Problema 6 lista 1. a) Calcule a posição do centro de massa de um cone homogêneo.

Se λ for a densidade por unidade de Volume,

$$\lambda = \frac{M}{V} \Rightarrow M = \lambda \cdot V \therefore dm = \lambda \cdot dV$$

$dV = A\ dx = \pi\ r^2\ dx$ não temos coerência nas variáveis da integral, assim, devemos encontrar uma equação que nos forneça a relação para determinar r em função de x.

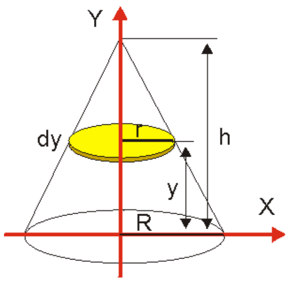
$$tg\theta = \frac{y}{x} = \frac{r}{x} \Rightarrow r = tg\theta\ x$$

$$x_{cm} = \frac{\int x\ dm}{\int dm} = \frac{\int x\ \lambda\ dV}{\int \lambda\ dV} = \frac{\int x\ \lambda\ \pi \cdot r^2 \cdot dx}{\int \lambda\ \pi \cdot r^2 \cdot dx} = \frac{\int_0^L x\ \lambda\ \cdot \pi \cdot x^2 \cdot \underbrace{tg^2\theta}\cdot dx}{\int_0^L \lambda\ \cdot \pi \cdot x^2 \cdot tg^2\theta \cdot dx} = \frac{\int_0^L x^3\ dx}{\int_0^L x^2 \cdot dx} =$$

$$= \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{\frac{x^3}{3}} \Bigg|_0^L = \frac{3L}{4}$$

θ não varia apesar de x variar, assim, estes termos se cancelam

Outra forma: Vamos determinar a posição do CM de um sólido de material homogêneo com a forma de um cone de revolução de altura h e raio da base R, mostrado na figura.



Como o sólido possui um eixo de simetria, o seu CM estará sobre o eixo, logo, é necessário apenas calcular a ordenada do CM, cujo valor é:

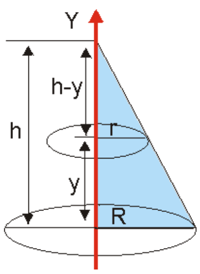
$$\bar{y} = \frac{\int y.dv}{\int dv}$$

Inicialmente vamos calcular o raio r da faixa em função de y.

Vamos considerar os triângulos retângulos semelhantes de base r e R mostrados na figura abaixo, retirada da figura anterior.

Como os triângulos são semelhantes os seus catetos são proporcionais:

$$\frac{r}{R} = \frac{h-y}{h} \Rightarrow r = R\frac{h-y}{h}$$



Vamos calcular o quadrado do raio que será necessário no cálculo do volume da faixa:

$$r^2 = R^2\left[\frac{h-y}{h}\right]^2 \Rightarrow r^2 = R^2\left[1 - \frac{2y}{h} + \frac{y^2}{h^2}\right]$$

Vamos calcular a ordenada do CM do cone sabendo da geometria que o volume V do cone é igual a

$$V = (pR^2.h)/3$$

A faixa será considerada como um cilindro de raio da base r, altura dy e o seu volume dv é igual a

$$dv = pr^2.dy$$

Cálculo da ordenada do CM

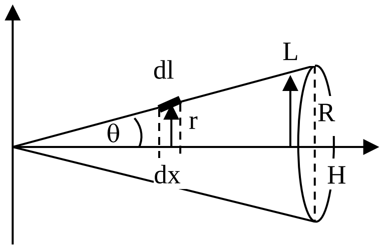
$$\bar{y} = \frac{\int y.dv}{\int dv} = \frac{\int y.\pi r^2.dy}{V} = \frac{\int \pi R^2\left[1 - \frac{2y}{h} + \frac{y^2}{h^2}\right].y.dy}{V}$$

$$\bar{y} = \frac{\pi R^2\left[\int_0^h y.dy - \frac{2}{h}\int_0^h y^2.dy + \frac{1}{h^2}\int_0^h y^3.dy\right]}{V}$$

$$\bar{y} = \frac{\pi R^2\left[\left|\frac{y^2}{2}\right|_0^h - \frac{2}{h}\left|\frac{y^3}{3}\right|_0^h + \frac{1}{h^2}\left|\frac{y^3}{3}\right|_0^h\right]}{V}$$

$$\bar{y} = \frac{\pi R^2\left[\frac{h^2}{2} - \frac{2h^2}{3} + \frac{h^2}{4}\right]}{\frac{\pi R^2 h}{3}} \Rightarrow \bar{y} = \frac{\frac{\pi R^2 h^2}{12}}{\frac{\pi R^2 h}{3}} \Rightarrow \boxed{\bar{y} = \frac{h}{4}}$$

