

PME 3481 – Controle e Aplicações

Sintonia de Controladores PID

Regras de Ziegler-Nichols

Prof. Dr. Flávio Celso Trigo

1 Introdução

O presente módulo aborda os métodos de sintonia de Ziegler e Nichols. Os métodos de Ziegler e Nichols, apesar de antigos e restritos a plantas com características especiais, são ainda largamente utilizados na obtenção dos ganhos proporcional, integral e derivativo em sistemas de controle de malha fechada. O grande mérito de tais métodos é a possibilidade de fornecer ao menos uma estimativa inicial para os ganhos do controlador a partir de testes simples efetuados na planta. Após a primeira aproximação, é possível otimizar-se o sistema controlado utilizando-se outras técnicas como Lugar das Raízes, Diagramas de Bode ou Espaço de Estados.

Como será visto mais adiante no curso, sistemas de ordem superior podem ser analisados como somatórias de sistemas de primeira e segunda ordens, o que limita a presente abordagem a tais sistemas.

2 Especificações de projeto para sistemas de 2a. ordem

Considere a figura 1 abaixo, onde um sistema de controle com realimentação unitária é mostrado.

Após a redução do diagrama de blocos considerando a realimentação unitária negativa, a função de transferência do sistema, relacionando a *saida* $C(s)$ (ou $Y(s)$) com a *entrada* $R(s)$

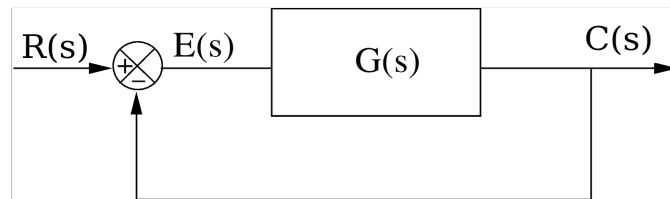


Figura 1: Sistema de controle com realimentação unitária.

fica:

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2.1)$$

Esta função de transferência é denominada *Função de Transferência em Malha Fechada*, ou simplesmente FTMF. A partir de uma FTMF pode-se aplicar diversos sinais de entrada $R(s)$ e determinar, através da aplicação da transformada inversa de Laplace, a resposta do sistema retroalimentado.

Considera-se inicialmente que o sistema em malha fechada dado pela FTMF da eq. 2.1 seja excitado por uma entrada em degrau unitário $u(t)$, cuja transformada de Laplace é $\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$. A saída $Y(s)$ deste sistema pode ser obtida diretamente a partir da FTMF (eq. 2.1) fazendo-se $R(s) = 1/s$:

$$T(s) = \frac{C(s)}{\frac{1}{s}} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \implies C(s) = T(s)\frac{1}{s} = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

Utilizando tabelas de transformadas de Laplace pode-se determinar a resposta no tempo como

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\beta} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_n \beta t + \theta) \quad (2.2)$$

onde

$$\beta = \sqrt{1 - \zeta^2} \quad \text{e} \quad \theta = \arccos(\zeta) \quad \text{para} \quad 0 < \zeta < 1$$

A constante ω_n é a frequência não-amortecida do sistema, ao passo que ζ representa o *coeficiente ou relação de amortecimento*. A constante θ é denominada ângulo de fase e indica o quanto a resposta (saída) do sistema atrasa em relação à entrada (excitação). O fator $\omega_n\beta$ é comumente chamado ω_d , *frequência amortecida*.

Outro tipo de excitação utilizado para avaliar as características da resposta de um sistema dinâmico é o impulso unitário ou *delta de Dirac* $\delta(t)$, cuja transformada de Laplace é $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$. Em termos da equação da FTMF do sistema, eq. 2.1 temos:

$$T(s) = \frac{C(s)}{1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \implies C(s) = T(s)(1) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Novamente, utilizando as tabelas de transformadas de Laplace obtém-se a resposta no tempo

$$y(t) = \frac{\omega_n}{\beta} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_n\beta t)$$

A resposta no tempo do sistema dado pela eq. 2.1 depende do parâmetro ζ (coeficiente de amortecimento). Os gráficos das figuras 2 e 3 apresentam a resposta de um sistema de segunda ordem em malha fechada dado pela eq. 2.1 respectivamente para entradas em degrau unitário e impulso unitário.

Um sistema é dito sub-amortecido ou sub-crítico quando o coeficiente de amortecimento ζ situa-se entre zero e um, crítico quando $\zeta = 1$ e superamortecido quando $\zeta > 1$. Sistemas com amortecimento sub-crítico controlados em malha fechada e sujeitos a uma excitação em forma de impulso unitário apresentam pólos complexos conjugados com valor $-\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}j$ para cada frequência ω_n conforme mostrado no gráfico da figura 4. Verifica-se que quando $\zeta = 0$, ou seja, o sistema não é amortecido, os pólos da função de transferência localizam-se sobre o eixo imaginário $j\omega$ e a resposta é oscilatória, conforme mostrado na figura 3. Quando ζ é igual a 1, os pólos passam a ser reais e, a partir deste ponto, a resposta não mais apresenta oscilação.

