Planejamentos Fatoriais Completos

Profa. Cibele Russo

(Referências: Montgomery (2012), Notas de aula de Roseli Leandro; Clarice Demétrio; Marinho Andrade)

Planejamentos fatoriais

- Muitos experimentos envolvem o estudo dos efeitos de dois ou mais fatores.
- Em geral, os **planejamentos fatoriais** são mais eficientes para esse tipo de experimento.
- Por delineamento fatorial, queremos dizer que, em cada ensaio completo ou réplica do experimento, todas as combinações possíveis dos níveis dos fatores são investigadas. Assim, se há a níveis do fator A e b níveis do fator B, cada réplica contém todas as ab combinações de tratamentos.

Quando os fatores são organizados em um delineamento fatorial, frequentemente diz-se que eles estão **planejamentos cruzados**.

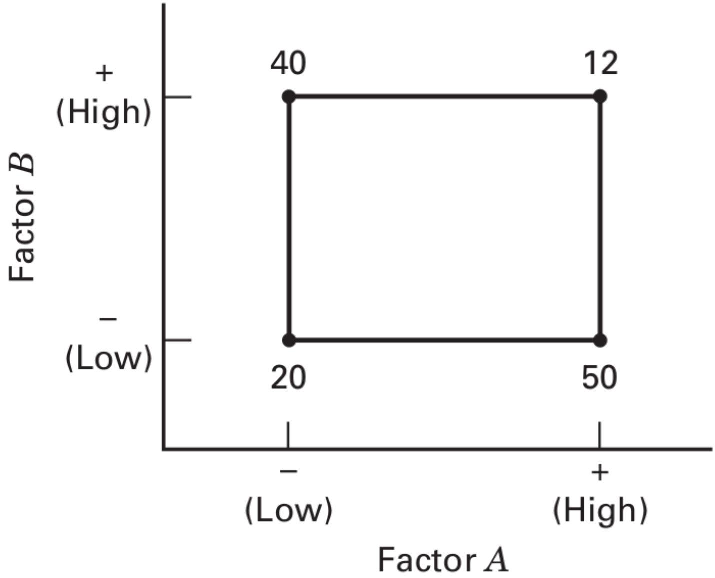
O efeito de um fator é definido como a **mudança na resposta produzida por uma mudança no nível do fator**.

Isso é frequentemente chamado de **efeito principal** porque se refere aos fatores primários de interesse no experimento.

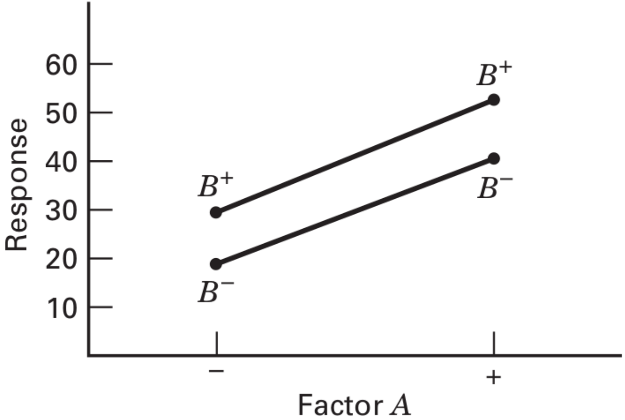
Por exemplo, considere um experimento fatorial de dois fatores com ambos os fatores de design em dois níveis. Chamamos esses níveis de "baixo" e "alto" e os denotamos como "-" e "+", respectivamente.

O efeito principal do fator A neste design de dois níveis pode ser pensado como a diferença entre a resposta média no nível baixo de A e a resposta média no nível alto de A.