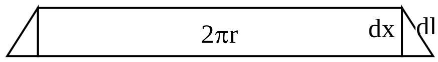
No casso de uma casca cônica,



$$tg\theta = \frac{R}{H} = \frac{r}{x} = cte$$

$$tg\theta = \frac{r}{x} \Rightarrow r = tg\theta\ x$$

A área formada pelo anel de comprimento ($2\pi r$) e altura dl, pode entender-se como um retângulo

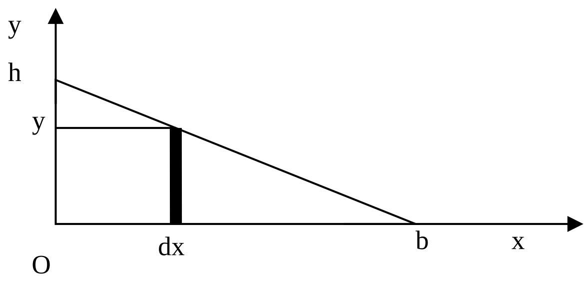


Assim, $\lambda = \frac{M}{A} \Rightarrow M = \lambda \cdot A \therefore dm = \lambda \cdot dA$

$$dA = 2\pi r\ dx = 2\pi\ x\ tg\theta\ dx$$
$$dA = 2\pi\ xtg\theta dx$$

$$x_{cm} = \frac{\int x\,dm}{\int dm} = \frac{\int x\,\lambda\,dA}{\int \lambda\,dA} = \frac{\int_0^L x\,\lambda\,2\pi\,x\,tg\theta\,dx}{\int_0^L \lambda\,2\pi\,x\,tg\theta\,dx} = \frac{\int_0^L x^2\,dx}{\int_0^L x\,dx} = \left.\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{\frac{x^2}{2}}\right|_0^L = \frac{2L}{3}$$

Outro: Cálculo do centro de massa de um triângulo



Para poder calcular o vetor posição do CM, devemos em primeiro lugar realizar uma mudança de variáveis. Para isso, na figura ao lado percebemos que: $\sigma = \frac{M}{A} \Rightarrow M = \sigma A; dm = \sigma\,dA$

$dA = y \cdot dx$ (2)
Por outro lado, a reta que define essa variável y, pode ser expressa em função de x, nossa variável de integração. A hipotenusa do triângulo é uma reta que pode ser definida como:

$y = h - \frac{h}{b}x$ (3),

que satisfaz os valores de y = h, para x = 0 e y = 0, para x = b, e nos fornece o valor de y para qualquer x.

Substituindo dA de (2), em (1),

$x_{CM} = \frac{1}{M}\int xdm = \frac{1}{M}\int x\ \sigma\ dA = \frac{1}{M}\int \frac{M}{A}x\ dA = \frac{1}{M}\frac{M}{A}\int x \cdot y\ dx$,

substituindo *y* pela expressão em (3),

$$x_{CM} = \frac{1}{A}\int x\left(h - \frac{h}{b}x\right)dx = \frac{1}{A}\int \left(hx - \frac{h}{b}x^2\right)dx = \frac{1}{A}\left(\frac{hx^2}{2} - \frac{h}{b}\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^b$$

$$= \frac{1}{A}\left(\frac{hb^2}{2} - \frac{h}{b}\frac{b^3}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{A}\left(\frac{hb^2}{2} - \frac{hb^2}{3}\right) = \frac{1}{A}\frac{hb}{2}\left(b - \frac{2}{3}b\right) = \frac{1}{3}b$$

Se seguirmos o mesmo raciocínio, chegamos a que a coordenada y_{CM} se encontra em 1/3 de h.