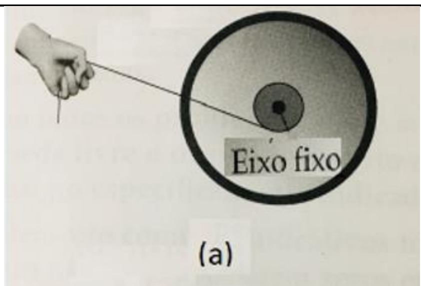
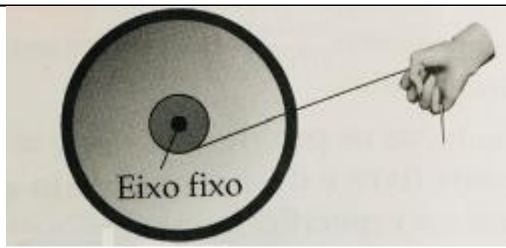
Questionário 3 – Questão 3

Respostas esperadas para o item (a):

Foram colocadas duas situações no item (a). Ambas são análogas, mudando apenas o sentido em que a tração do fio atua no disco. Assim, será feita abaixo uma explanação da resolução da situação 1. No entanto, tudo que for falado é análogo para a situação 2.

<table>
<tr>
<td>

Situação 1</td>
<td>

Situação 2</td>
</tr>
</table>

Para a resolução dessa questão, inicialmente é preciso desenhar o Diagrama do Corpo Livre para o disco que pode girar em torno do eixo fixo e estabelecer um sistema de eixos coordenados. Sem a escolha do sistema de eixos coordenados, é impossível, por exemplo, falar o seguinte: ``se o torque deu positivo, ele age no sentido de fazer o corpo girar em sentido anti-horário´´. O sistema de eixos coordenados é que vai me autorizar a dizer tal frase. Poderíamos ter um torque que faz o disco girar em sentido horário e ser positivo em um outro sistema de eixos coordenados.

Sendo assim, a correção da questão leva em consideração se o aluno se atentou ao Diagrama do Corpo Livre e o Sistema de Coordenadas adotado. Muitos mandaram a resposta em texto discorrendo a situação (o que era uma possibilidade), mas espera-se que o aluno cite, nesse texto, para onde ele orientou os sentidos positivos e negativos das forças e dos torques.

Logo após, a solução passa pela aplicação da Lei Fundamental da Dinâmica (2ª Lei de Newton) tanto para a translação do centro de massa quanto para a rotação em torno de algum eixo perpendicular ao disco. Uma possível solução é mostrada abaixo:

Aplicando a Lei Fundamental da Dinâmica para a Translação do centro de massa do disco:

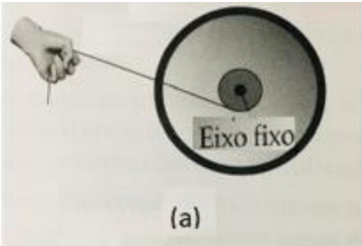
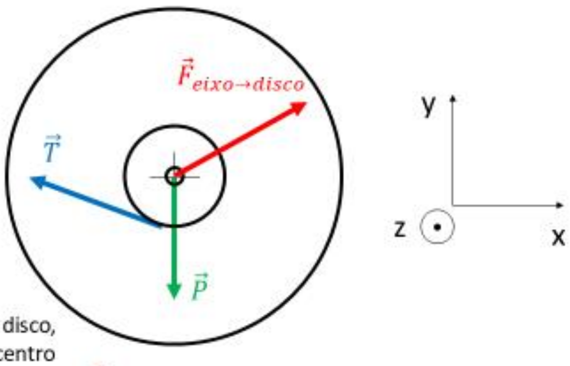


Diagrama do Corpo Livre (Situação A)

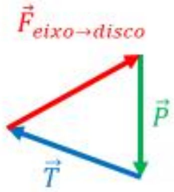


2ª Lei de Newton para a Translação:

$$\sum \vec{F} = m * \vec{a}_{CM}$$

Como há um eixo fixo que passa pelo CM do disco, ele impede que haja aceleração linear do centro massa tanto em x como em y. Assim, temos:

$$\vec{F}_{eixo \to disco} + \vec{T} + \vec{P} = \vec{0}$$



Note o seguinte: como o eixo só permite rotação em torno do eixo dele mesmo, o disco está impossibilitado de transladar no plano x-y adotado. Logo, obrigatoriamente, a aceleração do centro de massa é ZERO. Ou seja, a somatória das forças envolvidas é obrigatoriamente ZERO. Na correção, esperava-se que o aluno fizesse essa argumentação, que é fundamental na explicação da situação.

Foi observado que muitos alunos consideraram a força peso e a tração no fio, mas esqueceram que o eixo segura o disco naquela posição, logo há uma força que o eixo faz no disco para a somatória das forças ser ZERO.

