10

**4° Trabalho em Grupo – Comportamento dinâmico de sistemas de 1ª. ordem**

| Grupo: 9 |
|---|

| Nomes: | Aline Regina Suzigan | 11799086 |
|---|---|---|
| | Ana Carolina Rodrigues Lopes | 11320105 |
| | Beatriz da Cruz Biral | 11819341 |
| | Julia Garavazo Ferreira | 11340212 |
| | Leonardo Augusto Velloso | 11214357 |
| | Vanessa Shin Huey Hu | 11370557 |

1) A concentração de soda cáustica de uma linha de processo pode ser conhecida através de uma célula de condutividade. Para determinar as características da resposta dinâmica do processo, uma mudança em degrau de 3 lb/ft³ na concentração de soda é realizada no tempo inicial (t=0). A concentração medida $c_m$ (t) é mostrada na Figura 1. Determine a FT entre $c_m$ e c.

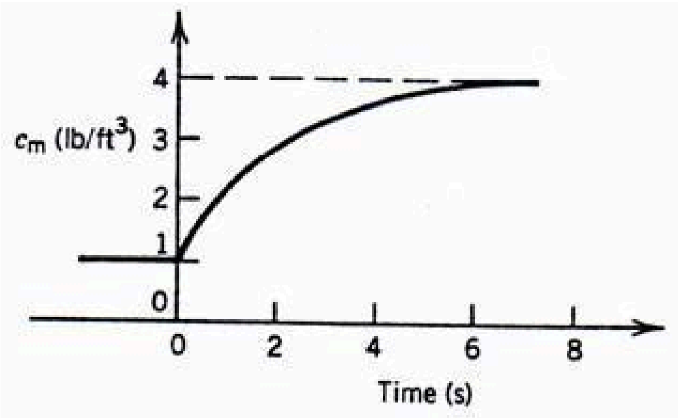


**Figura 1:** Resposta dinâmica para $c_m$

- Analisando o gráfico a concentração se estabilizou aproximadamente no tempo igual a 6s

$$\tau p_1 = \frac{t\,(s)}{5} = \frac{6}{5} = 1,2\ s$$

$$Kp_1 = \frac{\Delta y(t)}{\Delta C(t)} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\overline{Cm}(s) = \frac{Kp_1}{\tau p_1 \cdot S + 1} = \frac{1}{1,2 \cdot S + 1} \cdot \bar{C}(s)$$

2) Dois sistemas de estocagem de líquidos são mostrados na Figura 2. Cada tanque apresenta diâmetro de 4 ft. Para o sistema I, a válvula atua como uma resistência linear sendo q(t) =8,33h(t), em que q está em gal/min e h em ft. Para o sistema II, as variações na altura do liquido não afetam a vazão de saída q. Suponha que cada sistema está inicialmente no estado estacionário com h=6 ft e $q_i$ = 50 gal/min. No tempo t=0 qi muda repentinamente para 70 gal/min. Para cada sistema determine o que se pede:

a. A FT entre h e $q_i$;
b. A resposta transiente h(t);
c. Os novos níveis dos tanques (novos estados estacionários);
d. Se cada tanque apresenta altura de 8 ft, qual transbordará primeiro? Quando?