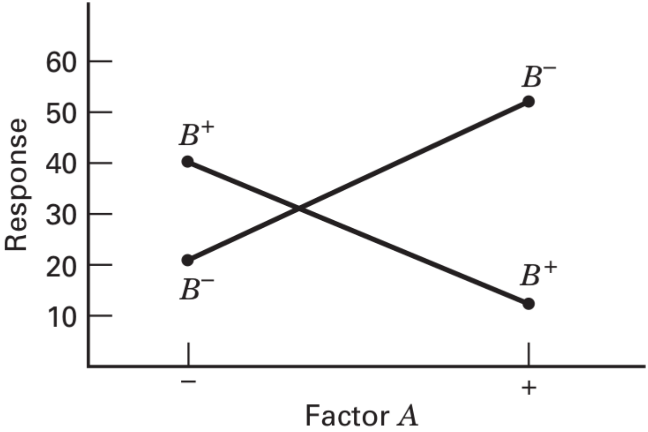
Exemplo



Exemplo

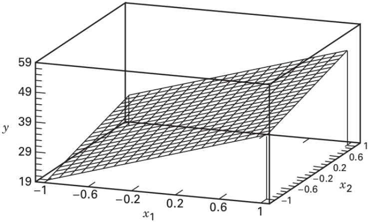


■ **FIGURE 5.3** **A factorial experiment without interaction**

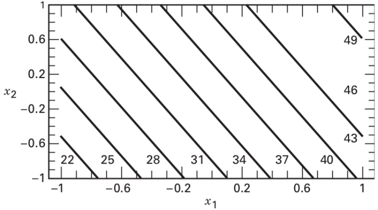


■ **FIGURE 5.4** **A factorial experiment with interaction**

Exemplo



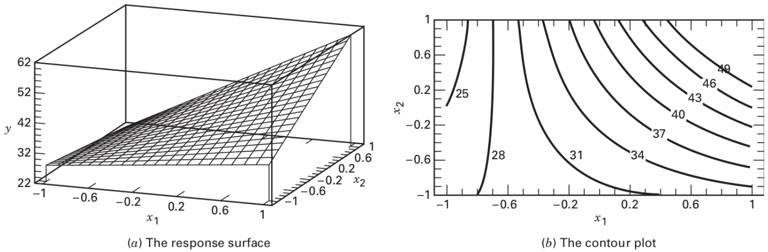
(a) The response surface



(b) The contour plot

■ **FIGURE 5.5** **Response surface and contour plot for the model $\hat{y} = 35.5 + 10.5x_1 + 5.5x_2$**

Exemplo



■ **FIGURE 5.6** **Response surface and contour plot for the model $\hat{y} = 35.5 + 10.5x_1 + 5.5x_2 + 8x_1x_2$**

Exemplo

		Factor B			
		1	2	$\dots$	b
Factor A	1	$y_{111}, y_{112}, \dots, y_{11n}$	$y_{121}, y_{122}, \dots, y_{12n}$		$y_{1b1}, y_{1b2}, \dots, y_{1bn}$
	2	$y_{211}, y_{212}, \dots, y_{21n}$	$y_{221}, y_{222}, \dots, y_{22n}$		$y_{2b1}, y_{2b2}, \dots, y_{2bn}$
	$\vdots$				
	a	$y_{a11}, y_{a12}, \dots, y_{a1n}$	$y_{a21}, y_{a22}, \dots, y_{a2n}$		$y_{ab1}, y_{ab2}, \dots, y_{abn}$

Modelo de médias

Modelo de médias (2^2):

$y_{ijk} = \mu_{ij} + \epsilon_{ijk}$

em que

$\mu_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij}$

sendo i : o índice para os níveis do fator A ($i = 1, 2$).

j : o índice para os níveis do fator B ($j = 1, 2$).

k : o índice para as réplicas (repetições), por tratamento ($k = 1, 2, \ldots, r$)

y_{ijk}: resposta da k-ésima réplica, no nível i de A e nível j de B.

τ_i : efeito do i-ésimo nível de A.

β_j : efeito do j-ésimo nível de B.

$(\tau\beta)_{ij}$: efeito da interação entre i-ésimo nível de A e j-ésimo nível de B.

