{x_i x_j},$$

onde $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$, Assim,

$$\Delta u = \sum_{k,l=1}^{3} \left(\sum_{i,j=1}^{3} b_{ki} \delta_{ij} b_{lj} \right) u_{x_k' x_l'} = \sum_{k,l=1}^{3} \delta_{kl} u_{x_k' x_l'} = \sum_{k=1}^{3} u_{x_k' x_k'},$$

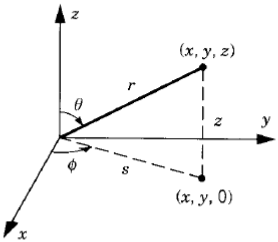
pois

$$\sum_{i,j=1}^{3} b_{ki} \delta_{ij} b_{lj} = \sum_{i=1}^{3} b_{ki} b_{li} = (BB^t)_{kl} = \delta_{kl}.$$

Portanto,

$$u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + u_{x_3 x_3} = u_{x_1' x_1'} + u_{x_2' x_2'} + u_{x_3' x_3'}.$$

Laplaciano em coordenadas esféricas



$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{s^2 + z^2}$$

$$s = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x = s \cos \phi$$

$$y = s \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

$$s = r \sin \theta$$

O cálculo direto do laplaciano em coordenadas esféricas é longo. Por isto seguimos outro caminho usando a expressão do laplaciano em duas variáveis em termos das coordenadas polares.

A cadeia de variáveis é

$$(x, y, z) \to (s, \phi, z) \to (r, \theta, \phi).$$

Pelo cálculo do laplaciano em dimensão dois, temos

$$u_{zz} + u_{ss} = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}, \tag{3}$$

$$u_{xx} + u_{yy} = u_{ss} + \frac{1}{s} u_s + \frac{1}{s^2} u_{\phi\phi}. \tag{4}$$

Somando as duas equações e cancelando u_{ss}, obtemos

$$\begin{aligned} \Delta u &= u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} \\ &= u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{1}{s} u_s + \frac{1}{s^2} u_{\phi\phi} \end{aligned}$$

Precisamos expressar u_s em coordenandas esféricas. Pela regra da cadeia,

$$u_s = u_r \frac{\partial r}{\partial s} + u_\theta \frac{\partial \theta}{\partial s} + u_\phi \frac{\partial \phi}{\partial s} = u_r \frac{\partial r}{\partial s} + u_\theta \frac{\partial \theta}{\partial s},$$

pois em (4) mantemos z fixo e tomamos s e ϕ como variáveis independentes, de modo que $\frac{\partial \phi}{\partial s} = 0$.

De

$$\theta = \arctan(s/z),$$

segue que

$$\frac{\partial\theta}{\partial s} = \frac{1}{1+(s/z)^2}\frac{1}{z} = \frac{z}{z^2+s^2} = \frac{\cos\theta}{r}.$$

Como

$$r = \frac{s}{\sin\theta},$$

temos

$$\frac{\partial r}{\partial s} = \frac{\sin\theta - s\cos\theta\dfrac{\partial\theta}{\partial s}}{\sin^2\theta} = \frac{\sin\theta - s\cos\theta\dfrac{\cos\theta}{r}}{\sin^2\theta} = \sin\theta$$

Substituindo,

$$u_s = \sin\theta u_r + \frac{\cos\theta}{r}u_\theta$$

e portanto

$$\frac{1}{s}u_s = \frac{1}{r}u_r + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}u_\theta = \frac{1}{r}u_r + \frac{\cot\theta}{r^2}u_\theta.$$

Portanto,

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{\cot\theta}{r^2} u_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} u_{\phi\phi}. \tag{5}$$

Vamos procurar as funções harmônicas especiais em três dimensões que não mudam com as rotações, ou seja, que dependem apenas de r. Por (5), elas satisfazem a edo:

$$0 = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r.$$

Assim,

$$(r^2 u_r)_r = 0,$$

cuja solução geral é

$$u = c_1 \frac{1}{r} + c_2 = c_1 (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} + c_2.$$

Retângulos e Cubos

Exemplo 1. Dado um retângulo

$$D = \{(x, y) \mid 0 < x < a, 0 < y < b\}$$

e as funções $g, h : [0, a] \to \mathbb{R}$ e $j, k : [0, b] \to \mathbb{R}$, determinar a solução do problema de valor de fronteira:

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad \text{em } D, \\ u_y(x, 0) + u(x, 0) = h(x), \; u(x, b) = g(x), \quad 0 \le x \le a, \\ u(0, y) = j(y), \; u_x(a, y) = k(y), \quad 0 \le y \le b. \end{cases}$$

Solução. Se denotarmos a solução u com dados de fonteira (g, h, j, k), então $u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$, onde u_1 tem condição de fronteira $(g, 0, 0, 0)$, u_2 tem condição de fronteira $(0, h, 0, 0)$, u_3 tem condição de fronteira $(0, 0, j, 0)$ e u_4 tem condição de fronteira $(0, 0, 0, k)$. Vamos determinar u_1 para exemplificar o método e a determinação de u_2, u_3 e u_4 é deixada como exercício.

Vamos encontrar a solução de

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad \text{em } D, \\ u_y(x,0) + u(x,0) = 0,\ \ u(x,b) = g(x), \quad 0 \leq x \leq a, \\ u(0,y) = 0,\ \ u_x(a,y) = 0, \quad 0 \leq y \leq b. \end{cases}$$

Para tanto, usaremos o método da separação de variáveis.
Escrevendo $u(x,y) = X(x)Y(y)$, obtemos

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0.$$

Portanto existe uma constante λ tal que

$$(\star) \begin{cases} X'' + \lambda X = 0,\ \ 0 < x < a \\ X(0) = X'(a) = 0 \end{cases} \qquad (\star\star) \begin{cases} Y'' - \lambda Y = 0,\ \ 0 < y < b \\ Y'(0) + Y(0) = 0 \end{cases}$$

O problema ($\star$) foi motivo de estudo no Exercício 3 da Lista 6. As soluções são

$$\beta_n^2 = \lambda_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{a^2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \tag{6}$$

$$X_n(x) = \sin \frac{(n + \frac{1}{2})\pi x}{a}. \tag{7}$$

Para cada $\lambda = \beta_n^2$, a solução geral da edo do problema ($\star\star$) é

$$Y(y) = A \cosh \beta_n y + B \sinh \beta_n y.$$

Logo $0 = Y'(0) + Y(0) = B\beta_n + A$. Como A e B são variáveis livres e satisfazem somente uma equação, o grau de liberdade é 1. Assim, fazendo sem perda de generalidade $B = -1$, obtemos $A = \beta_n$ e, portanto,

$$Y(y) = \beta_n \cosh \beta_n y - \sinh \beta_n y. \tag{8}$$

Portanto,

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \beta_n x (\beta_n \cosh \beta_n y - \sinh \beta_n y)$$

é uma função harmôncia no retângulo D que satisfaz as três condições de fronteira homogêneas. Resta a condição de fronteira $u(x,b) = g(x)$, $0 \leq x \leq a$, a qual requer que

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (\beta_n \cosh \beta_n b - \sinh \beta_n b) \sin \beta_n x$$

para todo $0 \leq x \leq a$. Portanto, as quantidades $A_n(\beta_n \cosh \beta_n b - \sinh \beta_n b))$ devem ser os coeficientes na série de Fourier de senos de período $2a$ para g e são dadas por

$$A_n = \frac{2}{a} (\beta_n \cosh \beta_n b - \sinh \beta_n b))^{-1} \int_a^b g(x) \sin \beta_n x dx$$

para $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Exemplo 2. Use o método de separação de variáveis para uma caixa retangular em $\mathbb{R}^3$ ($0 < x < a$, $0 < y < b$, $0 < z < c$) com condições de fronteira na seis faces. Vamos considerar o problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, \quad \text{em } D, \\ D = \{(x,y,z) \mid 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, 0 < z < \pi\}, \\ u(0,y,z) = u(x,0,z) = u(x,\pi,z) = u(x,y,0) = u(x,y,\pi) = 0, \\ u(\pi,y,z) = g(y,z). \end{cases}$$

Solução. Para resolver este problema separamos as variáveis da

forma e usamos as cinco condições de fronteira homogêneas para obter

$$u(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z) = 0, \qquad \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0$$
$$X(0) = Y(0) = Z(0) = Y(\pi) = Z(\pi) = 0.$$

