

PME 3481 – Controle e Aplicações

Ações de controle

Prof. Dr. Flávio Celso Trigo

1 Introdução

Diversos sistemas industriais utilizam-se atualmente de controladores automáticos para monitoramento e ajuste de seus processos. A função básica de qualquer controlador é fazer com que a operação do equipamento ou sistema ocorra estritamente dentro da faixa especificada em projeto, ou ainda impedir que os eventuais desvios previstos não ultrapassem os valores admissíveis.

Talvez os mais conhecidos atuadores industriais sejam os de ação proporcional, integral e derivativa, abreviadamente denominados *controladores PID*. O objetivo deste módulo é fornecer uma visão geral sobre as principais ações de controle e como utilizá-las para regular a operação de sistemas.

Antes de tratarmos das ações de controle e dos controladores PID, cabe-nos ressaltar que qualquer ação de controle baseia-se na avaliação do *erro* existente entre o sinal de referência e a saída do sistema. Desta forma, é necessário primeiro verificarmos como o *erro* se manifesta em diferentes tipos de sistemas. Inicialmente, estudam-se os erros em *estado estacionário ou em regime permanente* ($\implies t \rightarrow \infty$).

2 Erro em estado estacionário

2.1 Definição

Considere o sistema em malha aberta mostrado na figura abaixo:

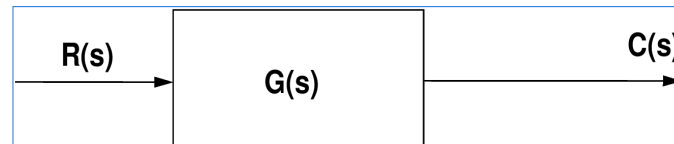


Figura 1: Representação de um sistema em malha aberta

O erro neste sistema é

$$E(s) = R(s) - C(s) \quad (2.1)$$

$$E(s) = R(s) - R(s)G(s) \quad (2.2)$$

$$E(s) = R(s)[1 - G(s)] \quad (2.3)$$

Um dos parâmetros mais importantes no projeto de sistemas de controle é o *erro em estado estacionário*, também denominado *erro em regime permanente*. O erro em estado estacionário é a discrepância existente entre o estado que se pretendia atingir e o estado efetivamente atingido por um sistema dinâmico quando o *tempo* tende ao infinito. Em outras palavras, dado um sinal (um comando de posicionamento, por exemplo), o sistema deve buscar atingir exatamente o estado comandado ou, na nomenclatura de controle, seguir a *referência*. Não por acaso, em nossos diagramas de blocos o sinal de entrada principal é representado por $R(s)$. Vejamos agora como determinar de forma prática o erro em estado estacionário.

O erro em estado estacionário, daqui em diante denominado e_{ss} , é calculado com base no Teorema do Valor Final (TVF),

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sR(s)[1 - G(s)] \quad (2.4)$$

Supondo, por exemplo, uma entrada em degrau unitário $r(t) = u(t)$ em $t = 0s$, temos $R(s) = \frac{1}{s}$ e

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} [1 - G(s)] = 1 - G(0) \quad (2.5)$$

O valor de $G(s)$ quando $s = 0$ é chamado *ganho estático* e, geralmente, é maior que 1. Como pode-se ver, um sistema de malha aberta sujeito a uma entrada em degrau irá apresentar erro em regime permanente que pode ser significativo, dependendo do valor de $G(0)$. No entanto, pode-se tentar ajustar $G(0) = 1$ de forma a fazer o ganho em regime estático nulo na equação acima. Este ajuste não garante que, durante a operação, $G(s)$ sofra modificações devido a perturbações, alterando assim o ajuste inicial de $G(0)$ e fazendo com que o erro persista. Uma das maneiras de diminuir tal efeito é utilizar a retroação negativa. Considere agora a figura abaixo, onde um sistema de controle com realimentação unitária é mostrado.

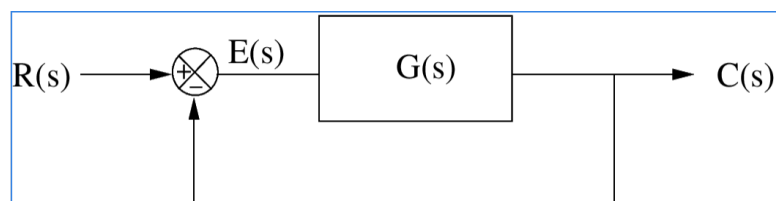


Figura 2: Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada com retroação unitária negativa

Como estamos interessados no erro, é conveniente determinarmos a função de transferência relacionando o erro $E(S)$ com a entrada $R(S)$. Da álgebra de diagrama de blocos podemos escrever obter o erro $E(s)$ como

$$E(s) = R(s) - C(s) \quad (2.6)$$

Desenvolvendo obtemos

$$E(s) = R(s) - E(s)G(s) \Rightarrow \quad (2.7)$$

$$E(s) [1 + G(s)] = R(s) \Rightarrow \quad (2.8)$$

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)} \quad (2.9)$$

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)} \quad (2.10)$$

Aplicando o TVF para obter o erro em estado estacionário,

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{R(s)}{1 + G(s)} \quad (2.11)$$

A eq. 2.11 pode ser utilizada de maneira genérica para determinar o erro em estado estacionário de um sistema com retroação unitária negativa. Os benefícios da utilização da retroação, sistema mais caro e complexo, ficam evidentes como mostra o exemplo a seguir.