ϵ_{ijk} : efeito aleatório da k-ésima observação do i-ésimo nível de A e j- ésimo nível de B,

em que ambos τ_i e ϵ_{ij} são variáveis aleatórias independentes.

Modelos com Efeitos Aleatórios

Os modelos lineares com efeitos mistos são uma extensão dos modelos lineares tradicionais que incorporam tanto efeitos fixos quanto efeitos aleatórios:

Modelo de efeitos (2^2):

$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \epsilon_{ijk}$

sendo i : o índice para os níveis do fator A $(i = 1, 2)$.

j : o índice para os níveis do fator B $(j = 1, 2)$.

k : o índice para as réplicas (repetições), por tratamento $(k = 1, 2, \ldots, r)$

y_{ijk}: resposta da k-ésima réplica, no nível i de A e nível j de B.

τ_i: efeito do i-ésimo nível de A.

β_j: efeito do j-ésimo nível de B.

$(\tau\beta)_{ij}$: efeito da interação entre i-ésimo nível de A e j-ésimo nível de B.

ϵ_{ijk}: efeito aleatório da k-ésima observação do i-ésimo nível de A e j- ésimo nível de B,

em que ambos τ_i e ϵ_{ij} são variáveis aleatórias independentes.

Testes de hipóteses de interesse

Igualdade de efeitos de tratamento na linha:

$$\begin{cases} H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_a = 0 \text{ contra} \\ H_1 : \text{ pelo menos um } \tau_i \neq 0 \end{cases}$$

Testes de hipóteses de interesse

Igualdade de efeitos de tratamento na coluna:

$$\begin{cases} H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_b = 0 \text{ contra} \\ H_1 : \text{ pelo menos um } \beta_j \neq 0 \end{cases}$$

Testes de hipóteses de interesse

Podemos estar interessados também em saber se existe interação entre os tratamentos

$$\begin{cases} H_0 : (\tau\beta)_{ij} = 0 \text{ para todo } i, j \\ H_1 : \text{ pelo menos um } (\tau\beta)_{ij} \neq 0 \end{cases}$$

Motivação - Exemplo 1

Uma panificadora fornece pão italiano para vários supermercados de uma cidade. Um estudo experimental foi desenvolvido para avaliar os efeitos do fator A, altura da prateleira, cujos níveis são em baixo e no meio, e do fator B, largura da prateleira, com níveis regular e larga, nas vendas (em número de unidades) deste pão durante certo período. Oito supermercados similares em termos de volume de vendas e clientela, foram utilizados no estudo. Cada um dos 4 tratamentos foi atribuído, ao acaso, a duas lojas de acordo com um planejamento completamente casualizado e a localização do pão em cada loja seguiu as especificações do tratamento para aquela loja. Os resultados estão apresentados a seguir

Motivação

	Largura da prateleira (B)	
Altura da prateleira (A)	Regular	Larga
Embaixo	47	46
Embaixo	43	40
No meio	62	67
No meio	68	71

Planejamentos fatoriais

São experimentos envolvendo 2 ou mais fatores, com o objetivo de examinar o efeitos dos fatores simultaneamente e possíveis interações entre eles, sobre a resposta de interesse. São muito utilizados na indústria e agronomia.

Experimento fatorial Completo

São experimentos envolvendo dois ou mais fatores, em que todas as possíveis combinações de níveis de fatores são testadas.

Experimento Fatorial Fracionado

São experimentos envolvendo dois ou mais fatores, nos quais apenas uma fração do fatorial completo é testada. Envolvem uma quantidade menor de provas do que o correspondente completo, mas abrem mão de certa quantidade de informação.

Desvantagem dos experimentos fatoriais

Número de combinações entre tratamentos cresce rapidamente quando o número de fatores e/ou o numero de níveis dos fatores aumentam.

Soluções

a) Considerar apenas um subconjunto de todos os possíveis tratamentos (experimentos fatoriais fracionários);

b) Considerar um número razoável de fatores e restringir o número de níveis de cada fator a 2.

