6 Determinação numérica de auto-valores

* Autovalores e autovetores:

$$A\vec{x} = \lambda \vec{x} \quad \begin{cases} \vec{x} \rightarrow \text{autovetores} \\ \lambda \rightarrow \text{autovalores} \end{cases}$$

$$\underbrace{(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}}_{\text{② para cada } \lambda, \text{ acha } \vec{x}.} \longrightarrow \text{se } \vec{x} \neq \vec{0}, \quad \underbrace{\det(A - \lambda I) = 0}_{\text{① resolve e acha } \lambda\text{'s (polinômio característico)}}$$

ex)

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \qquad \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & 3 \\ 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(8-\lambda)(7-\lambda) - 6 = 0$$

$$\lambda^2 - 7\lambda - 8\lambda + 56 - 6 = 0$$

$$\lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = 10 \\ \lambda_2 = 5 \end{cases}$$

$\lambda_1 = 10$:

$$\begin{bmatrix} 8-10 & 3 \\ 2 & 7-10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-2x_1 + 3x_2 = 0, \quad x_1 = \alpha, \quad x_2 = \frac{2}{3}\alpha, \quad \vec{x} = \alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = 5$:

$$\begin{bmatrix} 8-5 & 3 \\ 2 & 7-5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$3x_1 + 3x_2 = 0, \quad x_1 = \beta, \quad x_2 = -\beta \qquad \vec{x} = \beta\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

obs:

- $\text{traço}(A) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(A)$, $A_{m \times m}$

- $A_{m \times m}$ possui m autovalores (complexos, repetidos)

- $\det(A) = \prod_{i=1}^{m} \lambda_i(A) \longrightarrow A$ singular $\Leftrightarrow \lambda_1 = 0$

- se $\lambda_i = \lambda_j$, $\vec{x}_i$ e $\vec{x}_j$ são L.I.

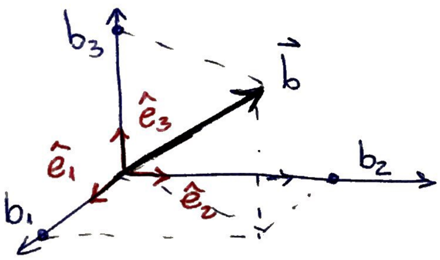
⊛ • se A é diagonal ou triangular (sup. ou inf.), os autovalores são os elementos da diagonal.

* Base de um espaço vetorial:

interp. 1) $A\vec{x} = \vec{b}$ $\qquad \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_m \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \vec{b}$

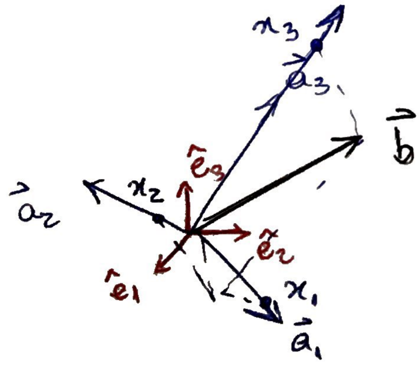
$$\vec{b} = \vec{a}_1 x_1 + \vec{a}_2 x_2 + \ldots + \vec{a}_m x_m$$

$$\vec{b} = I\vec{b} = \hat{e}_1 b_1 + \hat{e}_2 b_2 + \ldots + \hat{e}_m b_m \qquad \underbrace{\begin{array}{cccc} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & & \hat{e}_m \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{I} \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\vec{b}} = \vec{b}$$



$\vec{b} \rightarrow$ coeficientes da base canônica

$\vec{x} \rightarrow$ coeficientes da base A



similarmente: $\vec{x} = P\,[\vec{x}]_P$

- $P_{n\times n}$ não-singular: matriz mudança de base
- $[\vec{x}]_P \to$ vetor $\vec{x}$ na base P.
- vetores colunas de $P \to \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n \to$ base.

$$[\vec{x}]_P = P^{-1}\vec{x}$$

——— // ———

interp. 2) $A\vec{x} = \vec{b}$

A é matriz que representa uma transformação linear

- rotação: 
- reflexão: 
- cisalhamento: 
- estiramento / contração 

→ transf. lineares preservam a origem, o paralelismo e a colinearidade (retas permanecem)

→ os vetores que sofrem apenas reflexão e/ou estiramento/contração (permanecem na mesma "linha" após a transformação) são os autovetores de A. (reflexão: autovalor −1, estiramento/contração: autovalor é a taxa).