Cada quociente X''/X, Y''/Y, Z''/Z é constante. As condições de Dirichlet $Y(0) = Z(0) = Y(\pi) = Z(\pi) = 0$ implicam

$$Y(y) = \sin(my) \text{ e } Z(z) = \sin(nz),$$

para $m, n = 1, 2, \ldots$. Daí,

$$0 = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = \frac{X''}{X} - m^2 - n^2$$

ou seja

$$X'' = (m^2 + n^2)X,$$

com condição de fronteira $X(0) = 0$. Portanto,

$$X(x) = A \sinh\left(\sqrt{(m^2 + n^2)}\, x\right).$$

A função

$$u(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \sinh\left(\sqrt{(m^2 + n^2)}\, x\right) \sin(my) \sin(nz) \tag{9}$$

é harmônica em D e satisfaz as cinco condições de fronteira homogêneas. Impondo a condição de fronteira não homogênea em

$$g(y,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_{mn}\sinh\left(\sqrt{(m^2+n^2)}\,\pi\right)\sin(my)\sin(nz)$$

Esta é uma série dupla de Fourier de senos nas variáveis y e z e sua teoria é semelhante ao da série simples de Fourier. De fato, as autofunções $\{\sin(my)\sin(nz)\}$ são mutuamente ortogonais no quadrado $\{(y,z)\mid 0<y<\pi, 0<z<\pi\}$ (ver lista de exercícios). As constantes de normalização das autofunções são

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2(my)\sin^2(nz)dydz=\frac{\pi^2}{4}.$$

Portanto,

$$A_{mn}=\frac{4}{\pi^2\sinh(\sqrt{(m^2+n^2)}\,\pi)}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}g(y,z)\sin(my)\sin(nz)dydz. \tag{10}$$

Portanto, a solução do Exemplo 2 é expressa como a série dupla infinita (9) com coeficientes A_{mn} dados por (10).

Problema de Dirichlet no Disco - Fórmula de Poisson

Sejam $B_a(0) \subset \mathbb{R}^2$ uma bola aberta de centro $(0,0)$ e raio $a > 0$ e $h \in C(\partial B_a(0))$ uma função dada, onde $\partial B_a(0)$ denota a fronteira de $B_a(0)$, determinar a função $u \in C^2(B_a(0)) \cap C(\overline{B_a(0)})$ solução do problema de Dirichlet para a equação de Laplace

$$(P) \quad \begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, & (x,y) \in B_a(0) \\ u(x,y) = h(x,y), & (x,y) \in \partial B_a(0) \end{cases}$$

Solução. A simetria de $B_a(0)$ sugere a mudança de coordenadas polares

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$$

e

$$\begin{aligned} U(r,\theta) &= u(r\cos\theta, r\sin\theta) \\ H(\theta) &= h(a\cos\theta, a\sin\theta). \end{aligned}$$

Escrevendo o laplaciano em coordenadas polares, temos

$$U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\theta\theta} = 0, \quad 0 < r < a,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

com a condição de Dirichlet

$$U(a,\theta) = H(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Como a solução u é contínua no disco (fechado), U e H são contínuas em $[0, a] \times [0, 2\pi]$ e $[0, 2\pi]$, resp., e também periódicas de período 2π em relação a θ.

Aplicando o método de separação de variáveis, vamos procurar soluções da forma

$$U(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta).$$

Substituindo na equação de Laplace, encontramos

$$R''(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r}R'(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta) = 0,$$

ou seja,

$$-\frac{r^2 R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = -\lambda \quad \text{(constante)}.$$

Assim obtém-se duas edo

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0 \tag{11}$$

e o problema de autovalor

$$\Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0 \tag{12}$$

$$\Theta(0) = \Theta(2\pi) \tag{13}$$

A EDO (12) só tem solução não nula se $\lambda \geq 0$ (verifique).

Para $\lambda = 0$, a solução é $\Theta(\theta) = A$, onde A é uma constante arbitrária.

Para $\lambda > 0$, a solução geral de da EDO (12) é

$$\Theta(\theta) = A\cos\sqrt{\lambda}\theta + B\sin\sqrt{\lambda}\theta.$$

A periodicidade 2π de Θ implica que $\lambda = n^2$, $(n = 1, 2, \dots)$.

Para $n = 0$, a equação EDO (11) tem solução geral

$$R(r) = c_1 \ln r + c_2.$$

Como R deve ser limitada, excluímos $\ln r$, e isso implica $c_1 = 0$.