Os dois níveis podem ser escolhidos de modo a cobrir, de algum forma, a amplitude (em termos práticos) dos níveis. Para alguns fatores, estes dois níveis são os únicos existentes.

Experimentos fatoriais 2^k

São experimentos envolvendo k fatores, cada qual com 2 níveis. Em experimentos fatoriais em dois níveis, a quantidade total de experiências (repetições) realizadas é sempre múltiplo de 2^k.
Exemplos:

a) Quantas experiências serão feitas se existirem dois fatores, em dois níveis, com duas repetições?

Resp.: $2^2 \times 2 = 4 \times 2 = 8$ observações.

b) E se forem três fatores, em dois níveis, com cinco repetições?

Resp.: $2^3 \times 5 = 8 \times 5 = 40$ observações.

EXPERIMENTO 2^2 (k = 2 fatores)

Retomando o Exemplo 1 (panificadora), consideremos os dois fatores com dois níveis:

- Fatores:
  - A - Altura da prateleira: baixo e no meio
  - B - Largura da prateleira: regular e larga
- Unidade experimental: loja (supermercado)
- Resposta: número de unidades vendidas de pão italiano

A tabela para coleta dos resultados é da forma:

	Largura da prateleira (B)	
Altura da prateleira (A)	Regular (B_0)	Larga (B_1)
Embaixo (A_0)	(1)	(3)
No meio (A_1)	(2)	(4)

$\implies$ índice 0: nível baixo, índice 1: nível alto

Atribuímos “-1” ao nível “0” e “+1” ao nível “1”

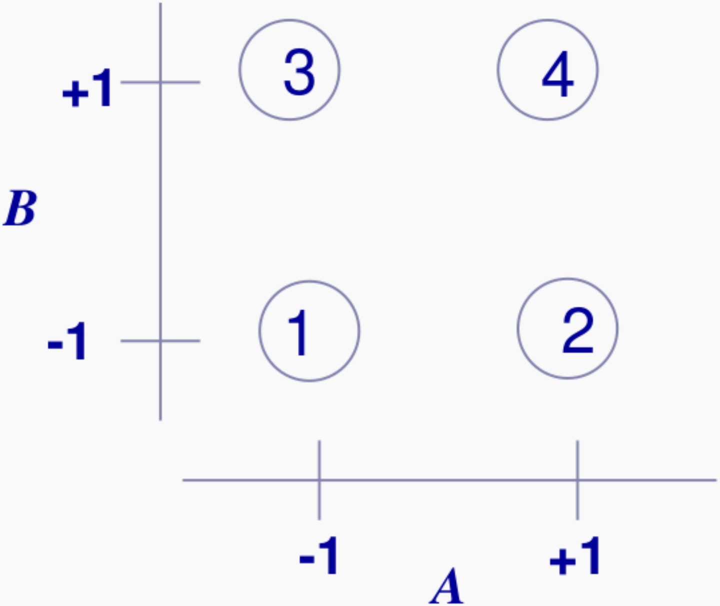
$\Longrightarrow$

	$B_0(-1)$	$B_1(1)$
$A_0(-1)$	(1)	(3)
$A_1(1)$	(2)	(4)

ou, alternativamente, escrevemos a tabela de contrastes, das quatro combinações possíveis, da forma:

Experiência	Tratamento	A	B	AB	Resposta Y
1	A_0B_0	-1	-1	+1	
2	A_1B_0	+1	-1	-1	
3	A_0B_1	-1	+1	-1	
4	A_1B_1	+1	+1	+1	

Graficamente



Experimentos fatoriais 2^k

Para $k = 3$

Tabela de contrastes (8 experiências possíveis)