Na segunda parte ainda do item (a), esperava-se que o aluno chegasse a conclusão de que havia um torque devido a tração no fio e seu posicionamento no disco. Além disso, o aluno deveria chegar no sentido correto do torque (negativo ou positivo) de acordo com o sistema de referência que ele adotou e dizer que há uma aceleração angular no eixo adotado perpendicularmente ao disco e que essa aceleração possui o mesmo sentido do torque, pois obedece a Lei Fundamental da Dinâmica. Uma possível solução é exemplificada abaixo:

<u>Aplicando a Lei Fundamental da Dinâmica para a Rotação do disco:</u>

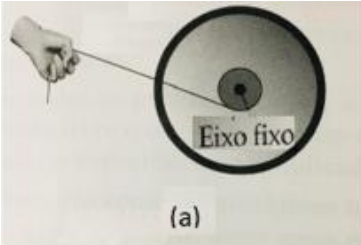
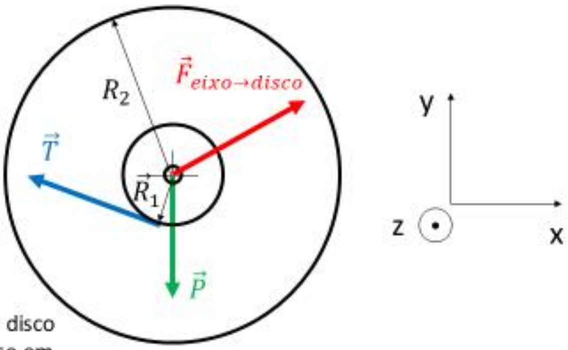


Diagrama do Corpo Livre (Situação A)



2ª Lei de Newton para a Rotação:

$$\sum \vec{\tau}_{CM} = I_{CM} * \vec{\alpha}$$

Como o eixo fixo não impede a rotação do disco em torno de si mesmo e este eixo encontra-se em z, podemos escrever, em relação ao CM, o seguinte:

$$\sum \tau_{z,CM} = I_{z,CM} * \alpha_z$$

$$-R_1.T = I_{z,CM} * \alpha_z$$

$$\boxed{\alpha_z = \frac{-R_1.T}{I_{z,CM}}}$$

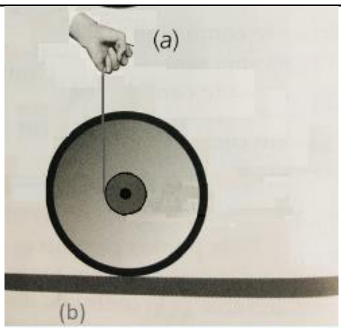
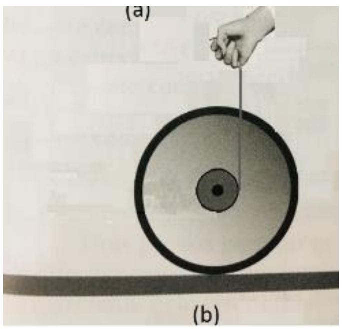
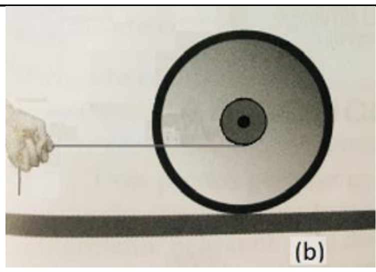
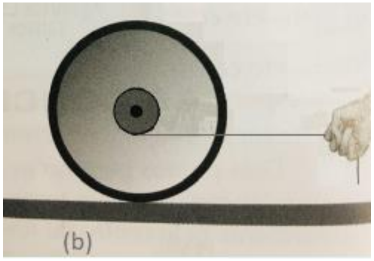
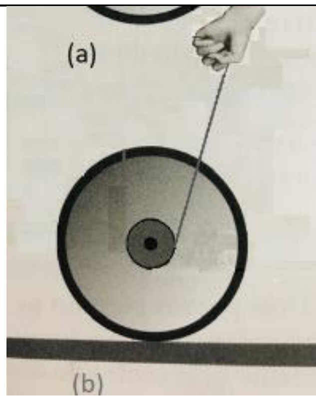
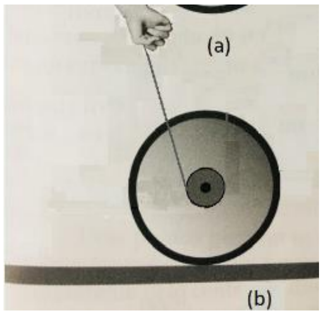
Ou seja, o disco é acelerado angularmente no sentido contrário ao eixo z adotado.

Dessa forma, espera-se do aluno:

- Fundamentar que a solução do problema sai pela aplicação da 2ª Lei de Newton para a rotação:
- Encontrar a somatória dos torques e a aceleração angular do disco, indicando o sinal negativo ou positivo dentro do sistema de coordenadas adotado:

Solução do Item (b):

No item (b) havia 6 situações possíveis, sendo que 2 a 2 só mudava o sentido de aplicação da tração no fio, como mostra a tabela abaixo:

  Situação 1	  Situação 2	  Situação 3

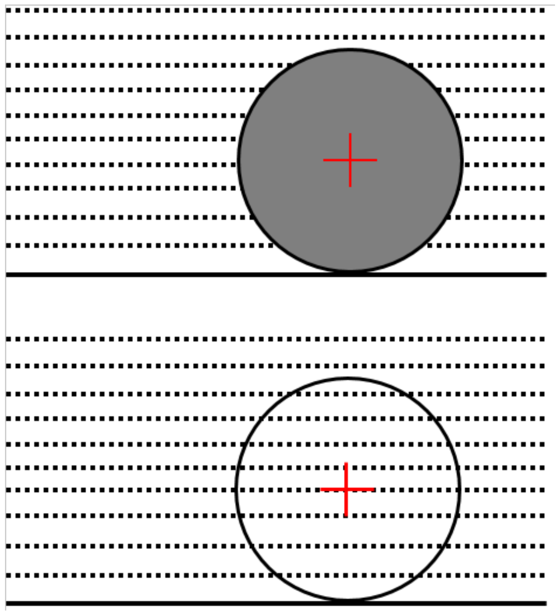
Sendo assim, para cada um dos pares, vamos analisar apenas um deles, pois o outro é análogo.