mesma transf. em outra base
$$\begin{cases} B\,[\vec{x}]_P = [\vec{b}]_P \qquad \underbrace{B P^{-1}\vec{x}}_{[x]_P} = \underbrace{P^{-1}\vec{b}}_{[\vec{b}]_P} \\ \underbrace{P B P^{-1}}_{A \text{ na base } P}\vec{x} = \vec{b} \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd}
\vec{x} & & \vec{b} \arrow[ll, "A"'] \arrow[d, "P"] \\
{[\vec{x}]_P} \arrow[u, "P^{-1}"] & & {[\vec{b}]_b} \arrow[ll, "B"]
\end{tikzcd}$$

$$A = PBP^{-1}$$

- Se $A = PBP^{-1}$, dizemos que B é semelhante à A.
- B e A representam a mesma transformação em bases diferentes.
- A e B possuem os mesmos autovalores

$$\det(A - \lambda I) = \det(PBP^{-1} - \lambda I) = \det(PBP^{-1} - \lambda I PP^{-1})$$

$$= \det(PBP^{-1} - P\lambda I P^{-1}) = \det(P(B - \lambda I)P^{-1}) =$$

$$= \det(P)\det(B - \lambda I)\det(P^{-1}) = \cancel{\det(P)}\det(B - \lambda I)\frac{1}{\cancel{\det(P)}} =$$

$$= \det(B - \lambda I) \rightarrow \text{mesma eq. característica.}$$

- A e B possuem o mesmo determinante:

$$\det(A) = \det(PBP^{-1}) = \det(P)\det(B)\det(P^{-1})$$

$$= \cancel{\det(P)}\det(B)\frac{1}{\cancel{\det(P)}} = \det(B)$$

- autovalor e determinante são propriedades da transf. linear independente da base utilizada.
- autovetores:

$$P^{-1}A\vec{x} = P^{-1}\lambda\vec{x} \qquad P^{-1}APP^{-1}\vec{x} = \lambda P^{-1}\vec{x}$$

$$(P^{-1}AP)P^{-1}\vec{x} = \lambda(P^{-1}\vec{x}) \qquad B(P^{-1}\vec{x}) = \lambda(P^{-1}\vec{x})$$

$$B[\vec{x}]_P = \lambda[\vec{x}]_P.$$

* Decomposição de Schur:

- Teorema: toda matriz $A_{m \times m}$ é similar a uma matriz triangular superior. Além disso, a matriz mudança de base P pode ser escolhida como uma matriz ortogonal (unitária no caso complexo), cujos vetores coluna formam uma base ortonormal.

- matriz ortogonal: $Q = [\vec{q}_1 \ \vec{q}_2 \dots \vec{q}_m]$

$$\vec{q}_i^{\,T} \vec{q}_j = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{se } Q \in \mathbb{R}^{m \times m}: & Q^T Q = Q Q^T = I, \quad Q^{-1} = Q^T \\ \text{se } Q \in \mathbb{C}^{m \times m}: & Q^H Q = Q Q^H = I \quad Q^{-1} = Q^H \end{cases}$$

↳ hermitiano transposto

↳ matriz unitária

- $A = Q T Q^T$ ou $A = Q T Q^H$.

- a decomposição de Schur não é única.

- se A é matriz <u>normal</u> (simétrica, anti-simétrica, unitária...)

$$A = Q \Lambda Q^T$$

onde Λ é matriz diagonal. Dizemos que A é diagonalizável.

- A é diagonalizável se e somente se A possui n autovetores L.I.

* Cálculo numérico de autovetores: Quarteroni: 6.5
Franco: 7.7

⇒ transformar A em T (triangular ou diagonal), autovalores "aparecerão" na diagonal principal.

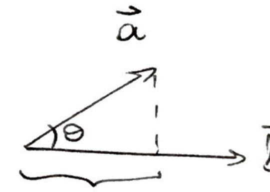
⇒ Para $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ não-singular: decomposição QR.