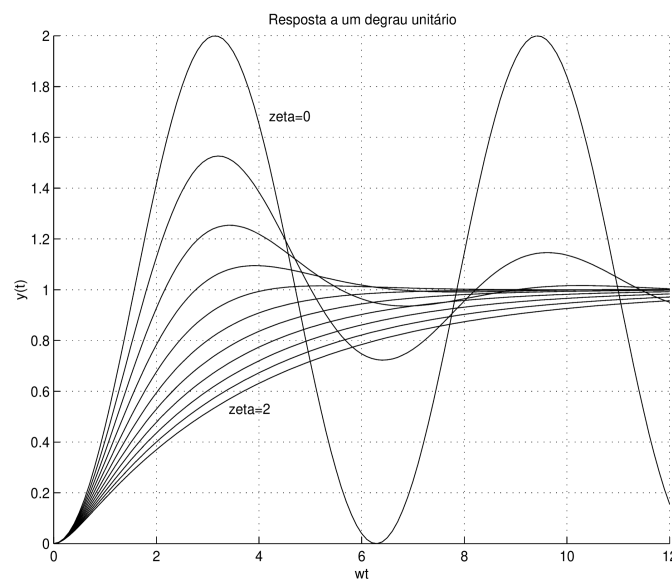


Figura 2: Resposta de um sistema de segunda ordem a um degrau unitário em função do coeficiente de amortecimento ζ

3 Métodos de Sintonia de Ziegler e Nichols

Na nomenclatura de controle, *sintonizar* um controlador significa determinar os parâmetros que atendam a uma dada especificação de desempenho. No caso de um controlador PID, procura-se determinar os ganhos proporcional (K_p), integral (K_i) e derivativo (K_d) de modo que a soma ponderada destes termos forneça uma saída que conduza a variável de processo na direção necessária à eliminação do erro.

Antes de iniciar a exposição, convém relembrar alguns termos normalmente empregados:

K_p ganho proporcional

K_i ganho integral

K_d ganho derivativo

Definem-se ainda:

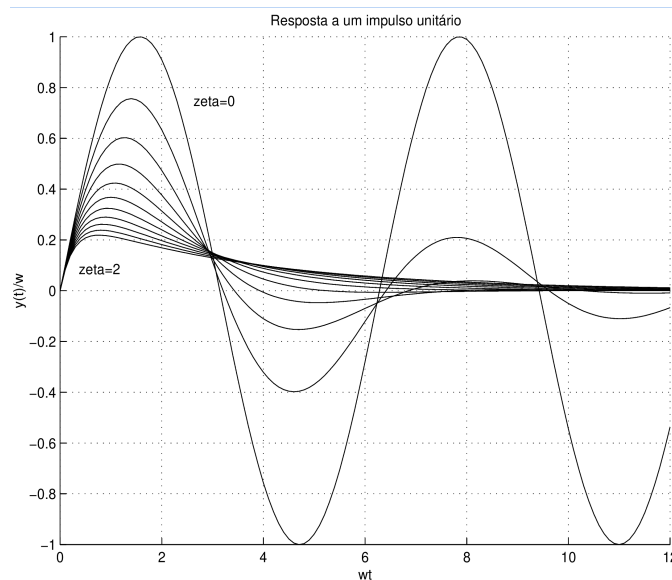


Figura 3: Resposta de um sistema de segunda ordem a um impulso unitário em função do coeficiente de amortecimento ζ

$$\frac{K_i}{K_p} = \frac{1}{T_i} \quad \text{onde } T_i \text{ é o } \textit{tempo integral}$$

$$\frac{K_d}{K_p} = T_d \quad \text{onde } T_d \text{ é o } \textit{tempo derivativo}$$

A partir destas definições, um controlador PID pode ser descrito pela expressão

$$G_c = K_p \frac{1 + T_i s + T_i T_d s^2}{T_i s}, \quad (3.1)$$

onde G_c representa o ganho do controlador.

A melhor maneira de sintonizar um controlador PID depende do modo como o sistema responde ao controle. Seja, por exemplo, um processo cuja dinâmica é lenta. Se um erro é subitamente introduzido (uma mudança na referência (setpoint), por exemplo), a reação inicial do controlador é determinada principalmente pelo termo derivativo. Isto fará com que o controlador inicie a correção no exato momento em que o erro deixa de ser zero. O termo proporcional irá, em seguida, entrar em ação para manter a saída do controlador até que o erro

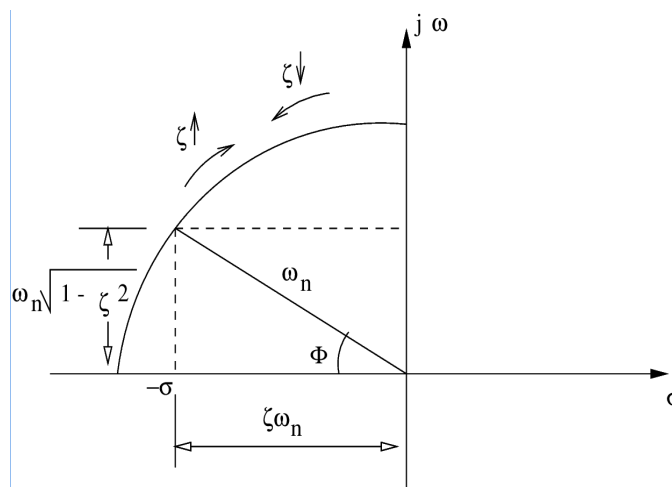


Figura 4: Representação no plano s das raízes de um sistema de 2^a ordem para ω_n constante em função de ζ

seja eliminado. Após mais algum tempo, o termo integral também irá contribuir na correção, à medida que o erro acumula-se com o passar do tempo. Na verdade, o termo integral deverá dominar a resposta, pois a diminuição do erro é lenta (por hipótese, a dinâmica da planta é lenta). Mesmo após a eliminação do erro, o controlador continuará afetando a resposta, com base na história dos erros que vinham sendo acumulados no integrador. A variável de processo pode, então, apresentar um sobressinal, gerando um erro na direção oposta.