Há maneiras mais fáceis e outras bem mais difíceis de se analisar o sentido de aceleração linear do CM e da aceleração angular do corpo. Foi visto, que alguns alunos optaram pela situação mais complicada de se analisar. Assim, para cada uma das situações, serão apresentadas algumas maneiras de se analisar o problema.

Antes, porém, vamos fazer algumas considerações de referencial inercial para os eixos que estamos analisando o problema (CM e EIR ou outro qualquer).

Quando aplicamos a 2ª Lei de Newton, ela é válida para referenciais inerciais, ou seja, referenciais não acelerados. Quando falamos, por exemplo, que a somatória dos torques em torno do CM é igual ao produto da inércia em relação àquele eixo pela aceleração angular, não podemos considerar o CM do corpo se ele estiver acelerado. Logo, por que utilizamos o CM como sistema de referencial inercial?

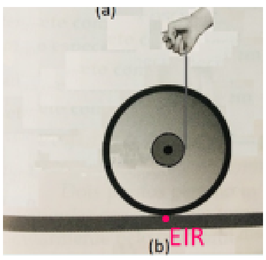
Na verdade, não estamos escolhendo o CM como referencial inercial, mas sim um eixo do laboratório que contém o CM naquele instante de análise. Imaginemos uma parede do laboratório que se situa atrás do disco. Nela, estão contidos infinitos eixos perpendiculares a ela, que está representado na Figura abaixo:

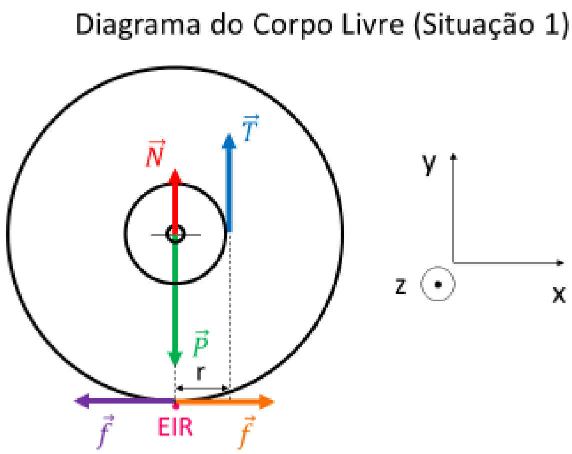


É possível reparar que sempre há um eixo perpendicular à parede que ``fura´´ o disco em seu CM. Assim, quando analisamos os torques em relação ao CM, o que estamos fazendo é analisar os torques em relação ao eixo que passa pelo CM, mas que está no referencial inercial do laboratório. O mesmo pode ser dito para o EIR. Nas situações que estamos analisando, não há escorregamento, logo o EIR é um ponto do plano x-y que está no solo e que está em contato com o disco naquele instante.

<u>Situação 1:</u>

Vamos analisar a Situação 1 inicialmente pelo EIR, que é o eixo pertencente ao solo em contato com o disco.





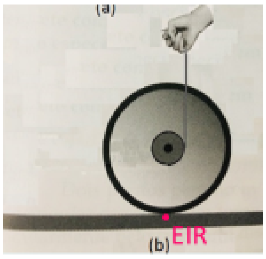
Inicialmente, não sabemos o sentido da força de atrito $\vec{f}$. Assim, vamos analisar os torques em relação ao EIR, pois $\vec{f}$ não faz torque em relação a esse ponto:

$$\sum \tau_{z,EIR} = I_{z,EIR} * \alpha_z$$

$$+r.T = I_{z,EIR} * \alpha_z$$

$$\boxed{\alpha_z = +\frac{r.T}{I_{z,EIR}}}$$

Portanto, o disco tem aceleração angular no sentido anti-horário (+z). Além disso, como não há escorregamento e o disco gira no sentido anti-horário, o CM é acelerado para esquerda (-x). Sendo assim, o sentido de $\vec{f}$ é para esquerda (-x), pois é a única força atuando em x.