⇒ Decomposição QR: Quarteroni: 5.7

$$A = QR \quad \begin{cases} Q \to \text{ortogonal (vetores coluna ortonormais)} \\ R \to \text{triangular superior.} \end{cases}$$

• método de Gram-Schmidt:

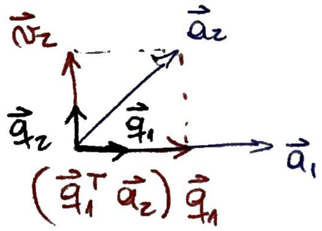
$$\underbrace{A = [\vec{a}_1 \;\; \vec{a}_2 \; \cdots \; \vec{a}_n] \qquad Q = [\underbrace{\vec{q}_1 \;\; \vec{q}_2 \cdots \vec{q}_n}_{\text{ortonormais}}]}_{\text{mesmo espaço vetorial}}$$



$$\|\vec{a}\| \cos\theta = \frac{\vec{a}^T\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$$

$$\vec{a}^T\vec{b} = \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \cos\theta$$

① $\vec{q}_1 = \dfrac{\vec{a}_1}{\underbrace{\|\vec{a}_1\|}_{r_{11}}}$



② $\vec{v}_2 = \vec{a}_2 - \underbrace{(\vec{q}_1^T\vec{a}_2)}_{r_{12}}\vec{q}_1$

$\vec{q}_2 = \dfrac{\vec{v}_2}{\underbrace{\|\vec{v}_2\|}_{r_{22}}}$

③ $\vec{v}_3 = \vec{a}_3 - \underbrace{(\vec{q}_1^T\vec{a}_3)}_{r_{13}}\vec{q}_1 - \underbrace{(\vec{q}_2^T\vec{a}_3)}_{r_{23}}\vec{q}_2$

$\vec{q}_3 = \dfrac{\vec{v}_3}{\underbrace{\|\vec{v}_3\|}_{r_{33}}}$

$$\|\vec{a}_1\| = (\vec{q}_1^T\vec{a}_1)$$
$$\|\vec{v}_2\| = (\vec{q}_2^T\vec{a}_2)$$
$$\vdots$$
$$\|\vec{v}_n\| = (\vec{q}_n^T\vec{a}_n)$$

$\vdots$

ⓝ $\vec{v}_n = \vec{a}_n - \underbrace{(\vec{q}_1^T\vec{a}_n)}_{r_{1n}}\vec{q}_1 - \underbrace{(\vec{q}_2^T\vec{a}_n)}_{r_{2n}}\vec{q}_2 - \dots - \underbrace{(\vec{q}_{n-1}^T\vec{a}_n)}_{r_{n-1\,n}}\vec{q}_{n-1}$

$\vec{q}_n = \dfrac{\vec{v}_n}{\underbrace{\|\vec{v}_n\|}_{r_{nn}}}$

→ a cada passo, a projeção do vetor $\vec{a}_k$ nos vetores ortonormais já definidos $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_{k-1}\}$ é removida de $\vec{a}_k$, restando um vetor ortogonal $\vec{v}_k$.

→ se $\vec{v}_n = 0$, $\vec{a}_n$ não é L.I., não há parte ortogonal em $\vec{a}_n$, utiliza outro método.

componentes de $\vec{a}_k$ na base Q
$$\begin{cases} \vec{a}_1 = (\vec{q}_1^T \vec{a}_1)\vec{q}_1 \\ \vec{a}_2 = (\vec{q}_1^T \vec{a}_2)\vec{q}_1 + (\vec{q}_2^T \vec{a}_2)\vec{q}_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_n = \sum_{j=1}^{n} (\vec{q}_j^T \vec{a}_n)\vec{q}_j \end{cases}$$

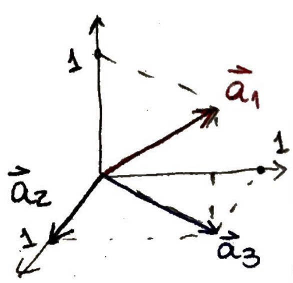
$$A = QR$$

$$[\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \dots \ \vec{a}_n] = [\vec{q}_1 \ \vec{q}_2 \ \dots \ \vec{q}_n] \underbrace{\begin{bmatrix} (\vec{q}_1^T \vec{a}_1) & (\vec{q}_1^T \vec{a}_2) & \cdots & (\vec{q}_1^T \vec{a}_n) \\ 0 & (\vec{q}_2^T \vec{a}_2) & \cdots & (\vec{q}_2^T \vec{a}_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & (\vec{q}_n^T \vec{a}_n) \end{bmatrix}}_{R}$$

$\vec{a}_j = Q\vec{r}_j$

↳ coef. da comb. linear dos vetores coluna de Q.

ex) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$



$\vec{q}_1 = \dfrac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_1\|} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$ $\qquad r_{11} = \|\vec{a}_1\| = \sqrt{3}$

algoritmo:

$\vec{q}_1 = \dfrac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_1\|}$

for $j = 2:n$
  $\vec{v}_j = \vec{a}_j$
  for $i = 1 : j-1$
    $\vec{v}_j = \vec{v}_j - (\vec{q}_i^T \vec{a}_j)\vec{q}_i$
    $r_{ij} = (\vec{q}_i^T \vec{a}_j)$
  end
  $\vec{q}_j = \vec{v}_j / \|\vec{v}_j\|$
  $r_{jj} = \|\vec{v}_j\|$

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix}1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}}_{r_{12} = 1/\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1/3\\1/3\\1/3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2/3\\-1/3\\-1/3\end{bmatrix}$$

$$\vec{q}_2 = \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}/3}\begin{bmatrix}2/3\\-1/3\\-1/3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\end{bmatrix} \qquad r_{22} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\vec{v}_3 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix}1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}}_{r_{13} = 2/\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix}2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}}_{r_{23} = 1/\sqrt{6}}\begin{bmatrix}2/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2/3\\2/3\\2/3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1/3\\-1/6\\-1/6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1/2\\-1/2\end{bmatrix}$$

$$\vec{q}_3 = \frac{\vec{v}_3}{\|\vec{v}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}/2}\begin{bmatrix}0\\1/2\\-1/2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{bmatrix} \qquad r_{33} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$Q = \begin{bmatrix}1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & 0\\1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2}\end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix}\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{3}\\0 & \sqrt{6}/3 & 1/\sqrt{6}\\0 & 0 & \sqrt{2}/2\end{bmatrix}$$

$A = QR$ ✓ (cheque no MATLAB)

- no MATLAB / OCTAVE: $[Q,R] = qr(A)$

- método de Gram-Schmidt modificado: (mais estável numericamente): a cada iteração K, remove as projeções de todos os $\vec{a}_i$'s de uma dada direção $\vec{q}_K$, criando vetores temporários $\vec{v}_i^{(K)}$.

```
V = A
for j = 1 : n
    q_j = v_j / ||v_j||          (define q_j)
    for k = j+1 : n
        v_k = v_k - (q_j^T v_k) q_j      (remove projeções em q_j)
    end
end.
```

— // —

⟹ Cálculo de autovalores: para $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ não-singular com autovalores reais

* Método QR (de Francis)

* Quarteroni: 6.5

* Franco: 7.7

$$A^{(0)} = A$$

while (erro > tol)

$$[Q^{(k)}, R^{(k)}] = qr(A^{(k)})$$

$$A^{(k+1)} = R^{(k)} Q^{(k)}$$

$$\text{erro} = \max_{i>j} |a_{ij}^{(k+1)}|$$ ⟶ calcula enquanto os valores abaixo da diag. principal são maiores que a tolerância.

end

elementos abaixo da diag. principal.

$$A^{(k+1)} = RQ = Q^{-1}\underbrace{QR}_{A^{(k)}}Q = Q^{-1}A^{(k)}Q$$

logo $A^{(k+1)}$ é similar a $A^{(k)}$ (mesmos autovalores).

Como Q é matriz ortogonal:

$$\underbrace{A^{(k+1)}}_{\text{matriz triangular. (Dec. Schur)}} = Q^T A^{(k)} Q$$

obs: • se $|\lambda_i| = |\lambda_j|$, o método não converge.

• a taxa de convergência decai com a proximidade de $|\lambda_i|$ e $|\lambda_j|$.

• para A singular ou $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$: modificações no método QR.

---

* Método da potência: $\begin{cases} \text{Quarteroni : 6.2} \\ \text{Franco : 7.4} \end{cases}$

• se $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ com m autovetores L.I. (diagonalizável).

• se somente o maior autovalor é necessário

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_m|$$

Quociente de Rayleigh: $\mu(\vec{x}) = \dfrac{\vec{x}^T(A\vec{x})}{\|\vec{x}\|^2}$

se $\vec{x}$ é autovetor:

• $$\mu(\vec{x}) = \frac{\vec{x}^T(\lambda\vec{x})}{\|\vec{x}\|^2} = \frac{\lambda\,\vec{x}^T\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2} = \lambda\,\frac{\|\vec{x}\|^2}{\|\vec{x}\|^2} = \lambda.$$

• $\vec{y} = \dfrac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$ também é autovetor

$$A\vec{y} = \lambda\vec{y} \qquad \vec{y}^T(A\vec{y}) = \lambda\,\vec{y}^T\vec{y}$$

$$\lambda = \vec{y}^T(A\vec{y})$$

• se A é não-singular, $\lambda_i \neq 0$ e $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ $\quad AA^{-1}\vec{x} = \lambda A^{-1}\vec{x}$