Se o ganho integral não for muito elevado, este erro oposto subsequente será menor que o original, e o termo integral irá começar a diminuir, pois erros negativos serão adicionados aos erros positivos previamente acumulados. A operação descrita pode-se repetir diversas vezes até que tanto o erro absoluto quanto o erro cumulativo sejam eliminados. Enquanto isso, o termo derivativo irá continuar a influenciar a saída do controlador, baseado na derivada do sinal de erro, sendo eliminado quando o erro for nulo.

Seja, agora, uma planta cuja dinâmica é rápida. Neste caso, o termo integral não será predominante, pois os transitórios que originam os erros tendem a desaparecer mais rapidamente; em contrapartida, o termo derivativo tenderá a ser maior, uma vez que o erro muda rapidamente.

Pode-se notar que a importância relativa de cada termo de controle na resposta do sistema

irá depender da dinâmica do processo a ser controlado. A essência da sintonia é, portanto, determinar o melhor conjunto de parâmetros que atenda às necessidades do processo. Nos exemplos acima, o processo lento requer um valor mais elevado para o ganho derivativo, fazendo com que a reação do controlador a um erro súbito seja mais rápida. No processo mais rápido, entretanto, maiores valores de K_D tendem a tornar a resposta muito oscilante, algo indesejável, pois isto tende a desestabilizar o sistema.

Diversas técnicas matemáticas e heurísticas para a seleção de valores apropriados para os ganhos do controlador PID têm sido desenvolvidos durante os últimos 80 anos. Existem, basicamente, três correntes de estudo para a seleção dos parâmetros do controlador:

1. Abordagem heurística, isto é, baseada em tentativa e erro. Exige grande experiência do projetista e nem sempre produz resultados aceitáveis.
2. Abordagem analítica, que envolve a obtenção de um modelo matemático da planta. A grande dificuldade desta abordagem é a modelagem de sistemas muito complexos, onde as hipóteses simplificadoras podem acabar por inviabilizar o projeto de um controlador eficaz.
3. Abordagem que mescla a experiência do projetista e utiliza ferramentas matemáticas para guiar a escolha.

Nesta categoria estão as regras de sintonia de Ziegler e Nichols, publicadas por John Ziegler e Nathaniel Nichols em 1942 e conhecidas como *métodos de Ziegler e Nichols*.

As regras de Ziegler e Nichols são particularmente vantajosas quando o modelo da planta é desconhecido, o que entretanto não invalida sua utilização para sistemas com dinâmica conhecida. O objetivo destes métodos é projetar controladores PID que apresentem sobressinal máximo de 25% quando o sistema é submetido a uma entrada em degrau. Tais regras continuam amplamente utilizadas devido à sua simplicidade e à sua aplicabilidade a diversos tipos de processos. A sintonia pode ser efetuada *in loco* com o auxílio de experimentos utilizando a planta.

3.1 Descrição dos métodos de Ziegler & Nichols

3.1.1 Método da curva “S”

Este método, conhecido também como método da resposta transitória, é utilizado quando um sistema em malha aberta sujeito a uma excitação em degrau unitário apresenta resposta temporal cujo formato da curva é um “S”, conforme mostrado na figura 5. Assim, o método é aplicável a sistemas que, em malha aberta, possuem dinâmica criticamente amortecida ou superamortecida. A filosofia do procedimento é fazer a planta operar em regime permanente, promover uma perturbação em forma de degrau e registrar graficamente a resposta do sistema.

