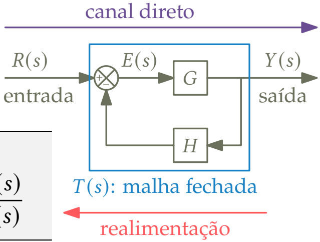
Controle e Aplicações • Aula 5.1

Métodos gráficos em controle clássico
Lugar das raízes (*root locus*)

Prof. Dr. Renato Maia Matarazzo Orsino

Funções de transferência em malha aberta e malha fechada



Canal direto: $E(s) \mapsto Y(s)$

$$G(s) = G_{\mathrm{c}}(s)G_{\mathrm{p}}(s) = K_G \frac{N_G(s)}{D_G(s)}$$

Malha aberta

$$L(s) = H(s)G(s) = K\frac{N_H(s)N_G(s)}{D_G(s)D_H(s)} = K\frac{N(s)}{D(s)}$$

Sensibilidade: $R(s) \mapsto E(s)$

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} = \frac{D(s)}{D(s) + KN(s)} = \frac{D(s)}{B(s)}$$

Malha fechada: $R(s) \mapsto Y(s)$

$$T(s) = G(s)S(s) = \frac{KN_G(s)D_H(s)}{D(s) + KN(s)} = \frac{A(s)}{B(s)}$$

Polos e zeros em malha aberta e malha fechada

	Polos	Zeros
Malha aberta	$D(s) = 0$	$N(s) = 0$
Malha fechada	$B(s) = 0$	$A(s) = 0$

O número complexo s é um *polo em malha fechada* se, e somente se:

$$B(s) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad D(s) + KN(s) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{K}D(s) + N(s) = 0$$

Se $K \to 0$, os *polos em malha aberta* se tornam *polos em malha fechada*.
Se $K \to \infty$, os *zeros em malha aberta* se tornam *polos em malha fechada*.

Assim, um número complexo s só poderá ser um *polo em malha fechada* se existir um número real $0 < K < \infty$ tal que:

$$\frac{N(s)}{D(s)} = -\frac{1}{K} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{N(s)}{D(s)}\right| = \frac{1}{K} \quad \text{e} \quad \angle N(s) - \angle D(s) \equiv 180^\circ$$

As condições necessárias para que s seja um *polo em malha fechada* podem ser verificadas a partir da *função de transferência em malha aberta*.

Lugar das raízes

Seja $L(s) = K\dfrac{N(s)}{D(s)}$, $K > 0$, a *função de transferência em malha aberta*.

O *lugar das raízes* é o conjunto das possíveis posições de *pólos em malha fechada* obtidos a partir da seleção de um valor para o ganho K, ou seja, o lugar geométrico dos $s \in \mathbb{C}$ tais que:

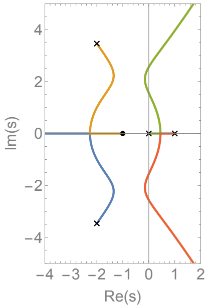
$$\angle L(s) = \angle N(s) - \angle D(s) \equiv 180^\circ$$

$\alpha \equiv \beta \iff \alpha - \beta = 360^\circ h$ para algum $h \in \mathbb{Z}$.

O exemplo ao lado ilustra o lugar das raízes da função de transferência do tipo $m = 1$:

$$L(s) = \frac{K(s+1)}{s(s-1)(s^2+4s+16)} = \frac{K(s+1)}{s^4+3s^3+12s^2-16s}$$

$\times$ polos de MA ($n = 4$) $\quad\bullet$ zeros de MA ($q = 2$)



Função de transferência em malha aberta

A *função de transferência em malha aberta* de um *sistema SISO do tipo m e de ordem n*, com $n = m + r$, pode ser escrita nas seguintes formas:

$$L(s) = K_m \frac{(1 + t_1 s) \dots (1 + t_q s)}{s^m (1 + \tau_1 s) \dots (1 + \tau_r s)} = K \frac{(s - z_1) \dots (s - z_q)}{s^m (s - p_1) \dots (s - p_r)}$$

A relação entre as constantes K_m e K pode ser obtida tomando o limite de $s^m L(s)$ para $s \to 0$:

$$K_m = K \frac{(-z_1) \dots (-z_q)}{(-p_1) \dots (-p_r)} \quad \Leftrightarrow \quad K = K_m \frac{(-p_1) \dots (-p_r)}{(-z_1) \dots (-z_q)}$$

Note que tanto K quanto K_m podem ser escritas como um produto de constantes conhecidas de cada uma das funções de transferência que compõem $L(s)$ e uma constante K_c a ser ajustada, vinda da função $G_\mathsf{c}(s)$ do compensador.

Conforme vimos na aula 4.1, K_m está associada ao erro, em regime permanente, de acompanhamento de referência do sistema em malha fechada.