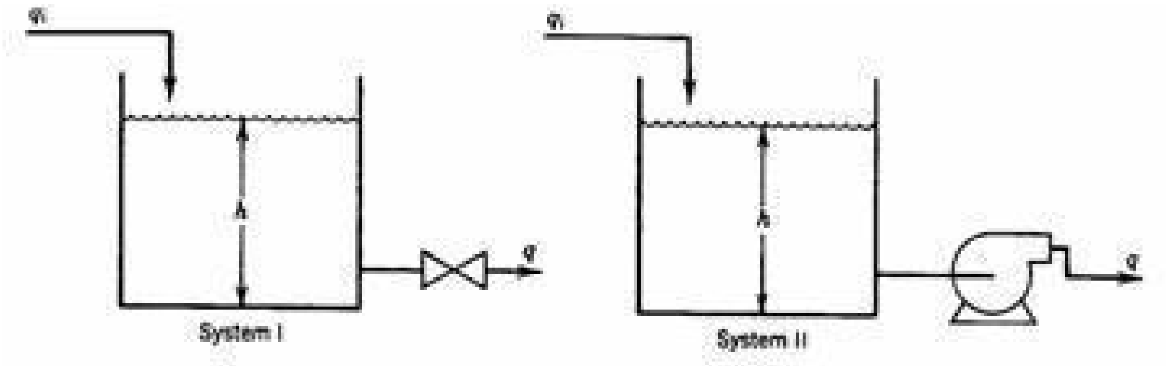


**Figura 2:** Sistema de estocagem de líquidos

**Balanço de massa para o sistema 1:**

Hipóteses:

- Densidade constante
- Área de seção transversal (área) constante
- Como a saída q é determinada por uma válvula

$q(t) \ = \ \beta' h(t)$

Entra - sai + produzido - consumido = acumula

$qi(t)\,.\,\rho i \ - \ q(t)\,.\,p \ = \frac{dM}{dt} = \frac{d(\rho V)}{dt} = \frac{d(pAh(t))}{dt} = A\rho \frac{dh(t)}{dt}$

- Considerando as hipóteses, tem-se:

$qi(t) \ - \ \beta' h(t) \ = \ A\frac{dh(t)}{dt}$ (1)

- Como não se tem multiplicação de variáveis, entende-se que a equação é de 1ª ordem, não sendo necessária a linearização da mesma.

$qi_{ss} \ - \ \beta' h_{ss} \ = \ 0$ (2)

- Subtraindo (2) em (1) para obter o formato de variável desvio:

$qi(t) \ - \ \beta' h_{ss} \ - \ \beta' h(t) \ + \ q_{ss} \ = \ A\frac{dh(t)}{dt}$ (3)

$qi'(t) \ - \ \beta' h'(t) \ = \ A\frac{dh'(t)}{dt}$ (4)

- Aplicando-se a Transformada de Laplace:

$\overline{qi}\,(s) \ - \ \beta'\overline{h}\,(s) \ = \ AS\overline{h}\,(s)$ (5)

- Rearranjando:

$\beta'\overline{h}\,(s) \ + \ AS\overline{h}\,(s) \ = \overline{qi}\,(s)$

- Considerando a relação fornecida, $\beta' \ = \ 8,33\ gal/min.ft$

$$q(t)\frac{gal}{min} * \left[\frac{ft^3}{7{,}48\ gal}\right] = 8,33 \cdot h(t)[ft]$$

$$\beta = \frac{8{,}33}{7{,}48}\left[\frac{ft^2}{min}\right] = 1,113$$

- Para calcular a área da seção transversal, temos que D = 4 ft

$$A = \pi\frac{D^2}{4} = \pi\frac{4^2}{4} = 4\pi\ ft^2$$

**Resposta da a) FT entre h e q:** $\overline{h}(s) = \frac{\overline{qi}(s)}{AS+\beta} = \frac{\frac{1}{\beta}}{\frac{A}{\beta}\cdot S+1}\cdot\overline{qi}(s)$

$$\overline{h}(s) = \frac{0.898}{11{,}29\cdot S+1}\cdot\overline{qi}(s)$$

**Resposta transiente**

- É necessário realizar a Transformada de Laplace inversa, sabe-se que $\overline{qi}(s) = \frac{amplitude}{S}$ e que nossa amplitude é de 20 gal/min (70-50) =2,67361 ft³/min

$$L^{-1}\{\overline{h}(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{1{,}113}}{\frac{4\pi}{1{,}113}\cdot S+1}\cdot\frac{2{,}67361}{S}\right\}$$

$$h'(t) = \frac{2{,}67361}{1{,}113}\cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{S\cdot\left(\frac{4\pi}{1{,}113}\cdot S+1\right)}\right\}$$

$$h'(t) = \frac{2{,}67361}{1{,}113}\cdot\left(1 - e^{-\frac{1{,}113}{4\pi}\cdot t}\right)$$