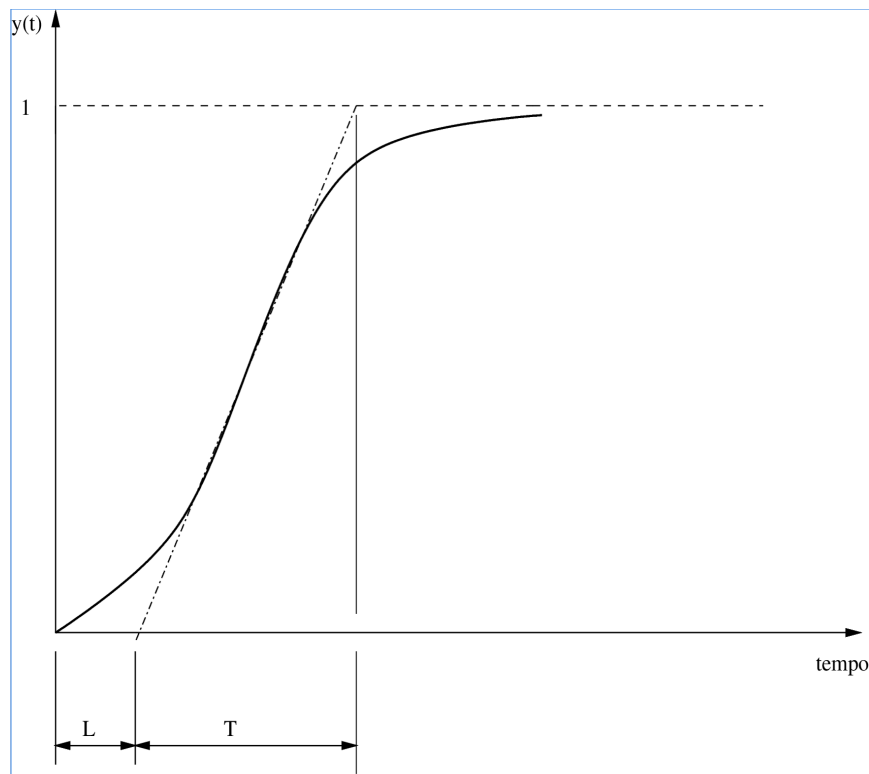


Figura 5: Resposta de um sistema em malha aberta a um degrau unitário

As informações decorrentes do teste em malha aberta são o ganho em malha aberta K , o atraso aparente L e a constante de tempo T , obtidos graficamente. A função de transferência real $C(s)/R(s)$ pode, assim, ser aproximada por uma que corresponde a um sistema de primeira

ordem com atraso de transporte,

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{Ke^{-Ls}}{Ts + 1} \quad (3.2)$$

Para um sistema cujo comportamento seja semelhante ao descrito acima, Ziegler e Nichols sugerem adotar para o ganho proporcional, o tempo integral e o tempo derivativo de acordo com a tabela abaixo

Controlador tipo	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{T}{L}$	∞	0
PI	$\frac{0,9T}{L}$	$\frac{L}{0,3}$	0
PID	$\frac{1,2T}{L}$	$2L$	$0,5L$

Observa-se que um controlador PID sintonizado pelo método da curva “S” é tal que

$$G_c = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) = 1,2 \frac{T}{L} \left(1 + \frac{1}{2Ls} + 0,5Ls \right) = 0,6T \frac{(s + 1/L)^2}{s} \quad (3.3)$$

Assim, o controlador possui um polo na origem e dois zeros em $s = -1/L$.

3.1.2 Método da malha fechada ou do último ganho

Para a utilização deste método, considera-se um sistema em malha fechada incorporando um controlador proporcional de ganho K_p sujeito a uma excitação do tipo impulso unitário, conforme representado no diagrama a seguir.

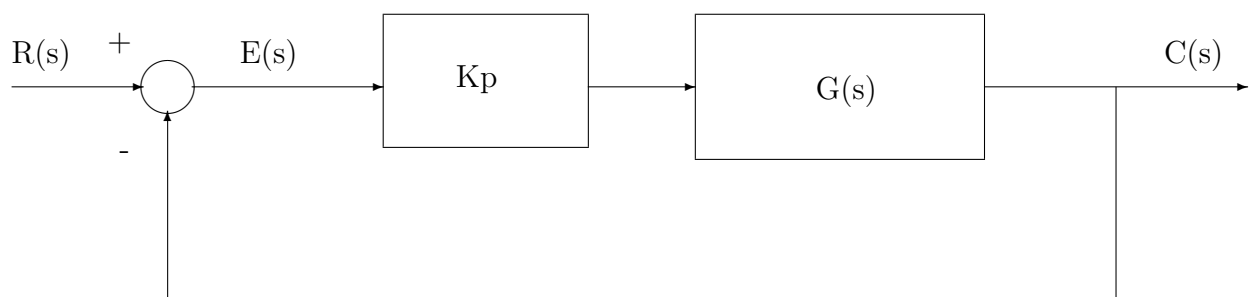


Diagrama de blocos para a utilização do 2º método de Ziegler & Nichols, com $R(s) = 1$.

O método consiste em utilizar um controlador proporcional, escolhendo-se K_p até que a resposta ao impulso seja uma oscilação mantida, vide figura 6. Na prática, isto corresponde a fazer $T_i = \infty$ e $T_d = 0$. Ressalta-se que, se não for possível a obtenção de uma oscilação mantida para algum valor de K_p , então o método não é aplicável.

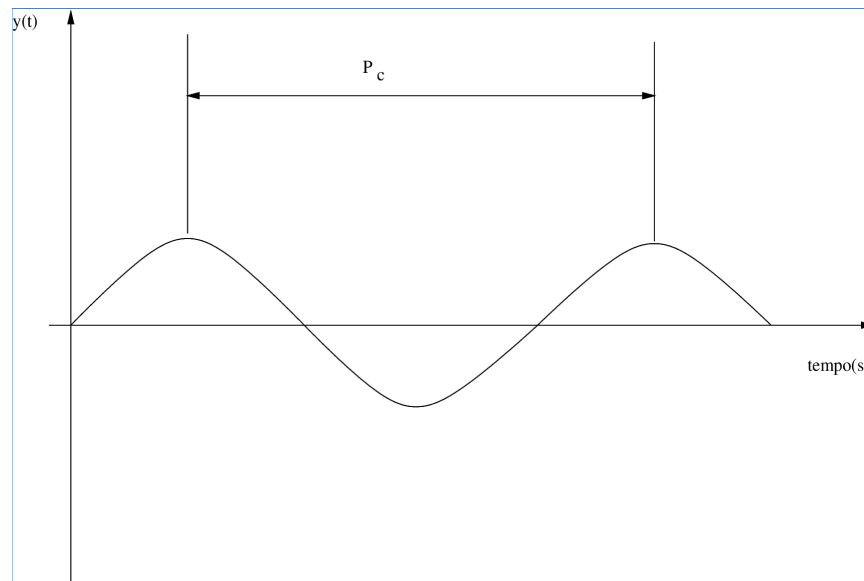


Figura 6: Resposta de um sistema em malha fechada a um impulso unitário para a determinação dos parâmetros do PID através do 2º método de Ziegler & Nichols

