

# PME 3481 – Controle e Aplicações

## Critérios de desempenho globais

Prof. Dr. Flávio Celso Trigo

### 1 Introdução

Um *critério* ou *índice de desempenho* é a tradução matemática do comportamento global de um sistema dinâmico através de uma função a ser maximizada ou minimizada. O sistema de controle é *ótimo* em relação a determinado critério se os parâmetros de projeto forem escolhidos de modo a tornar o índice de desempenho máximo ou mínimo. Dorf [1] define índice de desempenho como “uma medida quantitativa do desempenho de um sistema [...] escolhido de modo que a ênfase seja dada a especificações de sistema importantes”.

Geralmente, procura-se ajustar os parâmetros do sistema de controle de forma que o índice escolhido atinja um valor mínimo, por exemplo: quais as características de um sistema de suspensão ativa que tornam a oscilação da cabine dos passageiros mínima? Quais os parâmetros de trabalho de uma turbina a gás para que o consumo seja mínimo? Qual a distribuição de massa em uma estrutura para que a espessura das vigas de sustentação sejam mínimas?

Perceba que “minimizar um índice” significa obter o ajuste que melhor atende às especificações que, muitas vezes, podem ser conflitantes. Assim, cabe aos engenheiros a tarefa de, além de projetar o sistema com base no critério escolhido, julgar a necessidade de efetuar novas correções, em função das necessidades e recursos disponíveis.

## 2 Critérios de desempenho

Critérios de desempenho são formulados em termos da minimização de uma integral genérica de um índice de desempenho  $I$  do tipo

$$I = \int_0^T f(e(t), r(t), c(t), t) dt \quad (2.1)$$

onde  $e(t)$ ,  $r(t)$ ,  $c(t)$  são respectivamente a função de erro, a entrada de referência e a saída do sistema. Os critérios mais utilizados são descritos brevemente a seguir.

### 1. Critério ISE

O critério ISE (*Integral of the Square of the Error*) é definido como

$$ISE \triangleq \int_0^T e^2(t) dt \quad (2.2)$$

O limite superior é um tempo finito selecionado de forma arbitrária, sendo que uma boa escolha é o tempo de assentamento  $T_a$ . Este critério penaliza fortemente grandes erros, porém levemente os pequenos. Faz decrescer rapidamente um grande erro inicial; conseqüentemente, apresenta resposta rápida e oscilatória, com pequena margem de estabilidade.

### 2. Critério ITSE

Define-se o critério ITSE (*Integral of Time multiplied by the Squared Error*) como

$$ITSE \triangleq \int_0^T te^2(t) dt \quad (2.3)$$

A minimização deste critério permite obter controladores cujo efeito é penalizar levemente os grandes erros iniciais e fortemente os erros menores ao longo do processo. O desempenho de sistemas de controle projetados utilizando este índice é superior aos obtidos com o ISE.

### 3. Critério IAE Define-se o critério IAE (*Integral of Absolute magnitude of the Error*) como

$$IAE \triangleq \int_0^T |e(t)| dt \quad (2.4)$$

Projetos utilizando este critério apresentam bom desempenho apenas em sistemas cujo amortecimento seja razoável e que possuam resposta transitória satisfatória. Embora difícil de implementar, é o mais difundido.

#### 4. Critério ITAE

O critério ITAE (*Integral of Time multiplied by Absolute Error*) possui características de baixo sobressinal e bom amortecimento. A grande vantagem deste critério em relação aos demais é sua maior seletividade, ou seja, o valor mínimo da integral é facilmente identificado em função da variação dos parâmetros de projeto.

$$ITAE \triangleq \int_0^T t|e(t)|dt \quad (2.5)$$

#### 5. Outros critérios

Existe também a possibilidade de criar índices de desempenho baseados na combinação de um ou mais dos critérios acima, gerando os chamados *índices mistos*. Dois exemplos de índices mistos seriam

$$IM1 = \int_0^T t(|e(t)| + |\dot{e}(t)|)dt \quad (2.6)$$

$$IM2 = \int_0^T (e^2(t) + \dot{e}^2(t))dt \quad (2.7)$$

e assim por diante.