**Resposta da b) resposta transiente de h(t):** $h'(t) = 2,402\cdot\left(1 - e^{-0{,}0886\cdot t}\right)$

**Novos níveis do tanque**

- Utiliza-se o teorema do valor final no domínio de frequência

$$lim_{S\to 0}\ S\cdot\frac{\frac{1}{1{,}113}}{\frac{4\pi}{1{,}113}\cdot S+1}\cdot\frac{2{,}67361}{S} = 2,67361\cdot\frac{1}{1{,}113} = 2,40216\ ft$$

**Resposta da c) novos níveis do tanque:** $2,40216\ ft$

**Balanço de massa para o sistema 2:**

Hipóteses:

- Densidade constante;
- Área de seção transversal (área) constante;
- Volume constante.
- q(t) constante

Entra - sai + produzido - consumido = acumula

$$qi \, . \, \rho i \; - \; q \, . \, p \; = \frac{dM}{dt} = \frac{d(\rho V)}{dt} = \frac{d(\rho \, A \, h \, (t))}{dt}$$

- Considerando as hipóteses, tem-se:

$$qi(t) \; = \; A \frac{dh(t)}{dt} \quad (1) \qquad \text{EDO linear}$$

- Aplicando-se o estado estacionário na EDO:

$$qiss \; - \; qss \; = \; 0 \qquad\qquad (2)$$

- Subtraindo (2) de (1):

$$(qi(t) \; - \; qi(ss)) \; = \; A \frac{dh(t)}{dt} \qquad (3)$$

- Escrevendo-se (3) na forma de variável desvio:

$$q'i(t) \; = \; A \frac{dh'(t)}{dt} \qquad\qquad (4)$$

- Aplicando a transformada de Laplace em (4):

$$\overline{qi(s)} \; = \; A \, S \, \overline{h(s)} \quad (5)$$

- Rearranjando (5):

$$\overline{h(s)} \; = \; \frac{1}{A \, S} \, \overline{qi(s)} \quad (6)$$

**Resposta: A FT entre h e q:** $\overline{h(s)} \; = \; \frac{1}{4\pi \, S} \, \overline{qi(s)}$

- Continuando:

b. para descobrir o h(t):

- Aplicação de Laplace inversa em (6):

$$L^{-1}\{\overline{h}\,(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{A\,S} \; * \; \frac{2{,}67361}{S}\right\} = \frac{2{,}67361}{4\pi} * L^{-1}\left\{\frac{1}{S^2}\right\}$$

$$h'(t) \; = \frac{2{,}67361}{4\pi} \cdot \, t$$

**Resposta da b) resposta transiente de h(t):** $h'(t) \; = \; 0,213 \; \cdot \; t$

c. Considerando que a perturbação ocorre somente na vazão de entrada que com uma amplitude de 20 gal/min (70-50) = 2,67361 ft³/s, temos que a nova altura da coluna é igual a:

$$lim_{S \to 0} S \frac{1}{A\,S} \; * \frac{2{,}67361}{S} \; = \; \infty \, ft$$

d. Para o tanque 1

$h'(t) = 2,402 \cdot \left(1 - e^{-0,0886 \cdot t}\right)$

8 - 6 $= 2,402 \cdot \left(1 - e^{-0,0886 \cdot t}\right)$

$\frac{2}{2,402} - 1 = - e^{-0,0886 \cdot t}$

$- ln(0,167) = 0,0886 \cdot t$

$t = 20,18\, min$

Para o tanque 2:

$h'(t) = 0,213 \cdot t$

$8 - 6 = 0,213 \cdot t$

t = 9,4 min

**Resposta da d) O tanque 2 transbordará mais rápido.**