Para $n > 0$, a equação (11) é do tipo Euler com soluções da forma $R(r) = r^\alpha$. Como $\lambda = n^2$, temos

$$\alpha(\alpha - 1)r^\alpha + \alpha r^\alpha - n^2 r^\alpha = 0.$$

Portanto, $\alpha = \pm n$. Assim, a solução geral

$$R(r) = c_1 r^{-n} + c_2 r^n.$$

Como R deve ser limitada, excluímos r^{-n}, e isso implica $c_1 = 0$.

Assim, encontramos os infinitos harmônicos elementares

$$r^n(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

com A_n e B_n constantes quaisquer, que sobrepondo-os (a equação de Laplace é linear) obtemos o candidato natural a solução:

$$U(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta). \tag{14}$$

Os coeficientes A_n e B_n devem ser escolhidos de modo a satisfazer a condição no limite

$$\lim_{(r,\theta)\to(a,\phi)} U(r,\theta) = H(\phi), \qquad \forall\, \phi \in [0, 2\pi]. \tag{15}$$

Caso 1: $H \in C^1([0, 2\pi])$. Neste caso, pelo teorema da convergência uniformemente da série de Fourier, temos

$$H(\phi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a^n(\alpha_n \cos n\phi + \beta_n \sin n\phi). \qquad (16)$$

Assim,

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} H(\phi) \cos n\phi \, d\phi \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \qquad (17)$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} H(\phi) \sin n\phi \, d\phi \quad (n = 1, 2, \dots) \qquad (18)$$

A identidade (15) é portanto satisfeita se escolhermos

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{2}, \quad A_n = \frac{\alpha_n}{a^n}, \quad A_n = \frac{\beta_n}{a^n}.$$

Portanto, substituímos esses valores de A_0, A_n, B_n em (14) e reorganizamos os termos adequadamente; para $r \leq a$ obtemos:

$$\begin{aligned}
U(r,\theta) &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(\phi)d\phi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{\pi a^n}\int_0^{2\pi} H(\phi)[\cos n\phi \cos n\theta + \sin n\phi \sin n\theta]d\phi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(\phi)\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n \cos n(\theta - \phi)d\phi\right].
\end{aligned}$$

A integração termo a termo é justificada pela convergência uniforme da série. Observamos também que, para $r < a$, a série na última integral converge uniformemente juntamente com as derivadas de qualquer ordem, de modo que não há problema em diferenciar primeiro sob o sinal de integral e depois termo a termo. Como é uma série de funções harmônicas, $U(r, \theta)$ também é harmônico para $r < a$ (e também $C^\infty(B_a)$).

Para calcular a soma desta última série, observamos que

$$
\begin{aligned}
1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{n}\cos n(\theta-\phi) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{n}\left[e^{in(\theta-\phi)} + e^{-in(\theta-\phi)}\right] \\
&= 1 + \frac{\frac{r}{a}e^{i(\theta-\phi)}}{1-\frac{r}{a}e^{i(\theta-\phi)}} + \frac{\frac{r}{a}e^{-i(\theta-\phi)}}{1-\frac{r}{a}e^{-i(\theta-\phi)}} \\
&= \frac{a^2-r^2}{a^2+r^2-2ar\cos(\theta-\phi)},
\end{aligned}
$$

Substituindo esta expresão na fórmula de $U(r,\theta)$ obtemos

$$
\boxed{U(r,\theta) = \frac{a^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{H(\phi)}{a^2+r^2-2ar\cos(\theta-\phi)}\,d\phi} \qquad (19)
$$

conhecida como a fórmula de Poisson.

A fórmula de Poisson pode ser escrita de forma mais geométrica como segue. Escrevemos $X = (x, y)$ para um ponto no interior da bola $B_a(0)$ com coordenadas polares (r, θ) e $X' = (x', y')$ para um ponto na fronteira $\partial B_a(0)$ da bola com coordenadas polares (a, ϕ), ou seja,

$$X = (r\cos\theta, r\sin\theta), \qquad X' = (a\cos\phi, a\sin\phi).$$

A origem O e os pontos X e X' formam um triângulo de lados $r = |X|$, $a = |X'|$ e $|X - X'|$ (Figura 1). Assim,

$$\begin{aligned} |X - X'|^2 &= (r\cos\theta - a\cos\phi)^2 + (r\sin\theta - a\sin\phi)^2 \\ &= r^2 + a^2 - 2ar(\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi) \\ &= r^2 + a^2 - 2ar\cos(\theta - \phi), \end{aligned}$$

que é a lei dos cossenos.