É interessante efetuamos uma comparação entre os desempenhos dos índices acima para uma FTMF de segunda ordem do tipo  $T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1}$ , cuja frequência natural é  $\omega_n = 1 \text{ rad/s}$ , quando solicitada ao um degrau unitário. O gráfico da fig. 1 atesta a elevada seletividade do sistema de controle projetado segundo o critério ITAE.

### 3 Coeficientes para o critério ITAE

Como já vimos, o método ITAE (Integral of Time Multiplied by Absolute Error - Integral do Tempo Multiplicada pelo Erro Absoluto) é baseado na minimização da integral de uma função

do erro e do tempo. Os coeficientes que minimizam a integral desta função foram determinados para funções de transferência em malha fechada genéricas na forma [1]

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0} \quad (3.1)$$

Existem tabelas de coeficientes do método ITAE para funções de transferência em malha fechada de ordem 1 até 6 para entradas em degrau unitário e em rampa. Os coeficientes são dados em função da frequência natural não-amortecida,  $w_n$ . A tabela de coeficientes ITAE para uma entrada em degrau unitário é reproduzida a seguir.

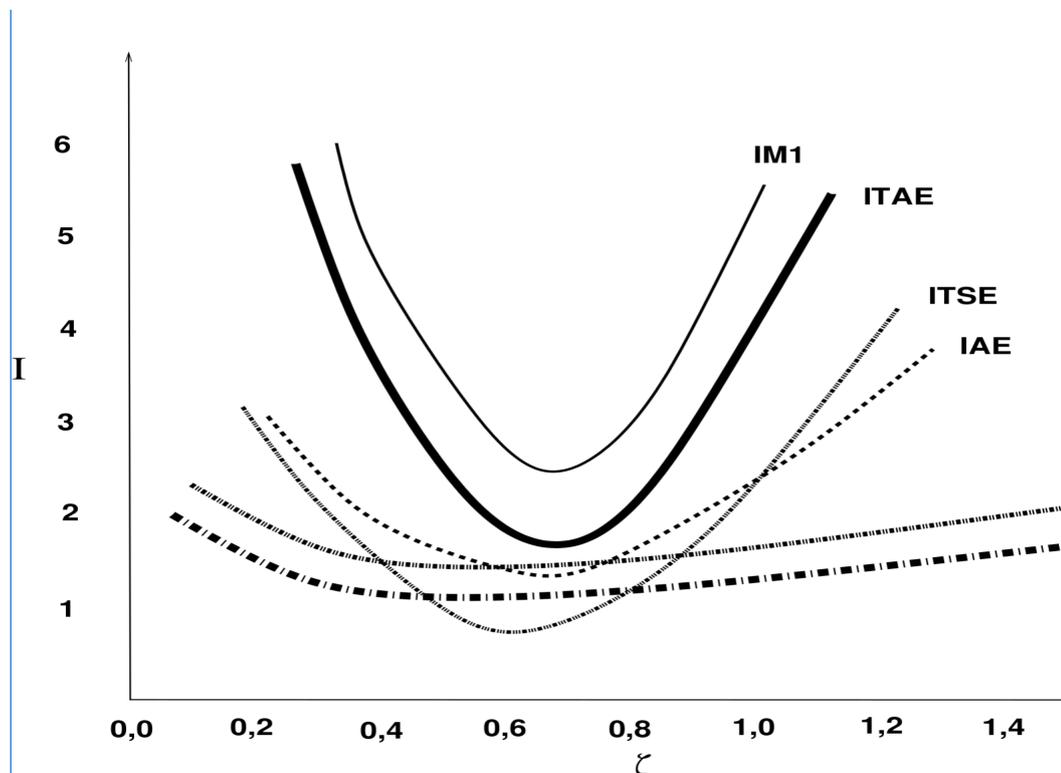


Figura 1: Comparação entre os índices de desempenho

TABELA DE COEFICIENTES ITAE PARA  $R(s) = 1/s$ 

$$\begin{aligned}
& s + \omega_n \\
& s^2 + 1,4\omega_n s + \omega_n^2 \\
& s^3 + 1,75\omega_n s^2 + 2,15\omega_n^2 s + \omega_n^3 \\
& s^4 + 2,1\omega_n s^3 + 3,4\omega_n^2 s^2 + 2,7\omega_n^3 + \omega_n^4 \\
& s^5 + 2,8\omega_n s^4 + 5,0\omega_n^2 s^3 + 5,5\omega_n^3 s^2 + 3,4\omega_n^4 s + \omega_n^5 \\
& s^6 + 3,25\omega_n s^5 + 6,6\omega_n^2 s^4 + 8,6\omega_n^3 s^3 + 7,45\omega_n^4 s^2 + 3,95\omega_n^5 s + \omega_n^6
\end{aligned}$$