1. Exemplo 1

Considere-se a função de transferência em malha aberta $G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$, que representa a dinâmica do controle em um sistema elétrico, térmico ou mecânico (controlador de nível de líquido em um tanque). Supondo-se $K > 1$, como é usual, o erro em estado estacionário do sistema em malha aberta, quando submetido a um *degrau unitário* na entrada é, de acordo com a eq. 2.4:

$$\lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \frac{1}{s} = 1 - G(0) = 1 - K \quad (2.12)$$

O mesmo erro, em malha fechada seria, pela eq. 2.11

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{(1/s)}{1 + \frac{K}{\tau s + 1}} = \frac{1}{1 + K} \quad (2.13)$$

Se o ganho K sofrer uma variação de 10%, por exemplo devido a alguma razão imprevista, o erro do sistema em malha aberta, com relação à referência, seria de 10%, ao passo que, no sistema em malha fechada com retroação unitária, seria 0,1%, justificando a introdução deste sistema de controle (com retroação), mais complexo e de maior custo.

Consideremos novamente o sistema da fig. 2. A função de transferência de malha fechada é dada por

$$\frac{C(s)}{R(s)} \triangleq \frac{G(s)}{1 + G(s)} \quad (2.14)$$

Demonstração:

$$C(s) = G(s)E(s)$$

$$E(s) = R(s) - C(s) \Rightarrow$$

$$C(s) = G(s)(R(s) - C(s))$$

$$C(s)(1 + G(s)) = G(s)R(s) \Rightarrow$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

Vamos estudar agora o efeito que uma *variação* na planta (função $G(s)$) irá provocar na saída $C(s)$ do sistema. Seja, pois

$$S(s) = \frac{\frac{\Delta C(s)}{C(s)}}{\frac{\Delta G(s)}{G(s)}} = \frac{\Delta C(s) G(s)}{\Delta G(s) C(s)} \quad (2.15)$$

$$\text{para } \Delta \rightarrow \delta \text{ (pequeno)} \quad (2.16)$$

$$\Rightarrow S(s) \approx \frac{\partial C(s) G(s)}{\partial G(s) C(s)} = \frac{1}{1 + G(s)} \quad (2.17)$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial G} &= \frac{\partial}{\partial G} \left\{ \frac{RG}{1+G} \right\} = \frac{\partial}{\partial G} \{RG(1+G)^{-1}\} \\ &= R(1+G)^{-1} - RG(1+G)^{-2} = \frac{R}{1+G} - \frac{RG}{(1+G)^2} \\ &= \frac{R(1+G) - RG}{(1+G)^2} \\ &\Rightarrow \frac{\partial C}{\partial G} \frac{G}{C} = \frac{R(1+G) - RG}{(1+G)^2} \frac{G}{\frac{RG}{1+G}} = \frac{R(1+G)G}{(1+G)^2 RG} \\ &\therefore \frac{\partial C}{\partial G} \frac{G}{C} = \frac{1}{1+G} \triangleq S, \text{ definida como } \textit{sensibilidade}. \end{aligned}$$

3 Tipos de Sistemas

A forma da função de transferência em malha aberta de um sistema com retroação (unitária ou não) determina as características do erro em estado estacionário. A FTMA de um sistema

pode ser escrita, de forma genérica, como

$$FTMA = K \frac{\prod_{i=1}^M (s + z_i)}{s^N \prod_{j=1}^L (s + p_j)}, \quad (3.1)$$

onde K representa uma constante qualquer. É importante observar que esta classificação não possui relação com a *ordem da planta* $G(s)$, que estudaremos mais tarde.

O *tipo* de um sistema é definido em função do número de integradores que sua FTMA possui. Na função de transferência, cada pólo em zero ($s=0$) corresponde a um integrador^[1]. Exemplos de sistemas tipos 0, 1 e 2 seriam, respectivamente,

$$FTMA = K \frac{(s - 1)(s - 3i)(s + 3i)}{s^0(s - 4)(s - 8i)(s + 8i)(s + 3)}$$

$$FTMA = K \frac{(s - 1)(s - 3i)(s + 3i)}{s^1(s - 4)(s - 8i)(s + 8i)(s + 3)}$$

$$FTMA = K \frac{(s - 1)(s - 3i)(s + 3i)}{s^2(s - 4)(s - 8i)(s + 8i)(s + 3)}$$

4 Entradas de teste para erro

A avaliação do comportamento de um sistema controlado em malha fechada, e de sistemas em geral, é baseada na resposta deste sistema à aplicação de alguns tipos de sinais-padrão de teste. Os mais comumente utilizados são o degrau, a rampa e a parábola.

4.1 Entrada em degrau

Estudaremos a resposta de sistemas dos tipos 0, 1 e 2 à entrada em forma de degrau de amplitude A , ou seja $f_u(t) = A.u(t)$. Aplicando-se a transformada de Laplace a este sinal obtém-se

$$\mathcal{L}[Au(t)] = \frac{A}{s} \quad (4.1)$$

^[1]O nome integrador deve-se ao fato de que a transformada de Laplace da integral de uma função é dada por

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^0 f(t) dt$$

ou seja, a cada integração um termo em s é obtido no polinômio do denominador da função transformada.