Experiência	Tratamento	A	B	C	Resposta Y
1	$A_0B_0C_0$	-1	-1	-1	
2	$A_1B_0C_0$	$+1$	-1	-1	
3	$A_0B_1C_0$	-1	$+1$	-1	
4	$A_1B_1C_0$	$+1$	$+1$	-1	
5	$A_0B_0C_1$	-1	-1	$+1$	
6	$A_1B_0C_1$	$+1$	-1	$+1$	
7	$A_0B_1C_1$	-1	$+1$	$+1$	
8	$A_1B_1C_1$	$+1$	$+1$	$+1$	

- Fator A $\implies$ alternância de níveis é de linha pra linha
- Fator B $\implies$ alternância de níveis é a cada 2 linhas ($=2^1$)
- Fator C $\implies$ alternância de níveis é a cada 4 linhas ($=2^2$)

Experimentos fatoriais 2^k

Regra geral:

Tabela de contrastes com qualquer número de fatores k

Alternância:

	2^0	2^1	2^2	2^3	$\ldots$
Experiência	(A)	(B)	(C)	(D)	$\ldots$
1	-1	-1	-1	-1	
2	+1	-1	-1	-1	
3	-1	+1	-1	-1	
4	+1	+1	-1	-1	
5	-1	-1	+1	-1	
6	+1	-1	+1	-1	
7	-1	+1	+1	-1	
8	+1	+1	+1	-1	
9	-1	-1	-1	+1	
10	+1	-1	-1	+1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

EXERCÍCIO: O experimento **2^4** é aquele em que há **quatro fatores**, cada um com **2 níveis**. Complete a **tabela de contrastes** para este experimento, simila aos casos anteriores.

Quantos tratamentos/experiências diferentes há num 2^4?

Experiência	Tratamento	A	B	C	D
1	$A_0B_0C_0D_0$	-1	-1	-1	__
2	$A_1B_0C_0D_0$	1	-1	-1	__
3	$A_0B_1C_0D_0$	-1	1	-1	__
4	$A_1B_1C_0D_0$	1	1	-1	__
5	$A_0B_0C_1D_0$	-1	-1	1	__
6	$A_1B_0C_1D_0$	1	-1	1	__
7	$A_0B_1C_1D_0$	-1	1	1	__
8	$A_1B_1C_1D_0$	1	1	1	__
9	$A_0B_0C_0D_1$	-1	-1	__	__
10	$A_1B_0C_0D_1$	1	-1	__	__
11	$A_0B_1C_0D_1$	-1	1	__	__
12	$A_1B_1C_0D_1$	1	1	__	__
13	$A_0B_0C_1D_1$	-1	__	__	__
14	$A_1B_0C_1D_1$	1	__	__	__
15	$A_0B_1C_1D_1$	-1	__	__	__
16	$A_1B_1C_1D_1$	1	__	__	__

EXPERIMENTO 2^2 (k = 2 fatores) Como determinar a significância estatística de um fator nos planejamentos fatoriais 2ˆk? (ANOVA)

Exemplo: 2 fatores com 3 réplicas

	B_0 (-1)	$B_1(1)$
A_0 (-1)	y_{111}	y_{121}
	y_{112}	y_{122}
	y_{113}	y_{123}
A_1 (+1)	y_{211}	y_{221}
	y_{212}	y_{222}
	y_{113}	y_{223}

Qual o modelo estatístico para representar estes dados?

A **TABELA DE ANOVA** para experimentos com 2 fatores fixos, com dois níveis cada e r réplicas é dada por:

ANOVA - 2^2

Fonte de Variação	$g.l.$	SQ	QM	Teste F
Fator A	1	$SQ_A = r(\text{efeito } A)^2$	$QM_A = SQ_A = S_A^2$	$F_A = QM_A / QM_{Er}$
Fator B	1	$SQ_B = r(\text{efeito } B)^2$	$QM_B = SQ_B = S_B^2$	$F_B = QM_B / QM_{Er}$
Interação AxB	1	$SQ_{AB} = r(\text{efeito } AB)^2$	$QM_{AB} = SQ_{AB} = S_{AB}^2$	$F_{AB} = QM_{AB} / QM_{Er}$
Erro	$4(r-1)$	SQ_{Er}	$QM_{Er} = SQ_{Er}/4(r-1) = S_E^2$	
Total	$4r - 1$	SQ_T		

$\Rightarrow$ Como encontrar (estimar) o efeito de A, efeito de B e efeito de AB?