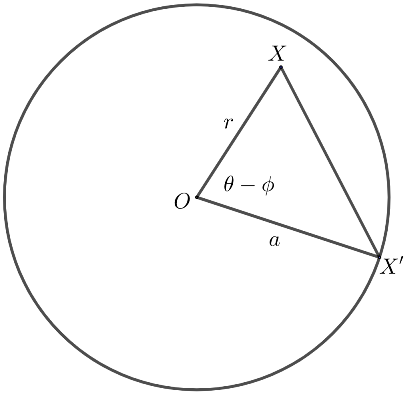


Figure: 1.

Usando isso e a definição de integral de linha de uma função escalar, obtemos

$$
\begin{aligned}
U(r,\theta) &= \frac{a^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{H(\phi)}{a^2+r^2-2ar\cos(\theta-\phi)}\,d\phi\\
&= \frac{a^2-r^2}{2\pi a}\int_0^{2\pi}\frac{H(\phi)}{a^2+r^2-2ar\cos(\theta-\phi)}\,a d\phi\\
&= \frac{a^2-|(x,y)|^2}{2\pi a}\int_{\partial B_a(0)}\frac{h(x',y')}{|(x,y)-(x',y')|^2}ds
\end{aligned}
$$

Portanto a fórmula de Poisson assume a forma alternativa

$$
\boxed{u(x,y) = \frac{a^2-|(x,y)|^2}{2\pi a}\int_{\partial B_a(0)}\frac{h(x',y')}{|(x,y)-(x',y')|^2}ds} \qquad (20)
$$

para todo $(x,y)\in B_a(0)$.

Observação.

O princípio de máximo garante que (20) é a única solução do problema de Dirichlet (P). Em particular, como $u(x) \equiv 1$ é a solução do problema de Dirichlet com dado $h \equiv 1$, deduzimos a fórmula

$$1 = \frac{a^2 - |(x,y)|^2}{2\pi a} \int_{\partial B_a(0)} \frac{1}{|(x,y) - (x',y')|^2} ds. \tag{21}$$

Caso 2: $H \in C([0, 2\pi])$ ou seja $h \in C(\partial B_a(0))$. Mostramos que ((14), ou alternativamente (20), é a solução do problema (P) sob a hipótese adicional de que $H(\theta) = h(a\cos\theta, a\sin\theta)$ tinha derivadas contínuas. Mesmo que h seja apenas contínua, a fórmula (20) faz todo o sentido e define uma função harmônica em $B_a(0)$ (e também da classe $C^\infty B_a(0)$). Resta provar que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = h(x_0, y_0), \quad \forall\,(x_0, y_0) \in \partial B_a(0). \tag{22}$$

Seja $(x_0, y_0) \in \partial B_a(0)$ e $\epsilon > 0$. Como $h \in C(\partial B_a(0))$, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ e um arco de circunferência $\Gamma_\delta = B_\delta(x_0, y_0) \cap \partial B_a(0)$ tal que

$$(x, y) \in \Gamma_\delta \Rightarrow |h(x, y) - h(x_0, y_0)| < \epsilon. \tag{23}$$

Usando (21), temos

$$\begin{aligned}
u(x, y) - h(x_0, y_0) &= \frac{a^2 - |(x, y)|^2}{2\pi a} \int_{\partial B_a(0)} \frac{h(x', y') - h(x_0, y_0)}{|(x, y) - (x', y')|^2} ds \\
&= \frac{a^2 - |(x, y)|^2}{2\pi a} \int_{\Gamma_\delta} \frac{h(x', y') - h(x_0, y_0)}{|(x, y) - (x', y')|^2} ds \\
&\quad + \frac{a^2 - |(x, y)|^2}{2\pi a} \int_{\partial B_a(0) \setminus \Gamma_\delta} \frac{h(x', y') - h(x_0, y_0)}{|(x, y) - (x', y')|^2} ds \\
&= I + II.
\end{aligned}$$

Sendo $|u(x, y) - h(x_0, y_0)| \le |I| + |II|$, basta mostrar que $|I| \le \epsilon$ em que $|II| \to 0$ quando $(x, y) \to (x_0, y_0)$.