4.2 Entrada em rampa

A função rampa é a integral no tempo da função degrau, explicitamente,

$$f_R(t) = \int_0^t f_u(t)dt = \int_0^t A.u(t)dt = At \quad (4.2)$$

Para calcular a transformada de Laplace da rampa, podemos utilizar a propriedade da transformada da integral,

$$\mathcal{L}[f_R(t)] = \mathcal{L}\left[\int_0^t A.u(t)dt\right] = \frac{\mathcal{L}[A.u(t)]}{s} = \frac{A}{s^2} \quad (4.3)$$

4.3 Entrada parabólica

Lembrando que

$$f_P(t) = \int_0^t f_R(t)dt = \frac{At^2}{2} \quad (4.4)$$

e utilizando as propriedades da transformada de Laplace, obtemos

$$F_p(s) = \frac{A}{s^3}, \quad (4.5)$$

onde a constante A engloba também o fator $\frac{1}{2}$ oriundo da integração de At . A fig. 3 representa as três entradas para teste mais comuns.

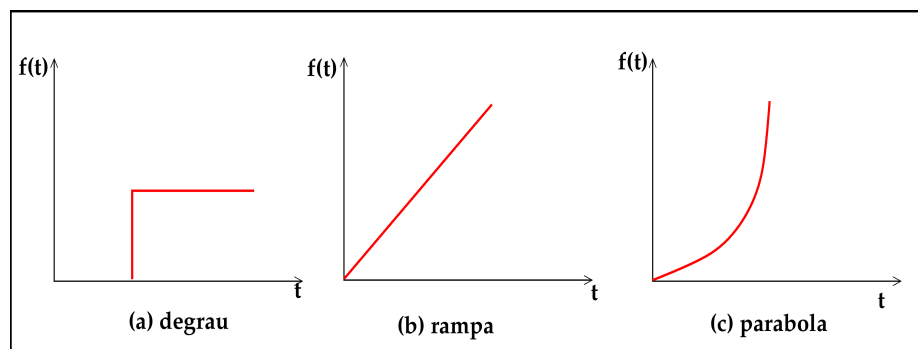


Figura 3: Entradas de teste mais utilizadas na avaliação de sistemas de controle.

5 Avaliação do erro em estado estacionário

5.1 Erro para uma entrada em degrau

5.1.1 sistema do tipo 0

Seja a FTMA de um sistema,

$$G(s) = K \frac{\prod_{i=1}^M (s + z_i)}{s^0 \prod_{j=1}^L (s + p_j)}, \quad (5.1)$$

Utilizando a equação genérica para cálculo do erro, eq. 2.11, com $R(s) = \frac{A}{s}$,

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s.R(s)}{1 + G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{A}{s} \frac{1}{1 + K \frac{\prod_{i=1}^M (s + z_i)}{\prod_{j=1}^L (s + p_j)}} \quad (5.2)$$

$$= \frac{A}{1 + K \frac{\prod_{i=1}^M (z_i)}{\prod_{j=1}^L (p_j)}} = \frac{A}{1 + K_p} \quad (5.3)$$

onde

$$K_p \triangleq \frac{\prod_{i=1}^M (z_i)}{\prod_{j=1}^L (p_j)} \quad (5.4)$$

é denominada constante de erro de posição.

5.1.2 Sistemas dos tipos 1 e 2

Observemos o que ocorre quando a entrada em degrau é aplicada a sistemas cujas FTMA's possuem integradores. Por exemplo, para o sistema do tipo 1, teremos

$$G(s) = K \frac{\prod_{i=1}^M (s + z_i)}{s^1 \prod_{j=1}^L (s + p_j)}, \quad (5.5)$$

O erro em estado estacionário fica, aplicando-se a equação 2.11,

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s.R(s)}{1 + G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{A}{s} \frac{1}{1 + K \frac{\prod_{i=1}^M (s + z_i)}{s \prod_{j=1}^L (s + p_j)}} \quad (5.6)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{As \prod_{j=1}^L (s + p_j)}{\left[s \prod_{j=1}^L (s + p_j) + K \prod_{i=1}^M (s + z_i) \right]} = 0 \quad (5.7)$$

O termo independente em s no numerador da equação acima, quando levado ao limite zero, anula o resultado. Conclui-se, portanto, que a presença de mais integradores (sistemas do tipo 2 em diante) fará com que o comportamento do erro seja idêntico ao relatado acima.

5.2 Erro para uma entrada em rampa

5.2.1 Sistema tipo 0

Utilizando-se a eq. 2.11 com $R(s) = \frac{A}{s^2}$ obtém-se, para um sistema cuja FTMA $G(s)$ é do tipo zero,

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s.R(s)}{1 + G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{A}{s^2} \frac{1}{1 + K \frac{\prod_{i=1}^M (s+z_i)}{\prod_{j=1}^L (s+p_j)}} = \frac{A}{0} \frac{1}{1 + G(0)} = \infty \quad (5.8)$$

Assim, um sistema do tipo 0 é incapaz de acompanhar uma entrada em rampa. Como veremos a seguir, há necessidade de incluir integradores na função de transferência para tornar esta ação possível

5.2.2 Sistema tipo 1

Imediatamente, através da eq. 2.11 tem-se, para um sistema cuja FTMA $G(s)$ é do tipo 1,

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s.R(s)}{1 + G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{A}{s^2} \frac{1}{1 + K \frac{\prod_{i=1}^M (s+z_i)}{s \prod_{j=1}^L (s+p_j)}} \quad (5.9)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{s} \frac{s \prod_{j=1}^L (s+p_j)}{s \prod_{j=1}^L (s+p_j) + K \prod_{i=1}^M (s+z_i)} = \frac{A \prod_{j=1}^L (p_j)}{K \prod_{i=1}^M (z_i)} = \frac{A}{K_V} \quad (5.10)$$

A constante K_V , definida como

$$K_V \triangleq K \frac{\prod_{i=1}^M (z_i)}{\prod_{j=1}^L (p_j)} \quad (5.11)$$

é conhecida como *constante de erro de velocidade* e mostra que um sistema com um integrador, sob a ação de uma entrada em rampa, apresenta um erro constante em regime permanente.

