PRG0039 Fundamentos da Matemática Elementar

Aula 2: Equações de 2o grau e Polinômios

Equações de segundo grau

Uma equação de segundo grau com uma variável é uma igualdade que segue a forma:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

para $a \neq 0$, e *b* e *c* números reais. Dizemos que a, b e c são os coeficientes da equação.

Exemplos:

$$a)\quad x^2 + 3x + 1 = 0 \Rightarrow a = 1, \quad b = 3 \quad c = 1$$

$$b)\quad 4x^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = 4, \quad b = 0 \quad c = -1$$

$$c)\quad -x^2 - 7x = 0 \Rightarrow a = -1, \quad b = -7 \quad c = 0$$

Equações de segundo grau

A solução de uma equação de segundo grau é obtida usando-se a fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{onde} \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

Uma equação de segundo grau pode ter nenhuma, uma ou duas soluções reais, a depender do sinal de Δ.

Equações de segundo grau

Número de soluções de uma equação de segundo grau:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0} \rightarrow \boxed{\begin{array}{lll} \Delta = b^2 - 4ac & & \\ & & \\ \Delta > 0 & \Rightarrow & \text{tem duas soluções reais} \\ \Delta = 0 & \Rightarrow & \text{tem uma solução real} \\ \Delta < 0 & \Rightarrow & \text{não tem solução real} \end{array}}$$

Exemplos:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0 \qquad \Delta = (-5)^2 - 4.1.6 = 25 - 24 = 1 > 0$

b) $x^2 + 4x + 4 = 0 \qquad \Delta = (4)^2 - 4.1.4 = 16 - 16 = 0$

c) $x^2 - 5x + 7 = 0 \qquad \Delta = (-5)^2 - 4.1.7 = 25 - 28 = -3 < 0$

Equações de segundo grau

Resolvendo equações de segundo grau:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4.1.6 = 25 - 24 = 1$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2.1} = \begin{cases} x = \dfrac{5+1}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \\[2ex] x = \dfrac{5-1}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

b) $x^2 + 4x + 4 = 0$

$\Delta = (4)^2 - 4.1.4 = 16 - 16 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2.1} = \begin{cases} x = \dfrac{-4+0}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2 \\[2ex] x = \dfrac{-4-0}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

c) $x^2 - 5x + 7 = 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4.1.7 = 25 - 28 = -3$

como $\nexists$ x $\in$IR tal que x $= \sqrt{-3}$ então a equação não tem solução real

Monômios e polinômios

Monômios são funções que associam a um valor numérico x uma potência de x multiplicada por um número real. A expressão algébrica geral que define um monômio é dada por

$$m(x) = ax^n, \quad a \in IR$$

onde n inteiro não negativo.

A potência de x indica o grau do monômio:

$a)\ \ m_1(x) = 2x, \ \ \text{grau}\ \ 1;$

$b)\ \ m_2(x) = 1, \ \ \text{grau}\ \ 0;$

$c)\ \ m_3(x) = -\dfrac{3}{7}x^3, \ \ \text{grau}\ \ 3.$

Monômios e polinômios

Multiplicação de monômios:

O produto de dois monômios resulta num terceiro monômio de grau igual à soma dos graus dos monômios multiplicados.

$$\boxed{ax^n.bx^m = abx^{n+m}}$$

Exemplos:

$$m_1(x) = x, \quad m_2(x) = -2x^4 \Rightarrow m_1(x) \times m_2(x) = x(-2x^4) = -2xx^4 = -2x^{1+4} = -2x^5$$

Monômios e polinômios

Soma de monômios:

A soma de dois ou mais monômios de mesmo grau resulta outro monômio de mesmo grau e coeficiente igual à soma dos coeficientes dos monômios somados.

$$\boxed{ax^n + bx^n = (a+b)x^n}$$

Exemplos:

$$a)\quad m_1(x) = x^4,\quad m_2(x) = -2x^4 \Rightarrow m_1(x) + m_2(x) = x^4 + (-2x^4) = (1 + (-2))x^4 = -x^4$$

$$b)\quad m_1(x) = \frac{1}{3}x,\quad m_2(x) = -2x,\quad m_3(x) = -\frac{4}{3}x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1(x) + m_2(x) + m_3(x) = (\frac{1}{3} + (-2) + (-\frac{4}{3}))x = -3x.$$

Monômios e polinômios

Polinômios são definidos pela soma de monômios de graus quaisquer. Sua fórmula geral é dada por:

$$\boxed{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n, \quad a_i \in IR}$$