Avaliação geométrica de funções de transferência

Representando a FTMA do sistema na forma:

$$L(s) = K\frac{(s-z_1)\dots(s-z_q)}{s^m(s-p_1)\dots(s-p_r)}$$

pode-se interpretar cada termo da forma $(s-b)$ como um vetor posição de $s \in \mathbb{C}$ relativo à origem $b \in \mathbb{C}$. Representando em forma polar:

$$(s-b) = |s-b|\,\underline{/s-b}$$

entende-se que $|s-b|$ é o tamanho do vetor e $\underline{/s-b}$ o ângulo formado com o eixo real (medido no sentido anti-horário). Assim, para $K > 0$:

$$|L(s)| = |K|\frac{|s-z_1|\dots|s-z_q|}{|s|^m|s-p_1|\dots|s-p_r|}$$

$$\underline{/L(s)} = -m\underline{/s} + \underline{/s-z_1} + \dots + \underline{/s-z_q} - \underline{/s-p_1} - \dots - \underline{/s-p_r}$$

Lugar das raízes – propriedades

❶ O diagrama é *simétrico com respeito ao eixo real* e o *número total de ramos* observados é igual ao *número n de polos de malha aberta*.

❷ Cada um dos n ramos *parte de um polo de malha aberta, com $K \longrightarrow 0$*. Destes, q ramos *terminam em um zero de malha aberta, com $K \longrightarrow \infty$* e outros *$(n-q)$ ramos tendem ao infinito, seguindo assíntotas retilinÍneas*:

- que se interceptam no ponto: $\overline{\sigma} = \dfrac{p_1 + \ldots + p_r - z_1 - \ldots - z_q}{n-q}$
- que formam com o eixo real ângulos da forma: $\alpha_k = 180^\circ \dfrac{(2k+1)}{n-q}$

com *q sendo o número de zeros de malha aberta*.

❸ Um *ponto s sobre o eixo real* pertence ao lugar das raízes se, e somente se, o *número total de polos e zeros reais à direita de s for ímpar*. Pólos e zeros repetidos devem ser contabilizados de acordo com sua multiplicidade algébrica.

Lugar das raízes – propriedades

Demonstração ❸ – considerando $s \in \mathbb{R}$:

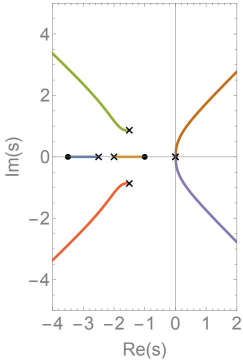
- se b e $\bar{b}$ são um par de polos ou zeros conjugados (*não-reais*), a contribuição líquida do par $(s-b)$ e $(s-\bar{b})$ para $\angle L(s)$ é nula pois $\angle s-b = -\angle s-\bar{b}$;
- para um polo ou zero $a \in \mathbb{R}$, $\angle s-a$ será 180°, se $s < a$, ou 0°, se $s > a$.

Assim, um número total ímpar de polos e zeros à direita de $s \in \mathbb{R}$ garante que $\angle L(s)$ será um múltiplo ímpar de 180°, o que é a condição suficiente para s pertencer ao lugar das raízes.

O exemplo ao lado ilustra o lugar das raízes da função de transferência do tipo $m = 2$:

$$L(s) = K \frac{(s+1)(s+3.5)}{s^2(s+2)(s+2.5)\left(s^2+3s+3\right)}$$

que tem $n = 6$ polos ($\times$) e $q = 2$ zeros ($\bullet$). Note que como $n - q = 4$, o diagrama possui 4 assíntotas que formam ângulos de ± 45° e ± 135° com o eixo real.



Lugar das raízes – propriedades

❹ Os *pontos de separação* são caracterizados pela chegada ou saída do eixo real de dois ou mais ramos do diagrama, sempre formando um *ângulo reto* com o eixo real. Ocorrem quando, para algum valor de $K > 0$, $s \in \mathbb{R}$ é uma raiz múltipla de $B(s) = D(s) + KN(s) = 0$, ou seja:

$$\begin{cases} D(s) + KN(s) = 0 \\ D'(s) + KN'(s) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{D'(s)}{D(s)} = \frac{N'(s)}{N(s)} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}L(s)}{\mathrm{d}s} = 0$$

❺ Os pontos de cruzamento com o eixo imaginário, se existirem, podem ser determinados a partir da *tabela de Routh*.