5.2.3 Sistema tipo 2

De maneira análoga, aplicando-se a eq. 2.11 a um sistema cuja FTMA $G(s)$ é do tipo 2 obtém-se

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s.R(s)}{1 + G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{A}{s^2} \frac{1}{1 + K \frac{\prod_{i=1}^M (s+z_i)}{s^2 \prod_{j=1}^L (s+p_j)}} \quad (5.12)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{s} \frac{s^2 \prod_{j=1}^L (s+p_j)}{s^2 \prod_{j=1}^L (s+p_j) + K \prod_{i=1}^M (s+z_i)} = 0 \quad (5.13)$$

Conclui-se que a presença de dois integradores possibilita a um sistema do tipo 2 acompanhar uma entrada em rampa.

5.3 Erro para uma entrada parabólica

5.3.1 Sistemas tipos 0 e 1

Não é difícil observar que, em sistemas para os quais as FTMA sejam dos tipos 0 e 1, a presença de uma entrada parabólica, $R(s) = \frac{A}{s^3}$, implica na inclusão de 3 pólos em $s = 0$, que não podem ser cancelados pelos zeros da função de transferência. Assim, pela eq. 2.11, para um sistema do tipo 1, por exemplo,

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s.R(s)}{1 + G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{A}{s^3} \frac{1}{1 + K \frac{\prod_{i=1}^M (s+z_i)}{s \prod_{j=1}^L (s+p_j)}} \quad (5.14)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{s^2} \frac{s \prod_{j=1}^L (s+p_j)}{s \prod_{j=1}^L (s+p_j) + K \prod_{i=1}^M (s+z_i)} = \frac{A \prod_{j=1}^L (p_j)}{0 \prod_{i=1}^M (z_i)} = \infty \quad (5.15)$$

O resultado acima é válido também para sistemas do tipo zero, pois estes não são capazes sequer de anular o efeito de um dos zeros da FTMA.

5.3.2 Sistema tipo 2

Por fim, analisemos o comportamento do erro para um sistema com dois integradores quando submetido a uma entrada parabólica. Novamente, pela eq. 2.11, tem-se

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s.R(s)}{1 + G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{A}{s^3} \frac{1}{1 + K \frac{\prod_{i=1}^M (s+z_i)}{s^2 \prod_{j=1}^L (s+p_j)}} \quad (5.16)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{s^2} \frac{s^2 \prod_{j=1}^L (s+p_j)}{s^2 \prod_{j=1}^L (s+p_j) + K \prod_{i=1}^M (s+z_i)} = \frac{A \prod_{j=1}^L (p_j)}{K \prod_{i=1}^M (z_i)} = \frac{A}{K_A} \quad (5.17)$$

A constante K_A , definida como

$$K_A \triangleq K \frac{\prod_{i=1}^M (z_i)}{\prod_{j=1}^L (p_j)} \quad (5.18)$$

é denominada *constante de erro em aceleração* e corresponde a um dos fatores que causa erro constante em regime permanente para um sistema do tipo 2 quando submetido a uma entrada parabólica. Para cancelar tal erro, mais um integrador seria necessário.

A argumentação acima denota a importância da presença de elementos integradores em sistemas de controle. Nas próximas seções, apresentam-se as *ações de controle* e mostram-se as funções desempenhadas por elementos de ganho constante, integral e diferencial em sistemas genéricos.

6 Ações de Controle

Vimos, nas seções anteriores que, em determinados tipos de plantas (sistemas), a resposta aos sinais de referência mais utilizados nem sempre é a esperada. Em outras palavras, existem situações em que a planta, por si só, é incapaz de seguir o sinal de referência e proporcionar erro nulo.

A função dos controladores automáticos é comparar o valor da saída do sistema com a referência a ser seguida e, através de *ações de controle*, ajustar o *ganho do conjunto controlador* de forma a reduzir o erro até valores aceitáveis. Seja, portanto, o diagrama de blocos da fig. 4, onde mostra-se uma planta genérica controlada em malha fechada não-unitária

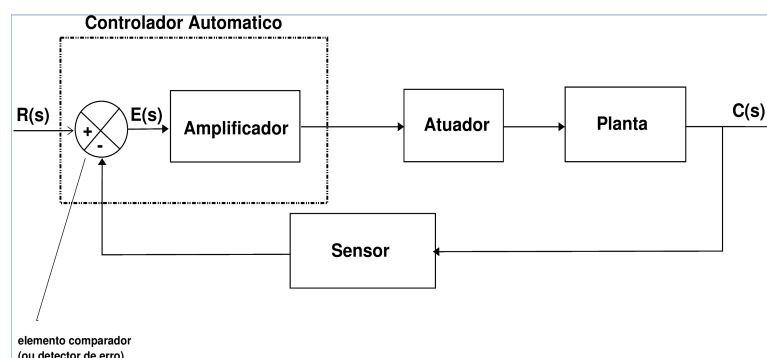


Figura 4: Representação de um sistema de controle genérico em malha fechada

O funcionamento do sistema de controle pode ser resumido da seguinte forma: o elemento comparador ou detector de erro presente no controlador determina o desvio entre o sinal de saída e a referência (ou ponto de ajuste). A função do amplificador é elevar a potência disponível na saída do comparador (que normalmente é baixa) até um valor suficiente para acionar o atuador. O atuador é o elemento que efetivamente irá *controlar* o sistema. Exemplos de atuadores são motores elétricos diversos (DC, passo, servomotor), válvulas eletropneumáticas, relês, motores ou pistões hidráulicos, entre outros.