Sabendo que o disco gira para no sentido anti-horário e que não há escorregamento, portanto o CM acelera para a esquerda, então $\vec{f}$ é para a esquerda, podemos escrever a 2ª Lei de Newton para a Translação:

$$\sum \vec{F} = m * \vec{a}_{CM}$$

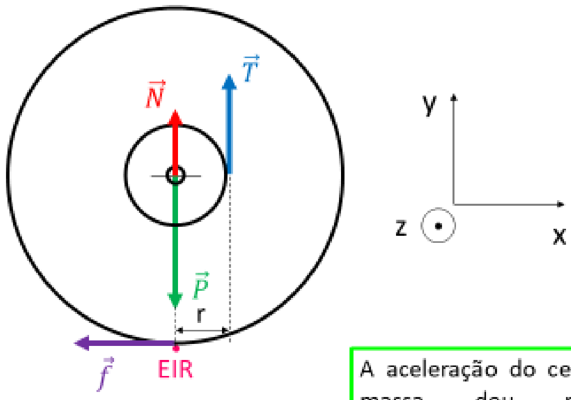
Em y:

$T + N - P = 0$, sendo T < P

Em x:

$-f = m * a_{cm,x}$

Diagrama do Corpo Livre (Situação 1)



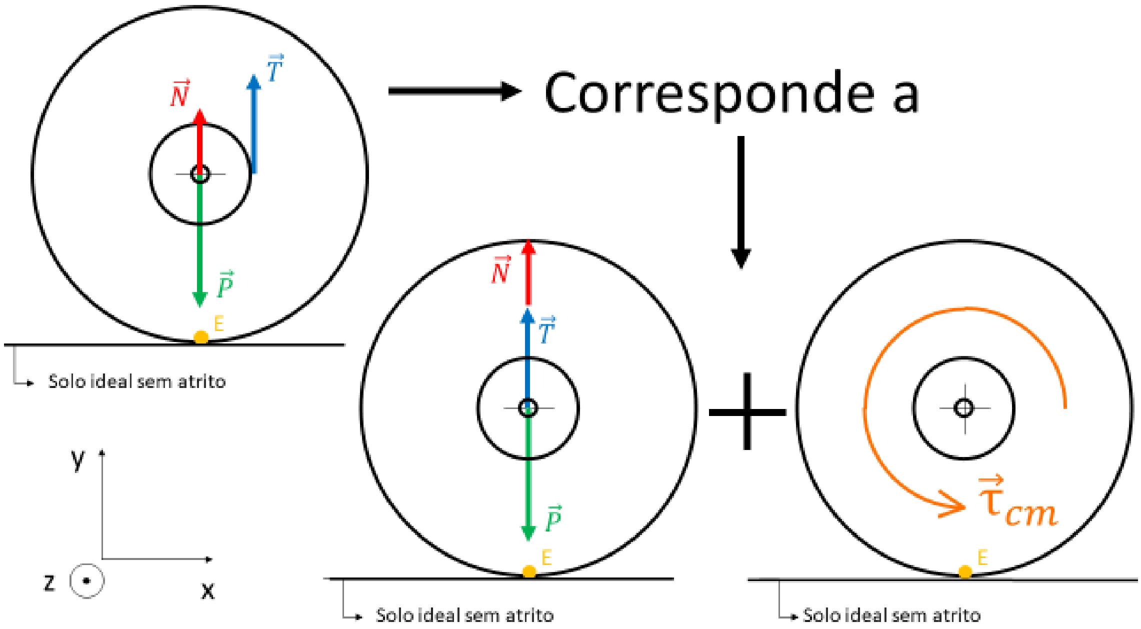
$$\boxed{a_{cm,x} = -\frac{f}{m}}$$

A aceleração do centro de massa deu negativa considerando $\vec{f}$ para a esquerda, o que está de acordo com a análise anterior.

Era esperado que o aluno chegasse a essas conclusões, argumentando com análises sólidas. Explicando porque a força de atrito estava para a esquerda neste caso e para onde o centro de massa é acelerado. Houve muitos alunos que simplesmente colocaram a força de atrito para um determinado sentido e não explicaram o porquê. Como já foi dito, inicialmente, não é possível saber. Muitas vezes temos uma intuição, no entanto a intuição não pode ser levada como argumento formal.

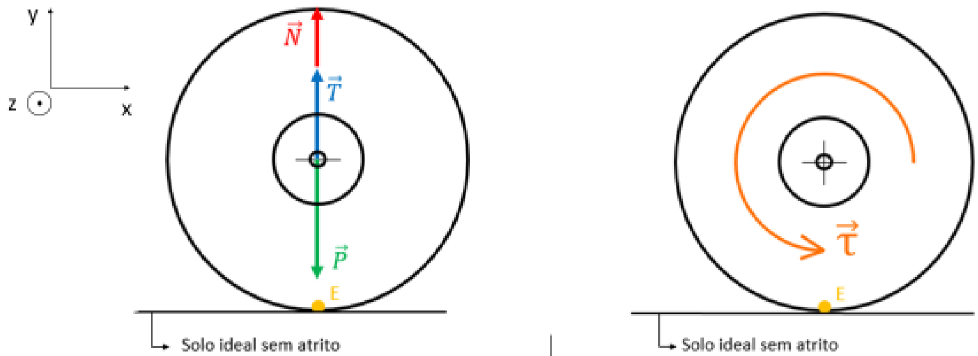
Agora, vamos analisar o mesmo problema pelo Centro de Massa (CM), que foi o que alguns alunos tentaram fazer. Neste caso, como veremos, é possível a análise, porém ela é um pouco difícil de se fazer.