❻ O ângulo ϕ_i (ψ_i) que um ramo forma com a horizontal ao *partir de um polo de malha aberta* p_i (*chegar a um zero de malha aberta* z_i) é dado por:

$$\phi_i = \lim_{s\to p_i} \angle s - p_i \equiv 180^\circ - m\angle p_i + \sum_k \angle p_i - z_k - \sum_{l\neq i} \angle p_i - p_l$$

$$\psi_i = \lim_{s\to z_i} \angle s - z_i \equiv -180^\circ + m\angle z_i - \sum_{k\neq i} \angle z_i - z_k + \sum_l \angle z_i - p_l$$

Lugar das raízes – exemplo

O exemplo ao lado ilustra o lugar das raízes da função de transferência do tipo $m = 1$:

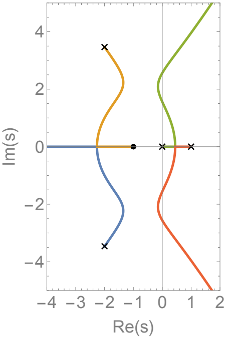
$$L(s) = \frac{K(s+1)}{s(s-1)(s^2+4s+16)} = \frac{K(s+1)}{s^4+3s^3+12s^2-16s}$$

$n = 4$ polos ($\times$) em $p_0 = 0$, $p_1 = 1$, $p_{2,3} = -2 \pm 2\sqrt{3}\,\mathrm{j}$

$q = 1$ zero ($\bullet$) em $z_1 = -1$

$n - q = 3$ assíntotas formando $\pm 60°$ e $180°$ com o eixo real e se interceptando no ponto:

$$\overline{\sigma} = \frac{(1-2-2)-(-1)}{3} = -\frac{2}{3}$$



Os pontos de separação são as raízes reais de:

$$\frac{4s^3+9s^2+24s-16}{s^4+3s^3+12s^2-16s} = \frac{1}{s+1} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} s = -2.263 \\ s = 0.448 \end{cases}$$

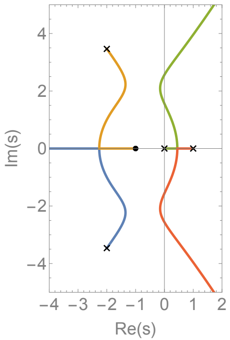
O ângulo que o ramo forma com a horizontal ao partir do polo $p_2 = -2 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{j}$ é:

$$\begin{aligned}\phi_2 &= 180° - 1\,\underline{/p_2} + \underline{/p_2 - z_1} - \underline{/p_2 - p_1} - \underline{/p_2 - p_3} \\ &= 180° - 120° + 106° - 131° - 90° = -55°\end{aligned}$$

Lugar das raízes – exemplo

$$B(s) = s^4 + 3s^3 + 12s^2 + (K-16)s + K$$

s^4	1	12	K
s^3	3	$K-16$	
s^2	$\dfrac{52-K}{3}$	K	
s^1	$\dfrac{-832+59K-K^2}{52-K}$		
s^0	K		



Para a estabilidade em malha fechada, deve-se ter:

$$52 - K > 0 \quad \Rightarrow \quad K < 52$$

$$-832 + 59K - K^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad 23.32 < K < 35.68$$

Em ambos os valores críticos, $K_{\text{min}} = 23.32$ e $K_{\text{max}} = 35.68$, a linha s^1 da tabela de Routh se torna identicamente nula, ou seja, os pontos de cruzamento com o eixo imaginário também são raízes do *polinômio auxiliar* definido na linha s^2:

$$\frac{52-K}{3}s^2 + K = 0 \quad \Rightarrow \quad s = \pm\,\mathrm{j}\sqrt{\frac{3K}{52-K}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} s = \pm\,1.562\,\mathrm{j} & (K_{\text{min}} = 23.32) \\ s = \pm\,2.562\,\mathrm{j} & (K_{\text{max}} = 35.68) \end{cases}$$

Lugar das raízes – efeito da adição de polos e zeros

Heurística: a presença de um *zero* em $L(s)$ *"atrai" para si os ramos* do lugar das raízes; a presença de um *polo* em $L(s)$, *"repele" tais ramos*.

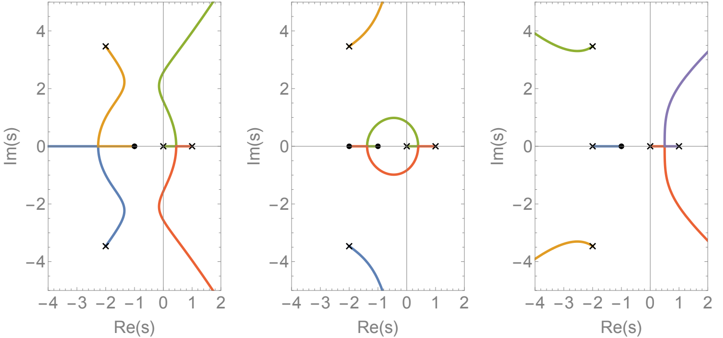


Diagrama original (esquerda); com adição de um *zero* em $s = -2$ (centro); com adição de um *polo* em $s = -2$ (direita).

Perguntas?

reorsino@usp.br