Observa-se, na figura 4, que a realimentação não é unitária. O bloco **sensor** representa a dinâmica do sensor acoplado à saída do sistema. Isto é necessário em situações nas quais

o sinal de saída do sistema é distinto daquele utilizado para a entrada de referência e que será comparado no detector de erro. Assim, por exemplo, um determinado sensor pode medir velocidade porém a referência a ser comparada é dada em Volts. O bloco **sensor** é responsável por *converter* a saída em velocidade para seu equivalente em volts.

Pode-se, agora iniciar a descrição das ações de controle propriamente ditas. Basicamente, podem-se classificar os controladores industriais em sete tipos, de acordo com suas ações de controle:

1. controladores de duas posições (liga-desliga);
2. controladores proporcionais;
3. controladores integrais;
4. controladores derivativos;
5. controladores proporcional-integrais;
6. controladores proporcional-derivativos;
7. controladores proporcional-integral-derivativos;

7 Ação de controle de duas posições

Sistemas de controle deste tipo possuem duas posições fixas, genericamente designadas ligado-desligado. Devido à sua simplicidade, controladores liga-desliga possuem baixo custo. Dependendo do sinal de erro atuante $e(t)$, o controlador apresenta ação de controle $u(t)$ positiva ou negativa,

$$u(t) = U_1, \text{ se } e(t) > 0 \tag{7.1}$$

$$u(t) = U_2, \text{ se } e(t) < 0 \tag{7.2}$$

$$\tag{7.3}$$

com U_1 e U_2 constantes. O valor U_2 pode ser zero ou $-U_1$, dependendo do caso e aplicação. Esquematicamente,

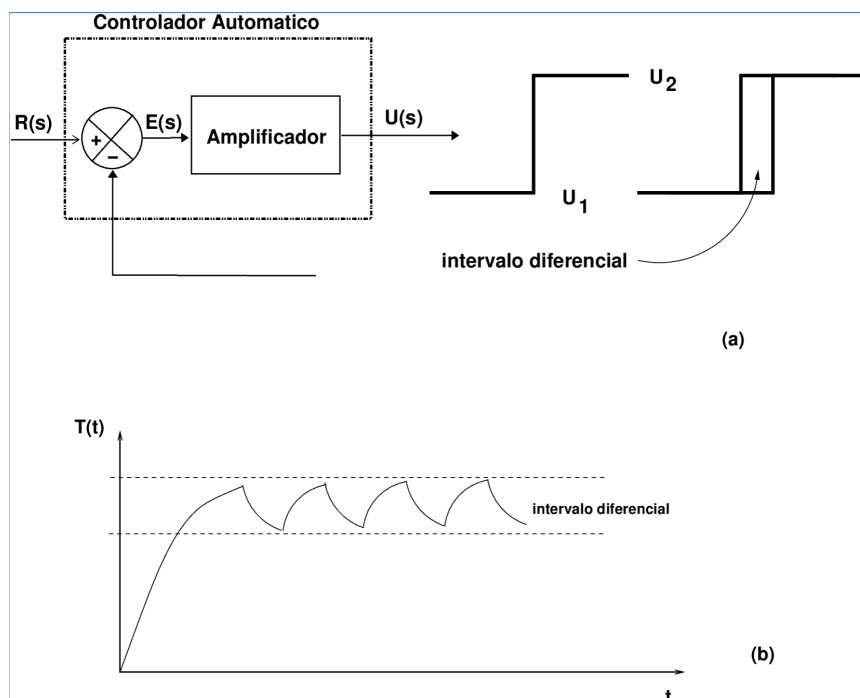


Figura 5: Ação de um controle de duas posições

Na fig. 5(a), observa-se a presença do chamado *intervalo diferencial*. O intervalo diferencial é o tempo durante o qual o erro atuante deve permanecer até que ocorra a comutação. A existência de tal intervalo é causada, algumas vezes, por falhas mecânicas no sistema de acionamento (atrito, emperramento, folgas devido a desgaste). No entanto, recorre-se ao intervalo diferencial como característica de projeto de tais sistemas para evitar seu acionamento com elevada frequência, o que é comum em sistemas cuja dinâmica é dita *rápida*. Exemplos típicos de ação de controle liga-desliga são o controle de temperatura de uma geladeira e o controle de nível de um fluido em processos industriais.

No caso da geladeira, o ajuste que promovemos no seletor nada mais é que um ajuste da referência, que irá determinar o tempo de funcionamento do compressor de forma a fazer com que o sistema atinja a temperatura solicitada. O gráfico da fig. 5(b) apresenta a resposta no

tempo para tal planta, comandada por um controlador liga-desliga. Nota-se que a temperatura oscila entre dois patamares, que correspondem aos limites do intervalo diferencial. Para que o intervalo fosse diminuído, seria necessário que a troca entre os estágios ligado e desligado ocorresse com maior frequência; no entanto, o aumento no número de acionamentos tende a diminuir a vida útil do equipamento.

8 Ação de controle proporcional (P)

Controladores proporcionais apresentam como característica a *lei de controle*

$$u(t) = K_p e(t) \quad (8.1)$$

ou, no domínio complexo,

$$K_p = \frac{U(s)}{E(s)} \quad (8.2)$$

onde K_p é o chamado *ganho proporcional*, que pode ser ajustado em função da necessidade e de suas limitações^[ii]. Um exemplo típico de ação de controle proporcional é o controle de força em um mecanismo de acionamento hidráulico. O diagrama de blocos da fig. 6 apresenta um sistema de controle deste tipo e a respectiva resposta no tempo.