Para efeito de análise, vamos imaginar o que acontece com o ponto do disco que encosta no solo (Ponto E) em uma **superfície ideal completamente sem atrito**:



A figura acima, mostra a independência dos movimentos de translação do CM e de rotação em torno do CM. Na figura, **foi desenhado o torque como um arco de circunferência com uma orientação apenas como caráter didático. Essa representação não é formal, dado que não existe vetores curvos.** Este torque é um vetor positivo paralelo ao eixo z adotado, ou seja, de acordo com o sistema de coordenadas adotado, seria um vetor perpendicular ao plano, saindo dele.

Vamos então agora analisar o que aconteceria com o ponto E nessa superfície sem atrito, separando a translação da rotação:

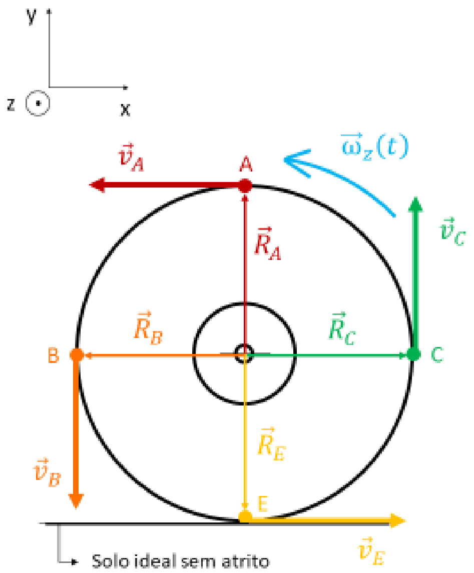


- Se T < P, então $N + T - P = 0$ e o ponto E não se desloca em y.
- Se T > P, então $N = 0$ e $T - P = m * a_{cm,y}$
- Como neste caso só há translação, $a_{E,y} = a_{cm,y}$, logo o ponto E é acelerado para cima e não se movimenta em x.

- Como há somente torque no sentido +z, temos: $+\tau_{cm,z} = I_{cm} * \alpha_z$. Então, $\boldsymbol{\alpha_z} = +\frac{\tau_{cm,z}}{I_{cm}}$
- A aceleração tangencial de E é dada por: $\vec{\boldsymbol{a}}_{t,E} = \vec{\alpha}_z \times (E - CM) = \alpha_z \vec{k} \times R_E(-\vec{j}) = +\boldsymbol{\alpha_z R_E \vec{\imath}}$
- **Portanto, o ponto E escorrega para a direita (+x)**

Como visto acima, dada uma tração no fio menor que o peso, o ponto E mantém o contato com o solo nesse instante e acaba escorregando para a direita (+x).

Após um certo tempo t de aplicação da tração $\vec{T}$, temos uma velocidade $\vec{v}_E = \vec{\omega}(t) \times \vec{R}_E$. Além disso, neste caso em que não há atrito na superfície, o disco não sai do lugar e tem uma velocidade angular positiva (+z) cada vez maior, ou seja, ele fica ``patinando´´ cada vez mais rápido sem sair do lugar. Analisando mais 3 pontos: A, B e C, podemos verificar, através da figura abaixo que $\vec{v}_A = \vec{\omega}(t) \times \vec{R}_A$, $\vec{v}_B = \vec{\omega}(t) \times \vec{R}_B$ e $\vec{v}_C = \vec{\omega}(t) \times \vec{R}_C$:



$$\vec{R}_A = (A - CM) = R_A.(+\vec{j})$$
$$\vec{R}_B = (B - CM) = R_B.(-\vec{i})$$
$$\vec{R}_C = (C - CM) = R_C.(+\vec{i})$$
$$\vec{R}_E = (E - CM) = R_E.(-\vec{j})$$

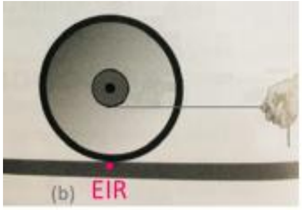
$$\vec{v}_A = \vec{\omega}_z(t) \times \vec{R}_A = \omega_z(t).(+\vec{k}) \times R_A.(+\vec{j})$$
$$\vec{v}_A = -\omega_z(t).R_A.\vec{i}$$
$$\vec{v}_B = \vec{\omega}_z(t) \times \vec{R}_B = \omega_z(t).(+\vec{k}) \times R_B.(-\vec{i})$$
$$\vec{v}_B = -\omega_z(t).R_B.\vec{j}$$
$$\vec{v}_C = \vec{\omega}_z(t) \times \vec{R}_C = \omega_z(t).(+\vec{k}) \times R_C.(+\vec{i})$$
$$\vec{v}_C = +\omega_z(t).R_C.\vec{j}$$
$$\vec{v}_E = \vec{\omega}_z(t) \times \vec{R}_E = \omega_z(t).(+\vec{k}) \times R_E.(-\vec{j})$$
$$\vec{v}_E = +\omega_z(t).R_E.\vec{i}$$