Quando a FTMF não apresenta apenas um termo constante  $b_0$  no numerador, é necessário filtrar o sinal de entrada de forma a cancelar os zeros introduzidos pelo controlador PID, porém tendo cuidado para manter o ganho estático, ou seja,  $T(s=0)$ . Tal procedimento será melhor compreendido através do exemplo a seguir.

Vale destacar ainda que o coeficiente de amortecimento ótimo selecionado com base no critério ITAE é 0,7. Para um sistema de segunda ordem, a resposta ao degrau é rápida e a ultrapassagem percentual é de 4,6%.

## 4 Projeto de controladores PID pelo método ITAE

O projeto de controladores pelo método ITAE é explicado através de um exemplo e devida simulação em computador, utilizando programas como Matlab, Octave ou Scilab, sendo os dois últimos de código aberto.

Seja, portanto, a planta de segunda ordem dada por:

$$G(s) = \frac{1}{(1+s)(1+0,26s)}$$

Para esta planta, projete um controlador PID a ser colocado no ramo direto com realimentação negativa e unitária para que o sistema, solicitado à entrada em degrau unitário, possua as seguintes características de resposta: tempo de acomodação  $T_a \leq 2$  segundos; coeficiente de amortecimento  $\zeta = 0,5$ . Utilize o método ITAE.

Solução

O diagrama abaixo ilustra a configuração solicitada:

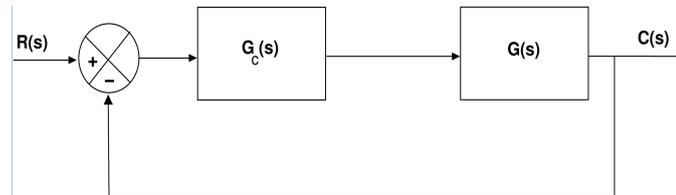


Figura 2: Diagrama de blocos para o exemplo

Utilizando a expressão analítica para o tempo de assentamento determina-se  $\omega_n$ :

$$T_a = \frac{4}{\zeta\omega_n} \leq 2 \Rightarrow \omega \geq 4 \text{ rad/s}$$

Adota-se  $\omega_n = 4 \text{ rad/s}$ .

A FTMF (associação de  $G_c$  e  $G$  em série e fechamento da malha através do ramo de realimentação) para o diagrama de blocos acima fica:

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)} = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{K_d s^2 + K_p s + K_i + 0,26s^3 + 1,26s^2 + s}$$

Como nas expressões do critério ITAE o termo de maior ordem em  $s$  possui coeficiente 1, divide-se a expressão anterior por 0,26. Dessa forma,

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{0,26} \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s^3 + \frac{1,26+K_d}{0,26} s^2 + \frac{K_p+1}{0,26} s + \frac{K_i}{0,26}}$$

Pelo critério ITAE, para uma FTMF de 3ª ordem o polinômio do denominador é

$$s^3 + 1,75\omega_n s^2 + 2,15\omega_n^2 s + \omega_n^3,$$

e, quando igualado ao denominador da FTMF, fornece equações cujas incógnitas são os ganhos do controlador PID. Assim:

$$1,75\omega_n = \frac{1,26+K_d}{0,26} \Rightarrow K_d = 0,56$$

$$2,15\omega_n^2 = \frac{K_p+1}{0,26} \Rightarrow K_p = 7,94$$

$$\omega_n^3 = \frac{K_i}{0,26} \Rightarrow K_i = 16,64$$

Tais cálculos foram implementados em um *script* de Matlab, que também permitiu a simulação do sistema controlado a uma entrada em degrau unitário.

```
%Script para projeto de PID pelo metodo ITAE -
Ta=2; zeta=0.5; omega=4/(Ta*zeta);
nump=1; denp=[0.26 1.26 1];
t=0:0.1:6;
Kd=1.75*omega*0.26-1.26;
Kp=2.15*(omega^2)*0.26-1;
Ki=0.26*(omega^3);
numpid=[Kd Kp Ki]; denpid=[1 0];
numc=conv(numpid,nump);
denc=conv(denpid,denp);
[numcmf,dencmf]=cloop(numc,denc,-1);
figure;
[yitae xitae]=step(numcmf,dencmf,t);
plot(t, yitae); grid; gtext('sem pré-compensador'); hold;

%filtro;
numfiltro=Ki;
denfiltro=numcmf;

[numfinal,denfinal]=series(numfiltro,denfiltro,numcmf,dencmf);
[yitae xitae]=step(numfinal,denfinal,t);
plot(t,yitae,'-.');
gtext('com pré-compensador');
title('Resposta a um degrau unitário com o PID ITAE');
xlabel('t(s)'); ylabel('y(t)');
```

A resposta do sistema em malha fechada com o controlador PID calculado acima é dada na figura 3. Verifica-se que, apesar do tempo de assentamento dentro das especificações, o sobressinal é de aproximadamente 30%, considerado muito elevado. O motivo para tal anomalia é a presença de zeros no numerador da FTMF do sistema controlado, pois as equações do método ITAE pressupõem a existência apenas de um valor constante.

O problema é contornado pela introdução de um *pré-compensador* ou filtro  $G_f(s)$  em série e antes do bloco correspondente à função de transferência  $T(s)$ , de modo a filtrar o sinal de

entrada. A função de transferência do pré-compensador deve ser escolhida de tal forma a manter o ganho estático. Portanto, fazendo  $s = 0$  na expressão de  $T(s)$  verifica-se que o ganho estático é unitário. Assim,

$$G_f(s)T(s)|_{s=0} = 1 \Rightarrow G_f(s) = \frac{K_i}{K_d s^2 + K_p s + K_i}$$

A parte denominada “filtro” no *script* anterior em Matlab é responsável pela simulação do sistema com o pré-compensador. No gráfico da figura 3, verifica-se que a presença do filtro provoca a diminuição do sobressinal até cerca de 3%, mantendo a característica de resposta rápida.

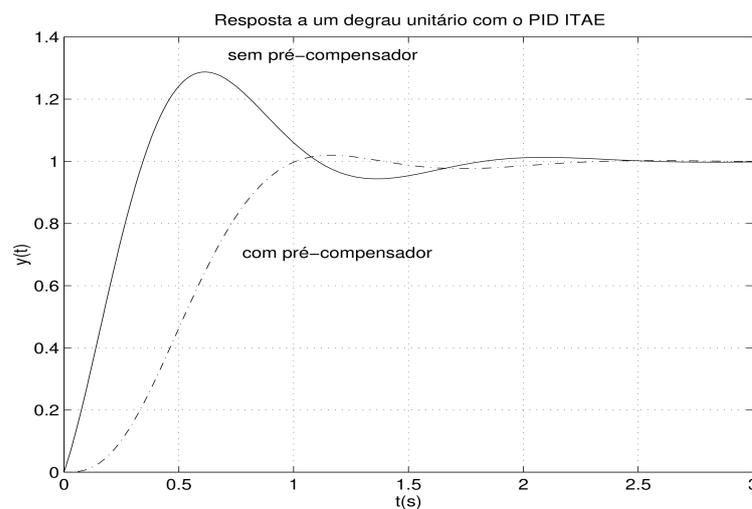


Figura 3: Resposta em malha fechada do sistema do Exemplo a um degrau unitário

## Referências

- [1] Dorf, R.C. e Bishop, R.H. *Sistemas de Controle Modernos*. São Paulo: LTC, 8a. Edição, 1998.

- 
- [2] Ogata, K. *Engenharia de Controle Moderno*, Rio de Janeiro: Prentice Hall, 1985.
- [3] DiStefano III, J.J., Stubberud, A. and Williams, I.J. *Schaum's Outline of Theory and Problems of Feedback and Control Systems*. New York: McGraw-Hill, 1967.