Mecânica Quântica - SFI 5707

Lista II

1. Considere a quantização canônica do campo eletromagnético.

   (a) Qual o problema que enfrentamos ao fazer a quantização canônica da teoria de Maxwell? Explique como a quantização canônica da Lagrangeana de Fermi evita tais problemas.

   (b) Como os estados físicos são selecionados no formalismo de Gupta-Bleuler? Expresse tal condição em termos de operadores de criação e destruição.

   (c) Mostre que os estados

   $$\mid n_1, n_2, N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \prod_{i=1}^{N} \left(a_0^\dagger\left(\vec{k}_i\right) - a_3^\dagger\left(\vec{k}_i\right)\right) \mid 0, n_1, n_2, 0\rangle$$

   onde n_1 e n_2 são os números de fótons de cada uma das polarizações transversais, satisfazem a condição de Gupta-Bleuler.

   (d) Calcule a norma do estado $\mid n_1, n_2, N\rangle$.

   (e) Mostre que os fótons temporais e longitudinais não contribuem para a energia do campo eletromagnético.

2. Seja $\mid \Psi_T\rangle$ um estado que contém apenas fótons transversais. Considere o estado

   $$\mid \Psi_T'\rangle = \left(1 + c\left[a_3^\dagger\left(\vec{k}\right) - a_0^\dagger\left(\vec{k}\right)\right]\right) \mid \Psi_T\rangle$$

   onde c é uma constante. Mostre que trocar $\mid \Psi_T\rangle$ por $\mid \Psi_T'\rangle$ corresponde a uma transformação de gauge, i.e.

   $$\langle\Psi_T' \mid A^\mu(x) \mid \Psi_T'\rangle = \langle\Psi_T \mid A^\mu(x) + \partial^\mu\Lambda(x) \mid \Psi_T\rangle$$

   onde

   $$\Lambda(x) = \sqrt{\frac{2\hbar c^2}{V\omega_{\vec{k}}^3}}\,\mathrm{Re}\left(i\,c\,e^{-i\,k\cdot x}\right)$$

3. Mostre que a densidade de Lagrangiana obtida a partir da Lagrangiana de Maxwell, i.e.

   $$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

   pela adição do termo $-\frac{1}{2}\left[\partial_\mu A^\mu\right]\left[\partial_\nu A^\nu\right]$, i.e.

   $$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\left[\partial_\mu A^\mu\right]\left[\partial_\nu A^\nu\right]$$

   é equivalente à Lagrangiana de Fermi:

   $$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\left[\partial_\mu A_\nu\right]\left[\partial^\mu A^\nu\right]$$

4. Na representação de Schroedinger os estados evoluem no tempo pela equação de Schroedinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} \mid A\,,\,t\rangle_S = H \mid A\,,\,t\rangle_S$$

onde H é a Hamiltonian total do sistema. Os operadores das observáveis O_S não evoluem no tempo na representação de Schroedinger. Na representação de interação dividimos a Hamiltoniana em duas partes $H = H_0 + H_I$ e introduzimos o operador

$$U_0\,(t - t_0) = e^{-i\,H_0(t-t_0)/\hbar}$$

Os estados e operadores na representação de interação são definidos como

$$\mid A\,,\,t\rangle_I = U_0^\dagger \mid A\,,\,t\rangle_S \qquad\qquad O_I\,(t) = U_0^\dagger\,O_S\,U_0$$

Determine as equações de evolução temporal dos estados e operadores na representação de interação.