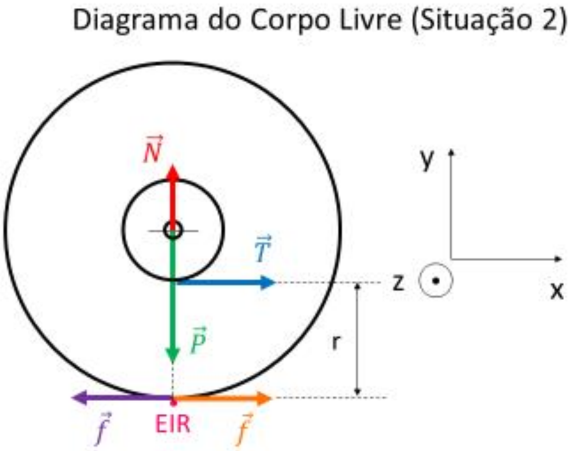
Sendo assim, em uma situação ideal de uma superfície sem atrito, o ponto E do disco que encosta no solo possui uma velocidade $\vec{v}_E$ para a direita. A conclusão que se chega, então, é que quando há atrito e o disco não escorrega, o ponto E tende a escorregar no sentido da velocidade $\vec{v}_E$ oriunda de uma situação sem atrito. Logo, o atrito é contrário ao sentido da tendência de escorregamento, ou seja, nesse caso, o atrito é para a esquerda. Depois, como só há a força de atrito no eixo x, então o centro de massa é acelerado no sentido dessa força de atrito, ou seja, para a esquerda.

Portanto, é possível achar o sentido de translação do centro de massa, o sentido de rotação e também o sentido da força de atrito. No entanto é bem mais difícil fazer o raciocínio pelo centro de massa, nesse caso. É muito mais fácil fazer a análise pelo EIR.

Situação 2:

Vamos analisar a Situação 2 inicialmente pelo EIR, que é o eixo pertencente ao solo em contato com o disco.





Inicialmente, não sabemos o sentido da força de atrito $\vec{f}$. Assim, vamos analisar os torques em relação ao EIR, pois $\vec{f}$ não faz torque em relação a esse ponto:

$$\sum \tau_{z,EIR} = I_{z,EIR} * \alpha_z$$

$$-r.T = I_{z,EIR} * \alpha_z$$

$$\boxed{\alpha_z = -\frac{r.T}{I_{z,EIR}}}$$

Portanto, o disco tem aceleração angular no sentido horário (-z). Além disso, como não há escorregamento e o disco gira no sentido horário, o CM é acelerado para direita (+x).

Diferentemente da Situação 1, agora temos 2 forças em x: tração e força de atrito, de forma que o centro de massa sofre aceleração para a direita como vimos acima. Ou seja: $\vec{T} + \vec{f} = m * (+a_{cm}) * \vec{\imath}$. Como sabemos que a aceleração é para a direita, pois a aceleração angular é no sentido (-z) e não há escorregamento, então a somatória $\vec{T} + \vec{f}$ obrigatoriamente tem que possuir sentido para a direita (+x). Isso abre duas hipóteses:

- Hipótese 1: $\vec{T} = T * \vec{\imath}$ e $\vec{f} = f * \vec{\imath}$, ambos positivos;
- Hipótese 2: $\vec{T} = T * \vec{\imath}$ e $\vec{f} = -f * \vec{\imath}$, sendo $T > f$.

Portanto, há duas soluções possíveis e cada uma com a força de atrito para um dos lados. Na hipótese 1, para a direita no sentido da aceleração do centro de massa e na hipótese 2 para a esquerda, no sentido contrário à aceleração do centro de massa.

Já sabemos o sentido da aceleração angular. Isso foi conseguido apenas com a análise da somatória dos torques em torno do EIR. No entanto, mesmo a análise pelo EIR ainda não possibilitou encontrarmos o sentido da força de atrito. Vamos tentar fazer a análise pelo CM e ver o que encontramos.

A análise da somatória dos torques em torno do CM possui duas alternativas possíveis: considerando a força de atrito para a direita ou para a esquerda. Vamos analisar cada uma delas separadamente:

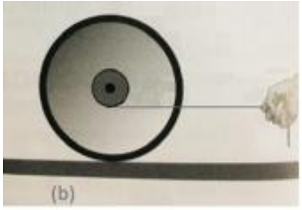
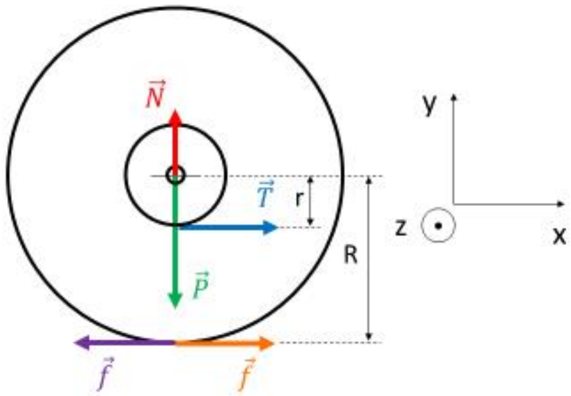


Diagrama do Corpo Livre (Situação 2)



Como ainda não sabemos o sentido de $\vec{f}$, vamos adotar em 1ª análise $\vec{f}$ para a direita ($\vec{f}$). Mas já sabemos pela análise do EIR que o disco gira em sentido horário (-z). Assim, temos:

$$\sum \tau_{z,CM} = I_{z,CM} * \alpha_z$$

$$+r.T + R.f = I_{z,CM} * \alpha_z$$

$$\boxed{\alpha_z = +\frac{r.T}{I_{z,CM}}}$$

Como α_z deu positivo assumindo $\vec{f}$ para direita, e como sabemos que α_z deveria ser negativa pela análise do EIR, então a $\vec{f}$ não pode ser para direita.