Exemplo 2: Uma certa pequena empresa, dispõe de dois tipos de máquinas (A_0 e A_1) para executar determinada tarefa, que pode ser realizada por dois operadores (B_0 e B_1). Deseja-se verificar se existem diferenças quanto às maquinas ou operadores, com relação ao tempo de execução da tarefa (em segundos).

	operadores	
máquinas	B_0	B_1
A_0	(1) 20, 22	(3) 40, 37
A_1	(2) 50, 46	(4) 12, 15

CÁLCULO DAS ESTIMATIVAS DOS EFEITOS

A análise fica facilitada utilizando-se a Tabela de Contrastes.

Experiência	Trat.	A	B	AB	Resp (media)
1	A_0B_0	-1	-1	+1	21,0
2	A_1B_0	+1	-1	-1	48,0
3	A_0B_1	-1	+1	-1	38,5
4	A_1B_1	+1	+1	+1	13,5
Σ"-"/2		29,75	34,50	43,25	
Σ"+"/2		30,75	26,99	17,25	
Efeito estim.		+1,00	-8,50	-26,00	

CÁLCULO DAS ESTIMATIVAS DOS EFEITOS

Interpretação:

- Quando o fator A vai do nível -1 (0) para o nível +1 (1), o tempo de operação aumenta, em média, de 1 s $\rightarrow$ este é o **efeito estimado do Fator A.**
  Regra geral: o efeito principal de A representa a mudança média na variável resposta quando A_0 é mudado para A_1.
- Quando o fator B vai do nível -1 para o nível +1, o tempo de operação diminui, em média, de 8,50 s $\rightarrow$ este é o **efeito estimado do Fator B.**
- Analogamente, o efeito estimado da interação é de -26 s.

No Exemplo 2, a tabela de ANOVA resulta em:

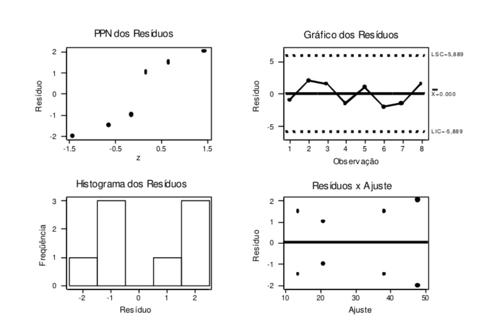
Fonte de Variação	*g.l.*	*SQ*	*QM*	Teste *F*
Fator *A*	1	2	2,0	F_A = 0,42
Fator *B*	1	144,5	144,5	F_B = 30,23
Interação *A*x*B*	1	1352,0	1352,0	F_{AB} = 282,85
Erro	4	19,1	4,78	
Total	7	1517,6		

O valor crítico da estatística F é $F(1, 4; 5\%) = 7{,}71$.

Conclusão: verifica-se que há interação significativa e, portanto, esta precisa ser considerada na análise do delineamento.

ANÁLISE DE RESÍDUOS

Em geral, é feita uma análise gráfica dos residuos:



Para que o modelo seja considerado adequado, os resíduos devem apresentar-se distribuídos aleatoriamente em torno do valor "0"

Experimentos fatoriais 2^k

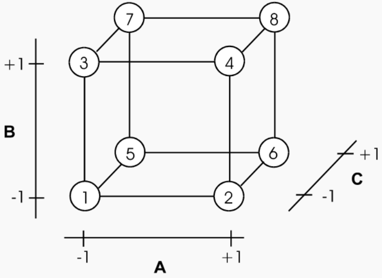
Experimento $\mathbf{2^3}$ é aquele em que há **três fatores**, cada um com **2 níveis**.