Quando a resposta mostrada na fig. 6 é obtida, o resultado denomina-se ajuste de último ganho, sendo o valor K_0 o *ganho crítico*. A partir daí, determina-se graficamente o período crítico, p_c , e calculam-se os valores das constantes do controlador por meio da tabela abaixo:

Controlador tipo	K_p	T_i	T_d
P	$0,50K$	∞	0
PI	$0,45K$	$\frac{1}{1,2}P_c$	0
PID	$0,60K$	$0,5P_c$	$0,125P_c$

Nota-se que a sintonia de acordo com a regra do último ganho fornece um controlador PID

$$G_c = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) = 0,6K_0 \left(1 + \frac{1}{0,5P_c s} + 0,125P_c s \right) = 0,075K_0 P_c \frac{(s + 4/P_c)^2}{s} \quad (3.4)$$

que possui um pólo na origem e dois zeros em $s = -4/P_c$.

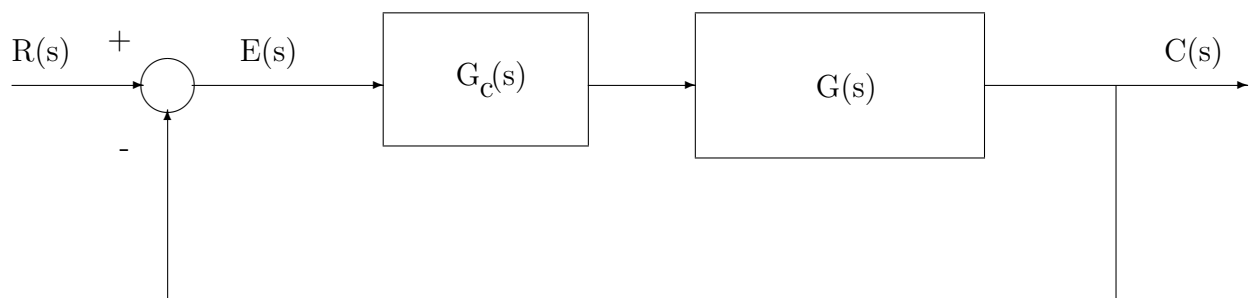
4 Exemplos

Exemplo 1

Seja a malha da figura subsequente, em que a função de transferência da planta $G(s)$ é dada por

$$G(s) = \frac{1}{(1+s)(1+0,2s)(1+0,005s)(1+0,001s)}$$

e G_c representa um controlador incorporado ao sistema. Aplicando os métodos de Ziegler & Nichols, projete sistemas de controle P, PI e PID e verifique a resposta a um degrau unitário nos três casos.



Solução

Para a resolução deste problema, recorre-se a *scripts* em Matlab.

Em primeiro lugar, é necessário verificar:

- se os métodos de Ziegler e Nichols se aplicam e;
- em caso afirmativo, **qual** dos métodos aplicar.

Assim, verifica-se, inicialmente, se a resposta do sistema em malha aberta, ou seja, somente com a presença da planta $G(s)$, quando sujeita a uma entrada em degrau unitário, possui a forma de um “S” para que o primeiro método seja aplicável. O *script* em Matlab a seguir foi utilizado:

```
%Determinacao da FT da planta do sistema:
clear all;close all;
nump=1;den1=[1 1]; den2=[0.2 1]; den3=[0.005 1];
den4=[0.001 1];
den12=conv(den1,den2);
den123=conv(den12,den3);
denp=conv(den123,den4)
printsys(nump,denp);
t1=0:0.01:5;
[yp,xp]=step(nump,denp,t1); plot(t1,yp,'w');grid;
xlabel('tempo(s)'); ylabel('amplitude');
title('Resposta do sistema em malha aberta a um degrau unitario');
```

A resposta do sistema em malha aberta é mostrada na figura 7, onde verifica-se que o formato da curva permite a utilização do método da curva “S” para a obtenção dos parâmetros L e T . Graficamente, obtém-se $L = 0,15$ e $T = 1,3$;