Como a força de atrito não pode estar para a direita, como vimos acima, pois isso daria uma aceleração angular positiva, contrariando o que já encontramos para a aceleração angular no caso do EIR, que afirmava que ela é era negativa, então a força de atrito deve ser para a esquerda, por exclusão. Para efeito de confirmação, vamos ilustrar essa situação na figura abaixo:

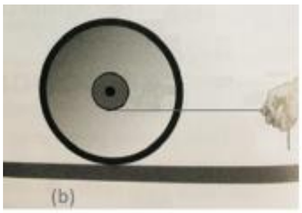
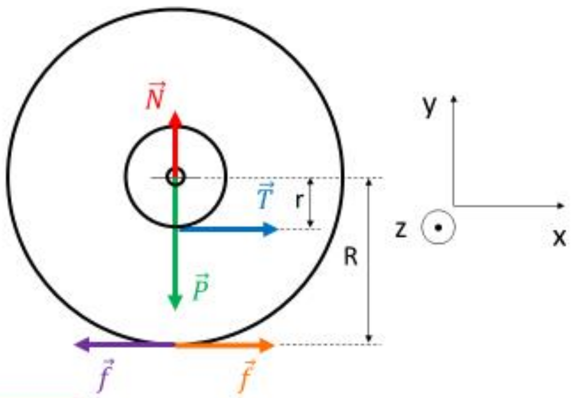


Diagrama do Corpo Livre (Situação 2)



Considerando $\vec{f}$ para a esquerda ($\vec{f}$), temos:

$$\sum \tau_{z,CM} = I_{z,CM} * \alpha_z$$

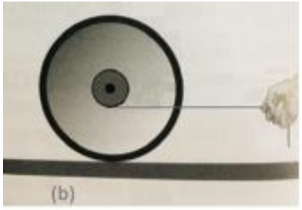
$$+r.T - R.f = I_{z,CM} * \alpha_z$$

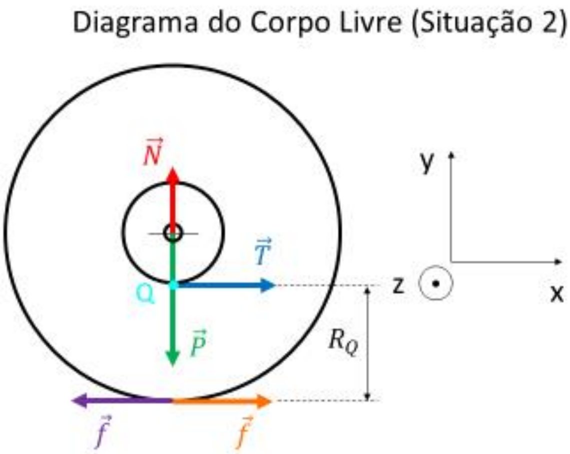
- Se $r.T > R.f$, então: $\alpha_z = +\frac{r.T}{I_{z,CM}}$
- Se $r.T < R.f$, então: $\alpha_z = -\frac{r.T}{I_{z,CM}}$

Como não temos os valores dos raios, nem da tração e nem da força de atrito, não podemos confirmar que $\vec{f}$ é para esquerda por aqui.

Já sabemos, por exclusão, que a força de atrito não pode ser para a direita, logo ela é para a esquerda. No entanto, a confirmação disso fica nebulosa quando analisamos o problema pelo CM, pois abre dois caminhos para a aceleração angular, a depender dos raios envolvidos e dos valores das forças. **Porém, como já sabemos que a aceleração angular é negativa, com certeza $\boldsymbol{r.T < R.f}$.** Mas só concluímos isso. Não concluímos diretamente que a força de atrito é para esquerda, embora já sabemos que o é, por exclusão.

Há, no entanto, ainda uma outra forma de se confirmar que a força de atrito é para a esquerda. Sabemos que a somatória dos torques pode ser dada em torno de qualquer eixo sem alteração no resultado final, ainda que analisemos por um eixo preso ao laboratório que nem passa pelo disco. Vamos então pegar um eixo preso ao laboratório que passa por um ponto Q. Esse ponto se situa bem onde é aplicada no disco a tração $\vec{T}$. Agora, façamos a somatória dos torques em torno desse eixo:





Considerando $\vec{f}$ para a esquerda ($\vec{f}$), temos:

$$\sum \tau_{z,Q} = I_{z,Q} * \alpha_z$$

$$-R_Q.f = I_{z,Q} * \alpha_z$$

$$\boxed{\alpha_z = -\frac{R_Q.f}{I_{z,Q}}}$$

Como α_z deu negativa (o que era esperado pela análise do EIR), considerando $\vec{f}$ para a esquerda, então confirma que $\vec{f}$ realmente é para a esquerda.

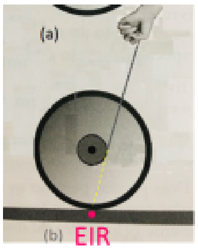
Enfim, conseguimos fazer uma análise completa da Situação 2. Descobrimos, sem qualquer valor numérico, os sentidos tanto da aceleração angular (que indica para onde o disco começa a girar) como da força de atrito.