Um sistema de controle proporcional apresenta as seguintes características:

- não altera a ordem do sistema, pois não introduz pólos ou zeros na FTMF;
- pode não ser capaz de corrigir o erro de estado estacionário, devido à capacidade limitada de ganho;
- o aumento excessivo do ganho (K_p) pode tornar o sistema instável.

^[ii]Este termo refere-se à potência disponível, seja no sistema de controle, seja no atuador.

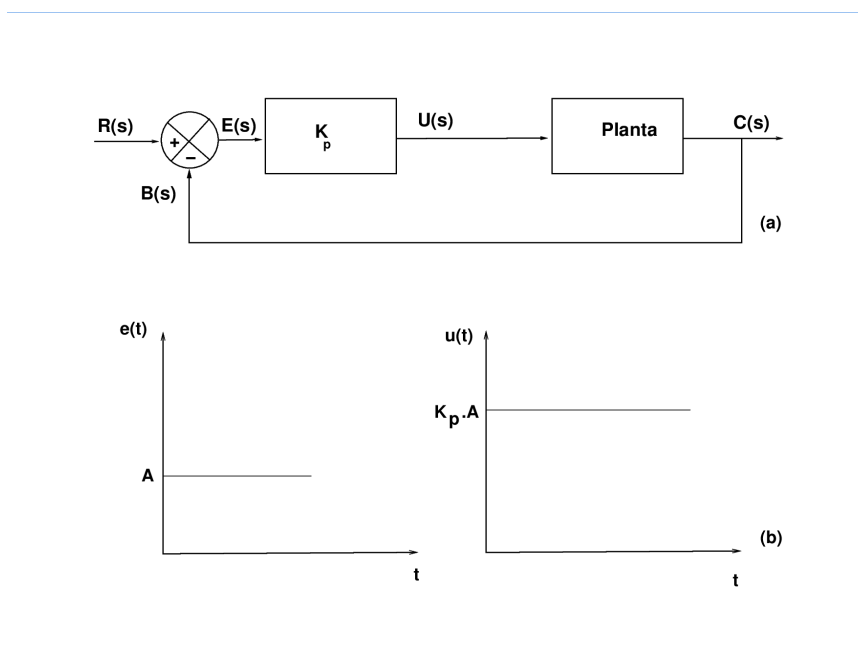


Figura 6: Ação de controle proporcional e sua resposta a um erro em degrau de amplitude A .

9 Ação de controle integral (I)

O controlador do tipo integral possui uma *lei de controle* em que a ação é *proporcional à integral do erro*, conforme mostram as equações abaixo:

$$u(t) = K_i \int_0^t e(t) dt \rightarrow U(s) = K_i \frac{E(s)}{s} \rightarrow \quad (9.1)$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s} \quad (9.2)$$

onde K_i é o *ganho integral*, ou *ganho de restabelecimento*. Quando observa-se que

$$\frac{du(t)}{dt} = K_i e(t) \rightarrow u(t) = K_i \int_0^t e(t) dt \quad (9.3)$$

pode-se entender a ação do controle integral $u(t)$ como aquela cuja *taxa de variação* é proporcional ao erro atuante $e(t)$.

O diagrama de blocos de um sistema que possui tal controlador é mostrado na fig. 7. Observa-se, nesta figura, que se o erro $e(t)$ for constante, a ação de controle é uma rampa. As características do controlador integral são:

- aumenta a ordem do sistema, pois introduz um pólo em $s = 0$ na FTMF;
- possui bom desempenho em regime permanente (anula o erro em regime permanente para sistemas do tipo zero);
- raramente é utilizado separado de outros tipos de controladores, principalmente os do tipo proporcional.

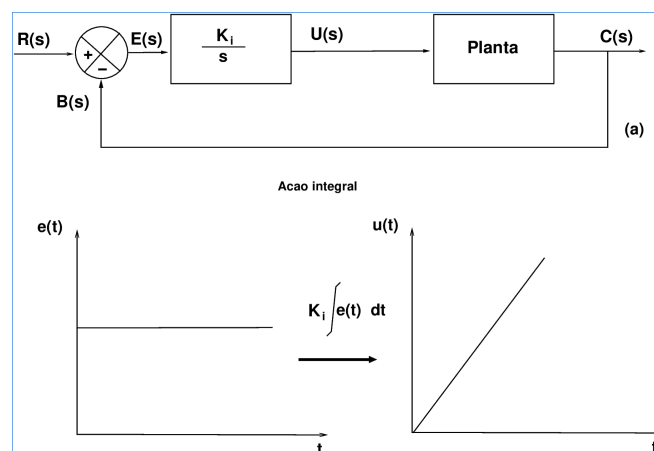


Figura 7: Ação de controle integral

10 Ação de controle derivativa (D)

Controladores do tipo derivativo possuem uma lei de controle em que a ação de controle é *proporcional à velocidade do erro*, o que corresponde à sua derivada:

$$u(t) = K_d \frac{de(t)}{dt} \rightarrow \quad (10.1)$$

$$U(s) = K_d E(s) s \rightarrow \quad (10.2)$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_d s \quad (10.3)$$

onde K_d é o *ganho diferencial*. O controlador tipo D possui as seguintes características:

- atua somente quando há transitório (variação) no erro; assim, nunca é utilizado separadamente;
- introduz um zero na FTMF;
- aumenta a rapidez na resposta.