Exemplos:

$$p_1(x) = 2x, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 2$$

$$p_2(x) = 1 - 5x + x^2, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = -5, \quad a_2 = 1$$

$$p_3(x) = \frac{3}{7}x + x^3, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{3}{7}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 1$$

Monômios e polinômios

O grau de um polinômio não nulo é dado pelo maior dentre os graus dos monômios que o definiu. Assim, o grau do polinômio p_1 é 1, do polinômio p_2 é 2 e do polinômio p_3 é 3.

$$p_1(x) = 2x, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 2$$

$$p_2(x) = 1 - 5x + x^2, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = -5, \quad a_2 = 1$$

$$p_3(x) = \frac{3}{7}x + x^3, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{3}{7}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 1$$

$$\boxed{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n, \quad a_i \in IR}$$

Monômios e polinômios

O valor numérico de um polinômio p(x) para x = a, é o número que se obtém substituindo x por a e efetuando todas as operações indicadas pela expressão que define o polinômio.

Exemplos:

$$p(x) = -x^4 + 2x - 1 \qquad x = -1$$

$$p(-1) = -(-1)^4 + 2(-1) - 1 = -1 - 2 - 1 = -4$$

$$p(x) = 2 + x^3 \qquad x = 3$$

$$p(3) = 2 + 3^3 = 2 + 27 = 29$$

Monômios e polinômios

A soma de dois polinômios é obtida a partir da soma dos monômios que os geraram.

Exemplo:

$$p_1(x) = -x^4 - 2x^3 + 2x - 1$$

$$p_2(x) = 2 + x^3$$

$$p_1(x) + p_2(x) = -x^4 - 2x^3 + 2x - 1 + 2 + x^3 = -x^4 + (-2+1)x^3 + 2x - 1 + 2 = -x^4 - 1x^3 + 2x + 1$$

Monômios e polinômios

O produto de dois polinômios resulta num terceiro polinômio de grau igual à soma dos graus dos polinômios multiplicados. A multiplicação de polinômios consiste na soma das multiplicações de cada monômio que compõe os polinômios envolvidos no produto.

Exemplo:

$$p_1(x) = 2x - 3, \quad p_2(x) = -2x^4 + x^3 \Rightarrow p_1(x) \times p_2(x) = (2x-3)(-2x^4 + x^3) =$$

$$= 2x \cdot (-2x^4) + 2x \cdot x^3 + (-3) \cdot (-2x^4) + (-3) \cdot x^3 = -4x^5 + 2x^4 + 6x^4 - 3x^3 = -4x^5 + 8x^4 - 3x^3$$

Monômios e polinômios

A divisão de polinômios pode, em alguns casos, ser feita por simplificação.

$$q(x) = \frac{8x^3 - x}{x} = \frac{8x^3}{x} - \frac{x}{x} = 8x^2 - 1$$

$$\therefore\ p(x) = x(8x^2 - 1).$$

Monômios e polinômios

Existe uma regra (teorema) que permite o cálculo da divisão de polinômios de forma análoga à divisão numérica:

$$\begin{array}{l|l} p(x) & h(x) \\ \cline{2-2} r(x) & q(x) \end{array}$$

$$p(x) = h(x).q(x)+r(x)$$

$$\text{grau de } r(x) < \text{grau de } h(x) \text{ ou } r(x) = 0$$

Monômios e polinômios

Existe uma regra (teorema) que permite o cálculo da divisão de polinômios de forma análoga à divisão numérica. Exemplo:

$$\frac{4x^4+4x^2+1}{2x^2+1}=$$

$$\begin{array}{r|l}
4x^4+4x^2+1 & 2x^2+1 \\ \hline
-4x^4-2x^2 \quad & 2x^2+1 \\ \cline{1-1}
0 \quad +2x^2+1 & \\
-2x^2-1 & \\ \cline{1-1}
0 \quad &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
4x^4+4x^2+1 & 2x^2+1 \\ \hline
-4x^4-2x^2 \quad & \boxed{2x^2}+1 \\ \cline{1-1}
0 \quad \boxed{+2x^2+1} & \\
-2x^2-1 & \\ \cline{1-1}
0 \quad &
\end{array}$$

1ª. execução do algoritmo

$$\begin{array}{r|l}
4x^4+4x^2+1 & 2x^2+1 \\ \hline
-4x^4-2x^2 \quad & 2x^2\boxed{+1} \\ \cline{1-1}
0 \quad +2x^2+1 & \\
-2x^2-1 & \\ \cline{1-1}
\boxed{0} \quad &
\end{array}$$

2ª. execução do algoritmo