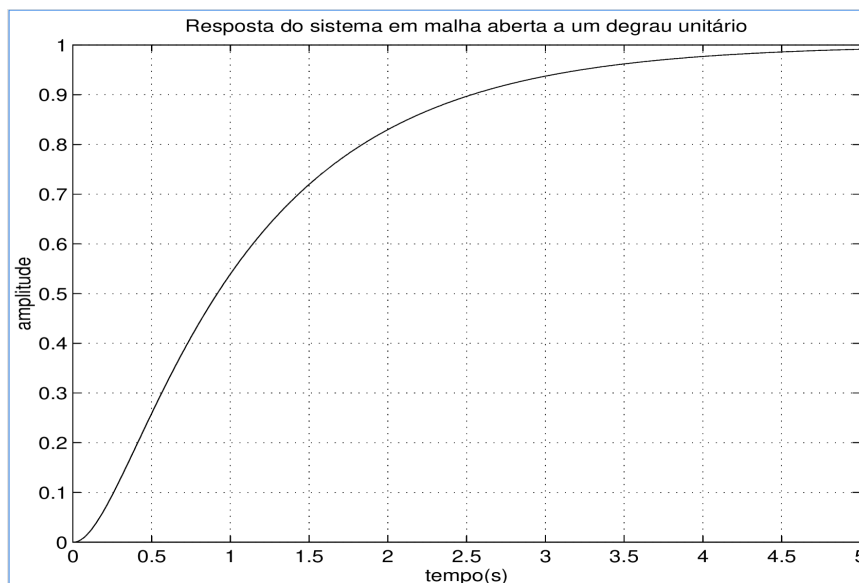


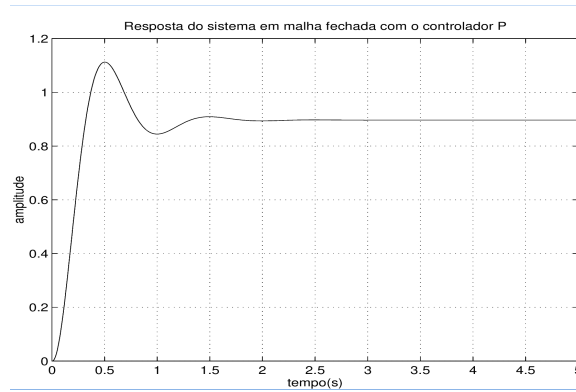
Figura 7: Resposta em malha aberta da planta $G(s)$ a um degrau unitário

Uma das formas genéricas de controlador PID é dada pela eq. 3.1, que é exatamente a utilizada no método de Ziegler & Nichols. As equações correspondentes ao método da curva “S” são implementadas em Matlab conforme as instruções a seguir, e os controladores P, PI e PID são simultaneamente obtidos. Os resultados são apresentados nos gráficos da figura 8.

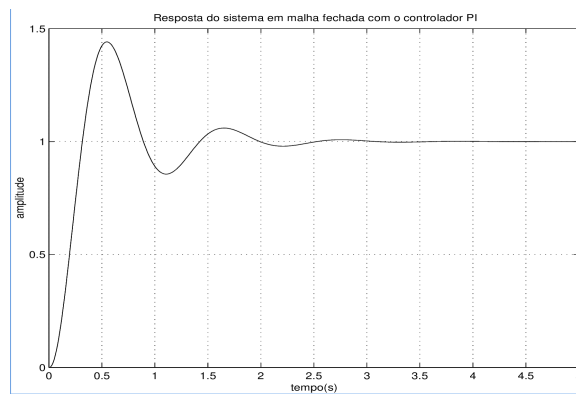
```
%Determinacao dos controladores:
L=0.15; T=1.3;
numsis=T/L;
densis=denp;
[nummfp,denmfp]=cloop(numsis,densis,-1);
[yp,xp]=step(nummfp,denmfp,t1); plot(t1,yp,'w');
xlabel('tempo(s)'); ylabel('amplitude');
title('Resposta do sistema em malha fechada com o controlador P');grid;
figure;

%Controlador PI:
KP=0.9*T/L;
TI=L/0.3;
numkpi=KP*[TI 1]; denkpi=[TI 0];
[numpI,denpI]=series(numkpi,denkpi,nump,denp);
[nummfpi,denmfpi]=cloop(numpI,denpI,-1);
[ypi,xpi]=step(nummfpi,denmfpi,t1);
plot(t1,ypi,'r');xlabel('tempo(s)');ylabel('y(t)'); grid;
xlabel('tempo(s)'); ylabel('amplitude');
title('Resposta do sistema em malha fechada com o controlador PI');

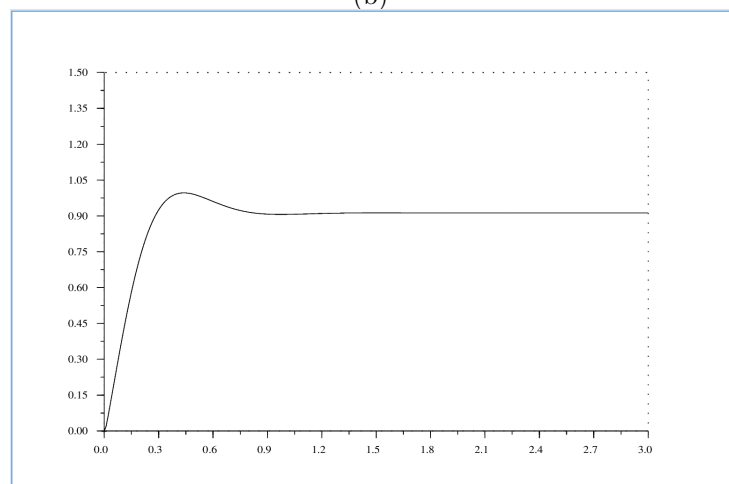
%Controlador PID:
KP=1,2*T/L; TI=2*L; TD=0,5*L;
numkpid=KP*[TI*TD TI 1]; denkpid=[TI 0];
numpID=conv(numkpid,nump)
denpID=conv(denkpid,denp)
[nummfpid,denmfpid]=feedback(numpID,denpID,1,1,-1);
[ypid,xpid]=step(nummfpid,denmfpid,t1);figure
plot(t1,ypid,'w');grid;xlabel('tempo(s)');ylabel('y(t)');
xlabel('tempo(s)'); ylabel('amplitude');
title('Resposta do sistema em malha fechada com o controlador PID');
```



(a)



(b)



(c)

Figura 8: Resposta em malha fechada de $G(s)$ a um degrau unitário com: (a) controlador P; (b) controlador PI; (c) controlador PID para o Exemplo 1, projetados segundo o método da curva “S”.