	A_0 (-1)		A_1 (+1)	
	B_0 (-1)	B_1 (+1)	B_0 (-1)	B_1 (+1)
C_0 (-1)	(1)	(3)	(2)	(4)
C_1 (+1)	(5)	(7)	(6)	(8)

Tabela de contrastes:

Experiência	Tratamento	A	B	C	AB	AC	BC	ABC	Respostas
1	$A_0B_0C_0$	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	
2	$A_1B_0C_0$	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	
3	$A_0B_1C_0$	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	
4	$A_1B_1C_0$	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	
5	$A_0B_0C_1$	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	
6	$A_1B_0C_1$	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	
7	$A_0B_1C_1$	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	
8	$A_1B_1C_1$	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	

ou, ainda, graficamente:



Experimentos fatoriais 2^k

Tabela de ANOVA – Delineamento Fatorial 2^3

Fonte de Variação	*g.l.*	*SQ*	*QM*	Teste *F*
Fator *A*	1	$SQ_A = 2r(\text{efeito } A)^2$	$QM_A = SQ_A = S_A^2$	$F_A = S_A^2/S_E^2$
...				
Fator *C*	1	$SQ_B = 2r(\text{efeito } C)^2$	$QM_B = SQ_C = S_C^2$	$F_B = S_C^2/S_E^2$
Interação *A*x*B*	1	$SQ_{AB} = 2r(\text{efeito } AB)^2$	$QM_{AB} = SQ_{AB} = S_{AB}^2$	$F_{AB} = S_{AB}^2/S_E^2$
...	...	...	...	...
Interação *A*x*B*x*C*	1	$SQ_{ABC} = 2r(\text{efeito } ABC)^2$	$QM_{ABC} = SQ_{ABC} = S_{ABC}^2$	$F_{ABC} = S_{ABC}^2/S_E^2$
Erro	$8(r-1)$	$SQ_E = SQ_T - SQ_A - \ldots - SQ_{ABC}$	$S_E^2 = SQ_{Er}/8(r-1)$	
Total	$8r - 1$	$SQ_T = (8r-1)S_T^2$		

Obs.: Em experimentos 2^k cada soma de quadrados é calculada pelo quadrado do correspondente efeito multiplicado por $\mathbf{2^{k-2}}$.

EXPERIMENTOS FATORIAIS 2^3

Exemplo 3: Pilhas alcalinas podem ser montadas em dois diferentes tipos de linha (automática ou semi-automática), utilizando-se hidróxido de potássio ou hidróxido de índio como eletrólito e, eletrodos planos ou cilíndricos. Todos estes fatores podem ter impacto na impedância da pilha elétrica, comprometendo a sua vida útil.

		SIGNIFICADO
A	A_0	Linha de montagem semi-automática
	A_1	Linha de montagem automática
B	B_0	Hidróxido de potássio
	B_1	Hidróxido de índio
C	C_0	Eletrodo plano
	C_1	Eletrodo cilíndrico

- Cada combinação de níveis dos fatores foi repetida quatro vezes (4 réplicas) e os resultados estão na tabela a seguir.

EXPERIMENTOS FATORIAIS 2^3

A_0				A_1			
B_0		B_1		B_0		B_1	
C_0	C_1	C_0	C_1	C_0	C_1	C_0	C_1
-0,1	1,1	0,6	0,7	0,6	1,9	1,8	2,1
1,0	0,5	1,0	-0,1	0,8	0,7	2,1	2,3
0,6	0,1	0,8	1,7	0,7	2,3	2,2	1,9
-0,1	0,7	1,5	1,2	2,0	1,9	1,9	2,2

ou, equivalentemente, pela tabela:

	A_0		A_1	
	B_0	B_1	B_0	B_1
C_0	(1) -0,1 1,0 0,6 -0,1	(3) 0,6 1,0 0,8 1,5	(2) 0,6 0,8 0,7 2,0	(4) 1,8 2,1 2,2 1,9
C_1	(5) 1,1 0,5 0,1 0,7	(7) 0,7 -0,1 1,7 1,2	(6) 1,9 0,7 2,3 1,9	(8) 2,1 2,3 1,9 2,2

Tabela de contrastes (Exemplo 3):

Experiência	A	B	C	AB	AC	BC	ABC	*Resp. media*
1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	0,350
2	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	1,025
3	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	0,975
4	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	2,000
5	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	0,600
6	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	1,700
7	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	0,875
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	2,125
Σ "-"/4	0,70	0,92	1,09	1,15	1,13	1,32	1,23	
Σ "+"/4	1,72	1,50	1,33	1,27	1,29	1,10	1,19	
Efeito estim	1,02	0,58	0,24	0,12	0,16	-0,22	-0,04	

Exemplo 2: Tabela de ANOVA (slide 29)

Fonte	*g.l.*	*SQ*	*QM*	Teste *F*
A	1	8,32	8,32	32,00
B	1	2,69	2,69	10,35
C	1	0,46	0,46	1,77
AxB	1	0,12	0,12	0,46
AxC	1	0,20	0,20	0,77
BxC	1	0,39	0,39	1,50
AxBxC	1	0,01	0,01	0,04
Erro	24	6,32	0,26	
Total	31	18,60	0,60	

O valor crítico da estatística F é $F(1, 24; 5\%) = 4{,}26$.

Conclusão: O resultado da ANOVA revela que:

- ✓ Os fatores A (linha de montagem) e B (hidróxido) são significativos.
- ✓ O fator C e todas as interações não são significativos.

ANÁLISE DE RESÍDUOS

Nesse experimento como somente os fatores A e B resultaram estatisticamente significantes, o modelo de previsão é:

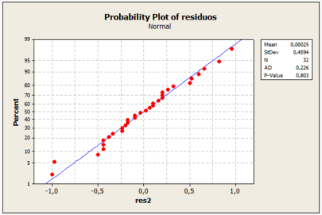
$$\hat{y}_{ij} = 1{,}206 + 0{,}51.y_A + 0{,}29.y_B$$

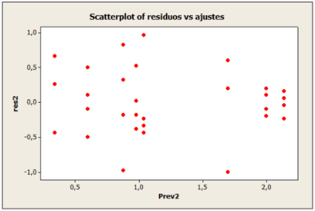
em que,

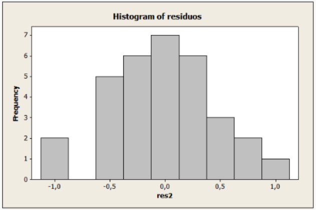
y_A e y_B assumem valores -1 ou +1,
$\bar{y}_{..}$ é a média geral de todas as observações.

EXPERIMENTOS FATORIAIS 2^3

Residuos Exemplo 2:







EXPERIMENTOS 3^k

O desenvolvimento dos experimentos com dois níveis pode ser estendido para qualquer quantidade de fatores. No entanto, o maior problema que se enfrenta é a quantidade total de experiências a ser feita e, consequentemente, o seu custo.

Além dos experimentos 2^k existem situações em que se faz necessário o emprego de experimentos do tipo 3^k, ou seja, experimentos em que os k fatores envolvidos apresentam três níveis diferentes.

EXPERIMENTOS 3^k

Para k = 2 fatores, (experimento 3^2)

Tabela de contrastes (nove experiências possíveis):

Experiência	Tratamento	A	B	Respostas
1	A_0B_0	0	0	
2	A_1B_0	1	0	
3	A_2B_0	2	0	
4	A_0B_1	0	1	
5	A_1B_1	1	1	
6	A_2B_1	2	1	
7	A_0B_2	0	2	
8	A_1B_2	1	2	
9	A_2B_2	2	2	