Por (23) e (21), temos

$$
\begin{aligned}
|I| &\leq \frac{a^2 - |(x,y)|^2}{2\pi a} \int_{\Gamma_\delta} \frac{|h(x',y') - h(x_0,y_0)|}{|(x,y)-(x',y')|^2} ds \\
&\leq \epsilon \frac{a^2 - |(x,y)|^2}{2\pi a} \int_{\partial B_a(0)} \frac{1}{|(x,y)-(x',y')|^2} ds \\
&= \epsilon.
\end{aligned}
$$

Se $(x,y) \to (x_0,y_0)$ e $(x',y') \in \partial B_a(0) \setminus \Gamma_\delta$, então

$$
a^2 - |(x,y)|^2 \to 0 \quad \text{e} \quad |(x,y) - (x',y')| \geq \delta/2,
$$

e assim,

$$
\begin{aligned}
|II| &\leq \frac{a^2 - |(x,y)|^2}{2\pi a} \int_{\partial B_a(0) \setminus \Gamma_\delta} \frac{|h(x',y') - h(x_0,y_0)|}{|(x,y)-(x',y')|^2} ds \\
&\leq \frac{4 \max |h|}{\delta^2} (a^2 - |(x,y)|^2) \to 0.
\end{aligned}
$$

Em resumo, temos o seguinte resultado:

Teorema 2. Se $h \in C(\partial B_a(0))$, então a fórmula de Poisson (25) ou (20) fornece a única função harmônica em $B_a(0)$ para a qual

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = h(x_0,y_0), \quad \forall\,(x_0,y_0) \in \partial B_a(0). \tag{24}$$

Isto significa que $u(x,y)$ dada por (25) ou (20) é uma função contínua em $\overline{B_a(0)} = B_a(0) \cap \partial B_a(0)$.

A extensão da fórmula de Poisson em dimensão $n \geq 2$ e em bolas centradas em um ponto P é: Se $B_a(P) \subset \mathbb{R}^n$ e $h \in C(\partial B_a(P))$, a solução do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } B_a(P) \\ u = h & \text{sobre } \partial B_a(P) \end{cases}$$

é dada por

$$u(X) = \frac{a^2 - |X - P|^2}{\omega_n a} \int_{\partial B_a(P)} \frac{h(X')}{|X - X'|^n} ds, \qquad (25)$$

para todo $X \in B_a(P)$, ω_n é a área da superfície da esfera unitária em $\mathbb{R}^n$; em particular, $\omega_2 = 2\pi$ e $\omega_3 = 4\pi$

Consequências da fórmula de Poisson

Teorema 3 (Propriedade da Média). Seja u uma função harmônica em $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Então para cada bola $B_a(P)$, com raio a e centro P, tal que $B_a(P) \subset\subset \Omega$, são válidas as fórmulas

$$u(P) = \frac{1}{2\pi a} \int_{\partial B_a(P)} u(X')ds \tag{26}$$

$$u(P) = \frac{1}{\pi a^2} \int_{B_a(P)} u(X')dX' \tag{27}$$

A fórmula (26) diz que o valor de u no centro de $B_a(P)$ é igual a média de u sobre a circunferência $\partial B_a(P)$.

E a fórmula (27) diz que o valor de u no centro de $B_a(P)$ é igual a média de u sobre a bola $B_a(P)$.

Demonstração. Fazendo $X = P$ na fórmula de Poisson (25) para $n = 2$, obtemos

$$\begin{aligned} u(P) &= \frac{a^2}{2\pi a} \int_{\partial B_a(P)} \frac{u(X')}{|P - X')|^2} ds \\ &= \frac{a^2}{2\pi a} \int_{\partial B_a(P)} \frac{u(X')}{a^2} ds \\ &= \frac{1}{2\pi a} \int_{\partial B_a(P)} u(X') ds. \end{aligned}$$

Portanto, obtemos a fórmula da média (26)

$$\boxed{u(P) = \frac{1}{2\pi a} \int_{\partial B_a(P)} u(X') ds}$$

Para provar a fórmula da média (27), dado $0 < r < a$, pela fórmula da média (26)

$$u(P) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B_r(P)} u(X') ds = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} u(p_1 + r\cos\theta, p_2 + r\sin\theta) r d\theta.$$

Multiplicando essa equação por r e integrando em r no intervalo $(0, a)$, obtemos

$$\begin{aligned} u(P)\frac{a^2}{2} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^a \left[\int_0^{2\pi} u(p_1 + a\cos\theta, p_2 + a\sin\theta) r d\theta \right] dr \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{B_a(P)} u(X') dX'. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\boxed{u(P) = \frac{1}{\pi a^2} \int_{B_a(P)} u(X') dX'}$$

A extensão da fórmula da média para dimensão $n \geq 2$ é dada pelo seguinte teorema.