Exemplo 2

Ainda com respeito à malha do problema anterior, considere a função de transferência da planta $G(s)$ dada por

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 110s^2 + 800s - 20000}$$

Pede-se projetar, utilizando os métodos de Ziegler e Nichols, um controlador PID a ser colocado no ramo direto (em série com a planta) de um sistema de controle com realimentação unitária negativa.

Solução

Novamente, verifica-se a possibilidade e o tipo de método de Ziegler e Nichols a ser aplicado.

Pelo primeiro critério de Routh-Hurwitz, não é difícil perceber que o sistema, em malha aberta, é instável, pois um dos coeficientes da equação característica é menor que zero. De fato,

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^3 + 110s^2 + 800s - 19999}$$

A simulação desta FT a um degrau unitário (com o auxílio do Octave) fornece a resposta dada na fig. 9. Conclui-se, portanto, que é impossível utilizar o primeiro método de Ziegler e Nichols. Recorre-se, então, ao segundo método.

Inicia-se a determinação de um controlador proporcional cujo ganho K_0 promova uma oscilação mantida (sistema marginalmente estável) quando o sistema em malha fechada é submetido a um impulso unitário. A maneira mais simples de efetuar tal ajuste, analiticamente, é através do Critério de Routh-Hurwitz.

Considera-se um controlador proporcional com ganho K_0 em série com a planta. A equação característica do sistema em malha fechada, com realimentação unitária, fica

$$1 + \frac{K_0}{s^3 + 110s^2 + 800s - 20000} = 0 \Rightarrow s^3 + 110s^2 + 800s - 20000 + K_0 = 0$$

Constroi-se a tabela de Routh-Hurwitz

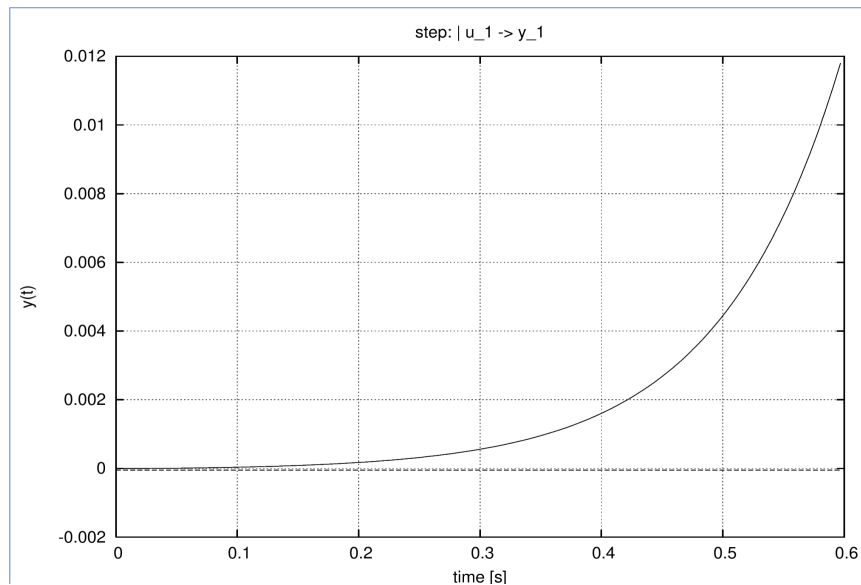


Figura 9: Resposta em malha aberta de $C(s)/R(s) = 1/(s^3 + 110s^2 + 800s - 19999)$ a um degrau unitário

s^3	1	800	0
s^2	110	$K_0 - 20000$	0
s^1	$\frac{108000 - K_0}{110}$		
s^0	$K_0 - 20000$		

Para que o sistema seja estável (e, marginalmente estável é uma condição de estabilidade) é necessário que:

1. todos os coeficientes sejam positivos. Assim,

$$K_0 > 20000$$

2. não deve haver trocas de sinal na primeira coluna:

$$\frac{108000 - K_0}{110} > 0 \Rightarrow K_0 < 108000$$

3. se $K_0 = 108000$, a linha inteira de s^1 se anula. Quando uma linha inteira é nula, a linha imediatamente anterior àquela que se anulou fornece os coeficientes do polinômio auxiliar, cujas raízes são os polos que tornam o sistema marginalmente estável (oscilação mantida). No caso em questão, com $K_0 = 108000$ tem-se

$$110s^2 + 88000 = 0 \Rightarrow$$
$$s = \pm\sqrt{800}j$$

4. a frequência natural do sistema nesta condição é determinada, $\omega_0 = \sqrt{800} = 28,3 \text{ rad/s}$. O período crítico é, então,