Note que, não é trivial a análise desse problema. Na situação 1, a resolução saia diretamente pelo EIR. Fizemos também uma alternativa de resolução para a Situação 1 pelo CM, que era um pouco mais complicada, mas também se chegava ao resultado. No entanto, na situação 2, a análise pelo EIR nos possibilita encontrar o sentido da aceleração angular, mas não nos permite encontrar o sentido da força de atrito. Mesmo usando a 2ª Lei de Newton para a translação do CM não é possível encontrar o sentido, como fizemos na Situação 1. Assim, a análise da Situação 2 requer mais trabalho, pois exige que o estudante ataque o problema pelo EIR, para encontrar o sentido da aceleração angular e depois ataque o problema pelo ponto Q ou pelo CM para achar o sentido da força de atrito, sendo a análise pelo CM, nesse caso, ainda mais difícil do que pelo ponto Q.

O que era esperado dos alunos era a obtenção do sentido dessas duas grandezas, argumentando de forma consistente como se chegou a tal resultado.

<u>Situação 3:</u>

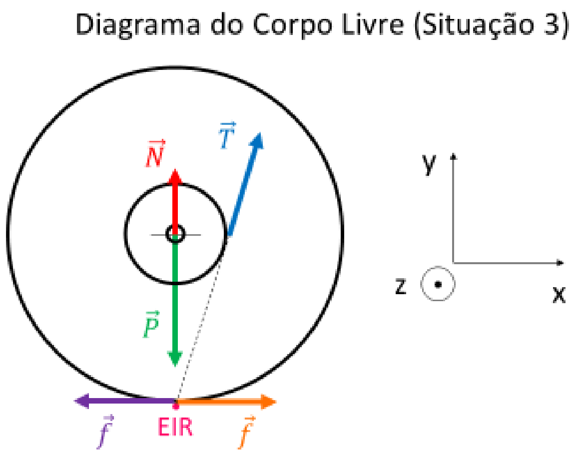
A situação 3 possui um caminho de solução fácil pelo EIR e um bem mais complicado, que é uma mistura das 2 situações anteriores. Se decompormos o vetor da tração em componentes x e y, vamos cair em uma situação que é uma mistura das situações anteriores. Sendo assim, vamos mostrar a solução apenas através do EIR, pois a solução decompondo o vetor da Tração é análoga às anteriores.



Desenhando a linha de ação da força $\vec{T}$ e prolongando-a para baixo, percebe-se que ela passa pelo EIR. O mesmo pode ser feito para o $\vec{P}$ e $\vec{N}$. Assim, a somatória dos torques em relação ao EIR é ZERO. Consequentemente $\alpha_Z = 0$.

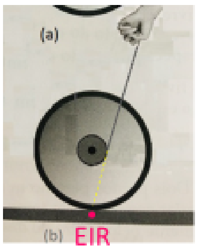
$$\sum \tau_{z,EIR} = I_{z,EIR} * \alpha_z = 0$$

$$\boxed{\alpha_Z = 0}$$

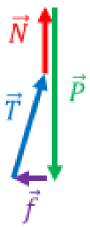


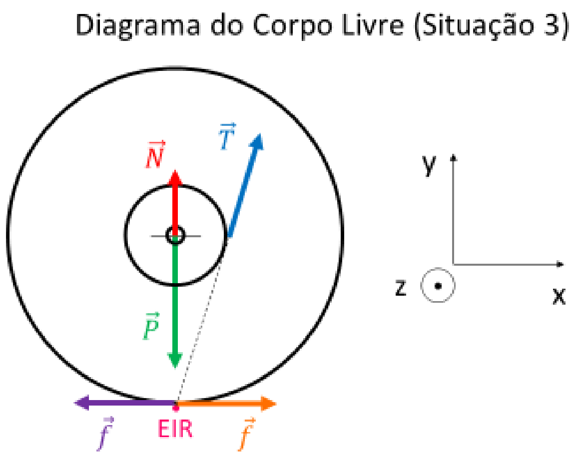
Descobrimos, pela análise através do EIR, que $\alpha_Z = 0$, no entanto, para onde está a força de atrito nessa situação?

O disco, como vimos acima, não possui aceleração angular. Como estamos considerando também que não há escorregamento, dizer que ele não possui aceleração linear, implica que também não possui aceleração linear do centro de massa. Dessa forma, a primeira conclusão que chegamos é que o disco permanece em repouso, porém há uma tendência de escorregamento, pois ele permanece parado e a tração possui uma componente (+x). Para encontrarmos o sentido da força de atrito, então, basta aplicar a 2ª Lei de Newton para a translação do CM:



Como o disco permanece parado, a somatória das forças é igual a ZERO. Assim, temos:





Como $\vec{T}$ possui uma componente x para direita e $\vec{N}$ e $\vec{P}$ estão apenas em y, então, para a soma das forças ser ZERO, $\vec{f}$ só pode estar para a direita.

A resolução pelo EIR é bem rápida nesse caso. Também pode ser observado que se a tração for muito grande, de modo que sua componente vertical seja maior que o peso, o disco começa a acelerar para cima, para a direita e a rotacionar em torno do CM no sentido +Z. Neste caso, o disco não toca mais o solo, logo não há mais força de atrito nem força normal. Portanto, a condição para a solução encontrada acima é a de que $T_y < P$.