Teorema 4 (Propriedade da Média). Seja u uma função harmônica em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Então para cada bola $B_a(P)$, com raio a e centro P, tal que $B_a(P) \subset\subset \Omega$, são válidas as fórmulas

$$u(P) = \frac{1}{w_n a^{n-1}} \int_{\partial B_a(P)} u(X')ds \tag{28}$$

$$u(P) = \frac{1}{w_n a^n} \int_{B_a(P)} u(X')dX' \tag{29}$$

Muito mais significativo é a recíproca da Propriedada da Média.

Dizemos que uma função contínua u satisfaz a propriedade de média em Ω se (28) ou (29) vale para toda bola $B_a(x) \subset\subset \Omega$.

Teorema 5. Seja $u \in C(\Omega)$. Se u satisfaz propriedade média, então $u \in C^\infty(\Omega)$ e é harmônica em Ω.

Para a prova deste teorema vamos precisar do seguinte princípio do máximo forte.

Teorema 6 (Princípio do Máximo). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e conexo. Se $u \in C(\Omega)$ satisfaz a propriedade da média em Ω e $P \in \Omega$ é um ponto extremo (máximo ou mínimo) global de u, então u é constante. Em particular, se Ω é limitado e $u \in C(\overline{\Omega})$ é não constante, então, para todo $X \in \Omega$,

$$u(X) < \max_{\partial\Omega} u \quad \text{e} \quad u(X) > \min_{\partial\Omega} u.$$

Demonstração. Suponha que u assuma valor máximo M num ponto P interior de D, isto é,

$$M = u(P) \geq u(Y), \qquad \forall\, Y \in D.$$

Vamos mostrar que $u \equiv M$ em D. Seja Q um ponto outro qualquer de D. Como D é conexo, é sempre possível determinar uma sequência finita de bolas $B(X_j) \subset\subset D$, $j = 0, \ldots, N$, tal que

$$\begin{aligned} & X_j \in B(X_{j-1}),\ \text{para } j = 1, \ldots, N, \\ & X_0 = P,\ X_N = Q. \end{aligned}$$

Pela propriedade da média (27),

$$M = u(P) = \frac{1}{|B(P)|} \int_{B(P)} u(Y) dY.$$

Suponha que exista $Z \in B(P)$ tal que $u(Z) < M$. Tomando uma bola $B_r(Z) \subset B(P)$ podemos escrever

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{|B(P)|} \int_{B(P)} u(Y) dY \qquad (30) \\ &= \frac{1}{|B(P)|} \left[\int_{B(P) \setminus B_r(Z)} u(Y) dY + \int_{B_r(Z)} u(Y) dY \right] \end{aligned}$$

Usando a propriedade da média (27),

$$\int_{B_r(Z)} u(Y)dY = u(Z)|B_r(Z)| < M|B_r(Z)|. \tag{31}$$

Como $u(Y) \leq M$ para qualquer $Y \in D$, por (30) e (31), temos

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{|B(P)|}\left[\int_{B(P)\setminus B_r(Z)} u(Y)dY + \int_{B_r(Z)} u(Y)dY\right] \\ &< \frac{1}{|B(P)|}\left[M|B(P)\setminus B_r(Z)| + M|B_r(Z)|\right] = M, \end{aligned}$$

o que é impossível. Portanto, $u \equiv M$ em $B(P)$. Em particular, $u(X_1) = M$.

Repetindo o raciocínio, obtemos que $u \equiv M$ em $B(X_1)$ e, em particular, em $u(X_2) = M$. Iterando o procedimento, deduzimos que $u = M$ também em $X_N = Q$. Como Q é um ponto arbitrário de D, concluímos que $u \equiv M$ em todo D.

Corolário (Princípio do máximo forte). Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto limitado conexo. Seja u uma função contínua em $\overline{D} = D \cup \partial D$ e harmônica em D. Então os valores máximo e mínimo de u são atingidos na fronteira ∂D de D e em nenhum ponto de D, a menos que u seja constante.

Demonstração do Teorema 5.