O diagrama de blocos e os gráficos de resposta no tempo de um controlador deste tipo são mostrados na fig. 8. Novamente, salienta-se que tal representação é apenas didática, uma vez que não se utilizam controladores do tipo derivativo separadamente.

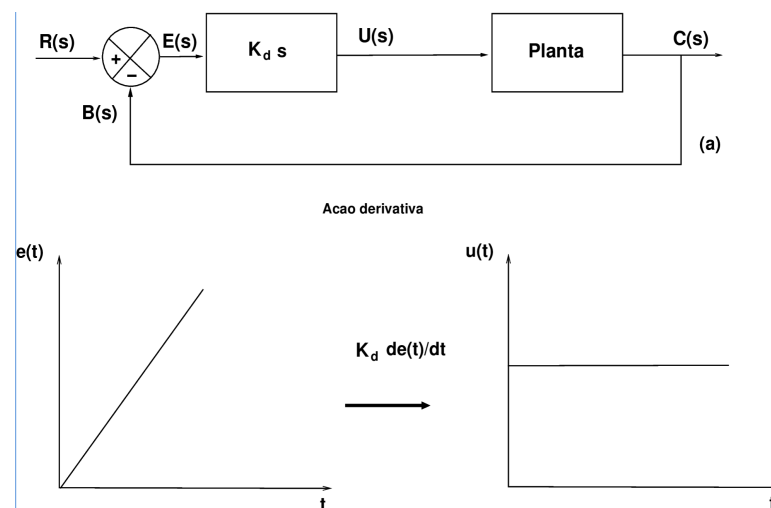


Figura 8: Ação de controle derivativa

11 Ação de controle proporcional e integral (PI)

Um dos tipos mais utilizados de controladores é o que combina as ações de controle proporcional e integral. O efeito combinado é obtido através da somatória dos efeitos individuais, gerando a

lei de controle

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^T e(t) dt \rightarrow$$

$$U(s) = K_p E(s) + K_i \frac{E(s)}{s} \rightarrow$$

$$U(s) = K_p \left(1 + \frac{K_i}{K_p} \frac{1}{s} \right) E(s) \rightarrow$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$

O termo

$$\frac{K_i}{K_p} = \frac{1}{T_i} \quad [\text{segundo}^{-1}] \tag{11.1}$$

é denominado tempo integral. Pode-se ajustar K_p e T_i durante a operação do controlador. O inverso do tempo integral T_i é denominado *taxa de restabelecimento* e representa o número de vezes por minuto em que a ação proporcional do controlador é duplicada. A fig. 9 representa tal controlador.

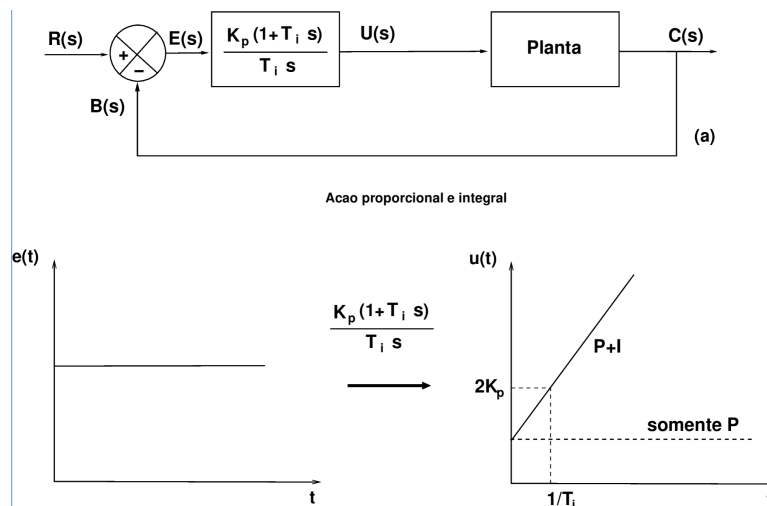


Figura 9: Ação de controle proporcional e integral

O controlador PI introduz um pólo na origem, sendo portanto recomendado para sistemas de 1a. ordem. Quando os ganhos combinados são excessivamente aumentados, pode haver saturação no atuador.

12 Ação de controle proporcional e derivativa (PD)

A lei de controle que descreve a ação de controle combinada proporcional e derivativa é dada pelas seguintes equações:

$$u(t) = K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt} \rightarrow \quad (12.1)$$

$$U(s) = K_p E(s) + K_d E(s)s \rightarrow \quad (12.2)$$

$$U(s) = K_p \left(1 + \frac{K_d}{K_p} s\right) E(s) \rightarrow \quad (12.3)$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p (1 + T_d s) \quad (12.4)$$

O termo

$$\frac{K_d}{K_p} = T_d \quad [\text{segundo}] \quad (12.5)$$

é denominado *tempo derivativo*. Neste tipo de controlador, tanto o ganho proporcional quanto o tempo derivativo podem ser ajustados. Como pode-se perceber pelas equações precedentes, o tempo derivativo é o intervalo pelo qual a ação de controle proporcional é “antecipada”. O efeito descrito pode ser visto na fig. 10. Deve-se salientar que, na realidade, não há “antecipação” de algo que ainda não ocorreu, o que justifica as aspas duplas. A analogia refere-se ao comportamento matemático da ação derivativa. As principais características dos controladores PD são:

- proporcionam correção acentuada antes que $e(t)$ se eleve muito;
- o ganho diferencial “antecipa” a ação do controle proporcional simples;
- tendem a amplificar ruídos e podem causar saturação no atuador;
- normalmente difíceis de sintonizar.