$$P_c = \frac{2\pi}{\omega_0} = 0,22 \text{ s}$$

Graficamente, confirma-se o valor acima, com o auxílio do Octave, vide fig. 10

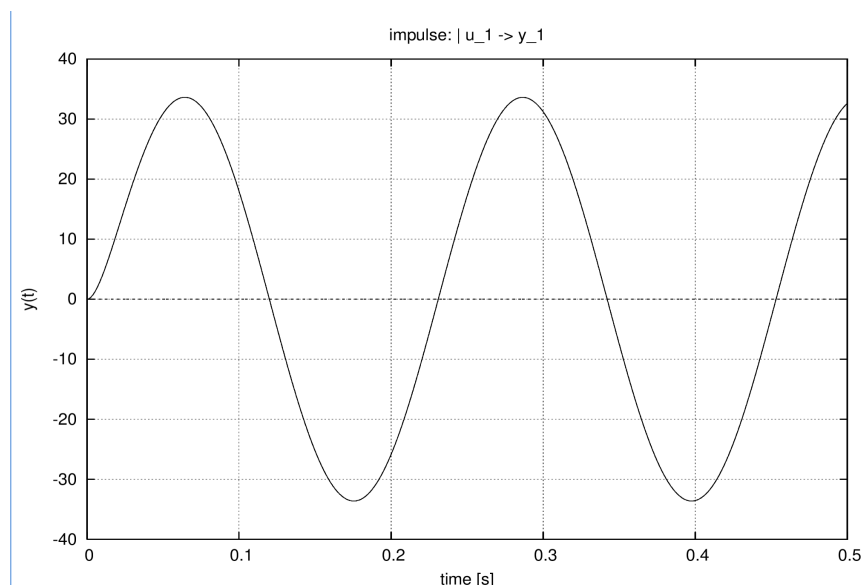


Figura 10: Resposta ao impulso unitário para $K_0 = 108000$.

5. com o auxílio da tabela correspondente ao segundo método de ZN, obtemos os valores para os parâmetros do controlador PID, a saber,

$$K_p = 0,6K_0 = 64800$$

$$T_i = 0,5P_c = 0,11$$

$$T_d = 0,125P_c = 0,0275$$

Isto fornece o controlador PID

$$G_c = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) = 64800 \left(1 + \frac{1}{0,11s} + 0,0275s \right) \Rightarrow$$

$$G_c = \frac{196,02s^2 + 7128s + 64800}{0,11s}$$

6. simulação do sistema a uma entrada conhecida, por exemplo, degrau unitário. O primeiro passo é obter a FTMF já com o controlador acoplado,

$$FTMF = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{196,02s^2 + 7128s + 64800}{0,11s^4 + 12,1s^3 + 284,08s^2 + 4928s + 64800}$$

Com o auxílio do Octave, obteve-se a resposta mostrada na fig. 11, quando o sistema foi submetido a um degrau unitário.

Pode-se ver, pela fig. 11, que o valor do sobressinal é excessivo (100%). Há necessidade de se efetuar um ajuste fino nos parâmetros estimados através do método de Ziegler-Nichols. Ressalta-se, no entanto, que, sem o controlador, a planta era instável, o que demonstra a eficácia do projeto de acordo com tais regras.

A tarefa de sintonizar o controlador de forma a obter um sobressinal máximo de 25% é deixada como exercício para o estudante. Para tanto, deve-se recorrer a softwares como o Matlab, Scilab, Octave ou similar.

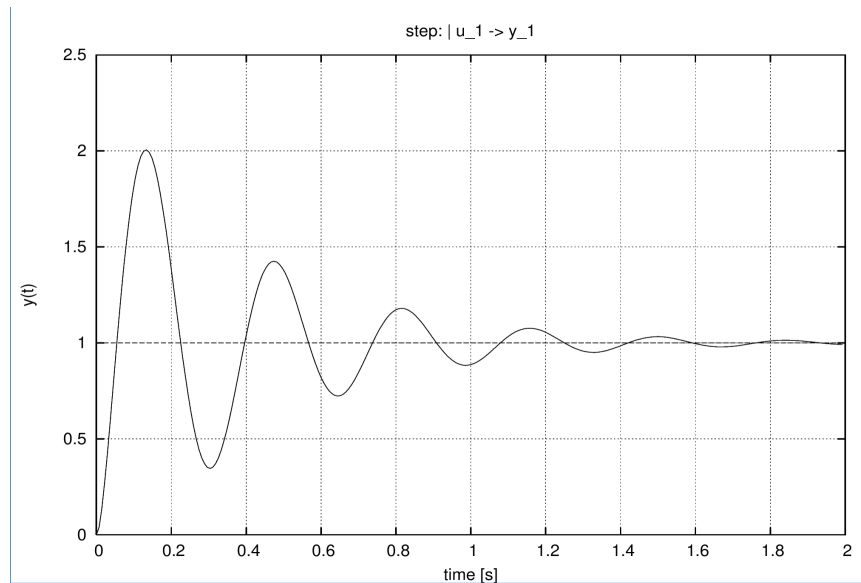


Figura 11: Resposta ao degrau unitário para o sistema controlado.

Referências

- [1] Dorf, R.C. e Bishop, R.H. *Sistemas de Controle Modernos*. São Paulo: LTC, 8a. Edição, 1998.
- [2] Brogan, W. *Modern Control Theory*. Upper Saddle River: Prentice Hall, 3rd. Edition, 1991.
- [3] Kuo, B.C. *Automatic Control Systems*. New York: John Wiley & Sons, 7th. Edition, 1995.