Primeiramente observamos que se duas funções possuem a propriedade média em um domínio Ω, então sua diferença também possui a mesma propriedade. Agora seja $u \in C(\Omega)$ com a propriedade média e considere uma bola $B \subset\subset \Omega$. Seja v a solução do problema

$$\Delta v = 0 \text{ em } B, \quad v = u \text{ sobre } \partial B.$$

Pelo Teorema 2, $v \in C^\infty(B) \cap C(B)$ e sendo harmônica tem a propriedade média em B. Então a função $w = v - u$ também tem a propriedade média em B e portanto assume máximo e mínimo em B. Como $w = 0$ em ∂B concluímos que $u = v$ e portanto $u \in C^\infty(B)$ e é harmônica. Como $B \subset\subset \Omega$ é arbitrária a prova termina.

Desigualdade de Harnack e teorema de Liouville

Das fórmulas de Poisson e média obtemos outro princípio máximo, conhecida como desigualdade de Harnack.

Teorema 7 (Desigualdade de Harnack). Seja u uma função harmônica e não negativa em $B_R = B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$. Então, para todo $X \in B_R$,

$$\frac{R^{n-2}(R - |X|)}{(R + |X|)^{n-1}} u(0) \leq u(X) \leq \frac{R^{n-2}(R + |X|)}{(R - |X|)^{n-1}} u(0)$$

Demonstração. Pela fórmula de Poisson

$$u(X) = \frac{R^2 - |X|^2}{\omega_n R} \int_{\partial B_R} \frac{u(X')}{|X' - X|^n} ds$$

Observamos que

$$R - |X| = |X'| - |X| \leq |X' - X| \leq |X'| + |X| = R + |X|$$

e que

$$R^2 - |X|^2 = (R - |X|)(R + |X|).$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
u(X) &= \frac{R^2 - |X|^2}{\omega_n R} \int_{\partial B_R} \frac{u(X')}{|X' - X|^n} ds \\
&= \frac{(R - |X|)(R + |X|)}{\omega_n R} \int_{\partial B_R} \frac{u(X')}{|X' - X|^n} ds \\
&\leq \frac{(R - |X|)(R + |X|)}{\omega_n R} \int_{\partial B_R} \frac{u(X')}{(R - |X|)^n} ds \\
&\leq \frac{(R + |X|)}{(R - |X|)^{n-1}} \frac{1}{\omega_n R} \int_{\partial B_R} u(X') ds \\
&\leq \frac{R^{n-2}(R + |X|)}{(R - |X|)^{n-1}} \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R} u(X') ds \\
&= \frac{R^{n-2}(R + |X|)}{(R - |X|)^{n-1}} u(0).
\end{aligned}
$$

Analogamente,

$$
\begin{aligned}
u(X) &= \frac{R^2 - |X|^2}{\omega_n R} \int_{\partial B_R} \frac{u(X')}{|X' - X|^n} ds \\
&= \frac{(R - |X|)(R + |X|)}{\omega_n R} \int_{\partial B_R} \frac{u(X')}{|X' - X|^n} ds \\
&\geq \frac{(R - |X|)(R + |X|)}{\omega_n R} \int_{\partial B_R} \frac{u(X')}{(R + |X|)^n} ds \\
&= \frac{(R - |X|)}{(R + |X|)^{n-1}} \frac{1}{\omega_n R} \int_{\partial B_R} u(X') ds \\
&= \frac{R^{n-2}(R - |X|)}{(R - |X|)^{n-1}} \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R} u(X') ds \\
&= \frac{R^{n-2}(R - |X|)}{(R + |X|)^{n-1}} u(0).
\end{aligned}
$$

A desigualdade de Harnack tem uma consequência importante: únicas funções harmônicas em R^n, limitadas inferiormente (ou superiormente), são as constantes.

Corolário (Teorema de Lioville). Se u é harmônica em $\mathbb{R}^n$ e $u(X) \geq K$, então u é constante.

Demonstração. A função $w = u - K$ é harmônica em $\mathbb{R}^n$ e não negativa. Fixamos $X \in \mathbb{R}^n$ e escolhemos $R > |X|$. A desigualdade de Harnack dá

$$\frac{R^{n-2}(R - |X|)}{(R + |X|)^{n-1}} w(0) \leq w(X) \leq \frac{R^{n-2}(R + |X|)}{(R - |X|)^{n-1}} w(0).$$

Fazendo $R \to \infty$, obtemos

$$w(0) \leq w(X) < w(0),$$

ou seja, $w(0) = w(X)$. Sendo X arbitrário, concluímos que w é constante e que portanto u é constante.