13 Ação de controle proporcional-integral-derivativa (PID)

Controladores PID possuem ampla aplicação industrial. A ação proporcional-integral-derivativa é obtida combinando-se os efeitos individuais na seguinte lei de controle:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t) dt + K_d \frac{de(t)}{dt} \tag{13.1}$$

que, no domínio da frequência torna-se

$$U(s) = K_p E(s) + K_i \frac{E(s)}{s} + K_d E(s) s \rightarrow \tag{13.2}$$

$$U(s) = K_p \left(1 + \frac{K_i}{K_p} \frac{1}{s} + \frac{K_d}{K_p} s \right) E(s) \rightarrow \tag{13.3}$$

como $\frac{1}{T_i} = \frac{K_i}{K_p}$ e $T_d = \frac{K_d}{K_p} \rightarrow \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(\frac{(1 + T_i s + T_i T_d s^2)}{T_i s} \right)$ (13.4)

A ação conjunta introduz um polo e dois zeros no sistema, aumentando sua ordem. Sua utilização é recomendada para sistemas industriais com características de 2a. ordem; neste grupo de sistemas, controladores PID apresentam as vantagens de cada tipo de controlador individual. O diagrama de blocos de um sistema com controlador PID e sua resposta no tempo para uma entrada em rampa são mostrados na fig. 11.

O projeto e a sintonia de controladores PID serão estudados mais adiante neste curso.

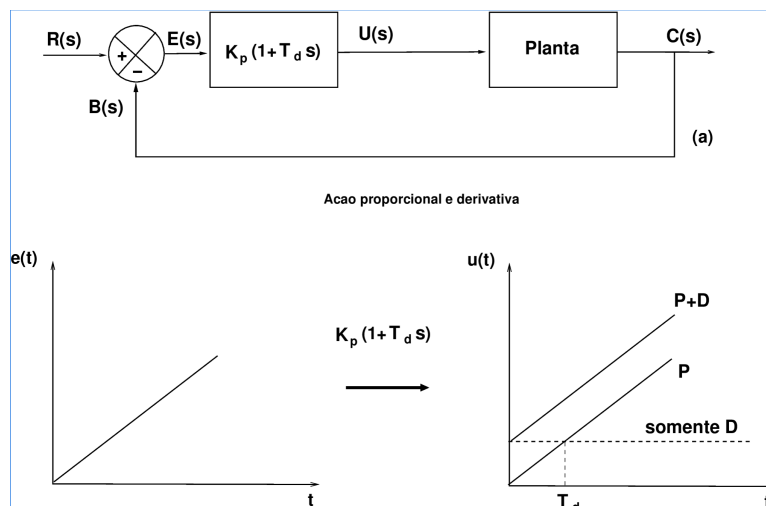


Figura 10: Ação de controle proporcional e derivativa

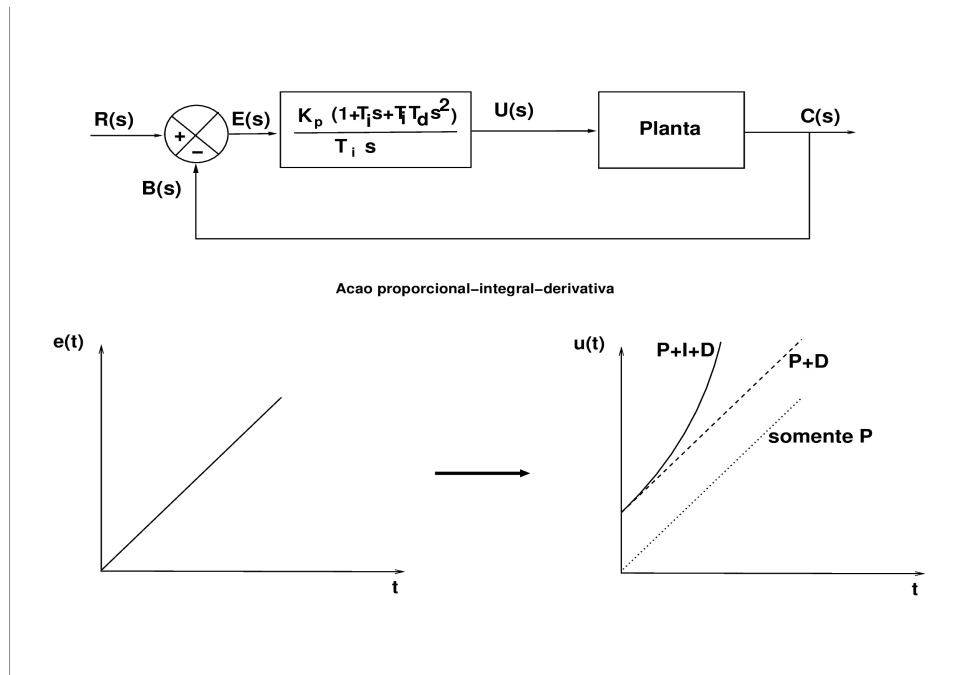


Figura 11: Ação de controle proporcional-integral-derivativa

Referências

- [1] Dorf, R.C. e Bishop, R.H. *Sistemas de Controle Modernos*. São Paulo: LTC, 8a. Edição, 1998.
- [2] Fleury, A.T. *Introdução à Teoria de Controle - Notas de Aula do curso PMC-450*. São Paulo: PMC-EPUSP, 2004.
- [3] Ogata, K. *Modern Control Engineering, 2nd. Ed.*, NJ: Prentice Hall, 1990.