$A^{-1}\vec{x} = 1/\lambda\,\vec{x}$

algoritmo: $\vec{x}^{(0)}$ = chute inicial

iterações em K

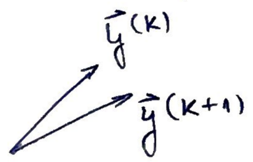
$$\begin{cases} \vec{y}^{(K)} = \dfrac{\vec{x}^{(K)}}{\|\vec{x}^{(K)}\|} & \text{(normaliza o vetor)} \\ \lambda^{(K)} = \vec{y}^{(K)T}(A\vec{y}^{(K)}) & \text{(autovalor correspondente)} \\ \vec{x}^{(K+1)} = A\vec{y}^{(K)} & \text{(novo vetor é a transf. linear do vetor anterior).} \end{cases}$$

para $K \to \infty$:

$$\begin{cases} \lambda^{(K)} \to \text{maior autovalor em módulo} \\ \vec{y}^{(K)} \to \text{autovetor correspondente} \end{cases}$$

- ao multiplicar um vetor $\vec{x}$ normalizado por A à esquerda (transformar $\vec{x}$), nos aproximamos do autovetor de maior autovalor em módulo $\to$ potências de A.

- critério de parada:
  - $| \lambda^{(K+1)} - \lambda^{(K)} | < \varepsilon$
  - $\left| |\vec{y}^{(K+1)T} \vec{y}^{(K)}| - 1 \right| < \varepsilon$



* Método da potência inversa:

- se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ com n autovetores L.I. e não-singular
- se somente o menor autovalor é necessário.

$$\lambda_i(A^{-1}) = \frac{1}{\lambda_i(A)} \to$$ menor autovalor de A é o inverso no maior autovalor de A^{-1}.

algoritmo: $\vec{x}^{(0)}$ = chute inicial $B = inv(A)$

$$\vec{y}^{(k)} = \frac{\vec{x}^{(k)}}{\|\vec{x}^{(k)}\|}$$

$$\lambda^{(k)} = \vec{y}^{(k)T}\,(\underbrace{A^{-1}}_{B}\vec{y}^{(k)})$$

$$\vec{x}^{(k+1)} = \underbrace{A^{-1}}_{B}\,\vec{y}^{(k)} \rightarrow \underbrace{A\vec{x}^{(k+1)} = \vec{y}^{(k)}}$$

solução de um sistema de eq. linear. K vezes $\Rightarrow$ decomposição LU.

para $K \to \infty$ $\begin{cases} 1/\lambda^{(k)} \to \text{menor autovalor em módulo} \\ \vec{y}^{(k)} \to \text{autovetor correspondente.} \end{cases}$

* Método da potência com shift (deslocamento):

autovalores $\begin{cases} A : \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} \\ (A + \alpha I) : \{\lambda_1 + \alpha, \lambda_2 + \alpha, \ldots, \lambda_n + \alpha\} \end{cases}$

se $B = (A - \alpha I)^{-1}$ $\quad \gamma_j = \dfrac{1}{\lambda_j - \alpha}$ são autovalores de B.

logo, se α está próximo de λ_j, γ_j está próximo do maior autovalor de B.

$\alpha \Rightarrow$ deslocamento.

para achar o autovalor mais próximo de α, aplica o método das Potências em $B = (A - \alpha I)^{-1}$. $\quad \lambda = \dfrac{1}{\gamma} + \alpha$

* Convergência do método da potência:

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ com n autovetores L.I. (diagonalizável) $(\vec{v}_i)$
- podemos usar os autovetores como base e escrever qualquer $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ como:

$$A\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$$

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n$$

$$A\vec{x} = \alpha_1 \underbrace{A\vec{v}_1}_{\lambda_1 \vec{v}_1} + \alpha_2 \underbrace{A\vec{v}_2}_{\lambda_2 \vec{v}_2} + \dots + \alpha_n \underbrace{A\vec{v}_n}_{\lambda_n \vec{v}_n}$$

$$A\vec{x} = \alpha_1 \lambda_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n \vec{v}_n$$

similarmente

$$A^K \vec{x} = \alpha_1 \lambda_1^k \vec{v}_1 + \alpha_2 \lambda_2^k \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n^k \vec{v}_n$$

$$= \lambda_1^k \left(\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k \vec{v}_2 + \dots + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^K \vec{v}_n \right.$$

se $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$

$$\lim_{K \to \infty} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k \to 0 \quad , \ i \neq 1$$

$$A^K \vec{x} = \lambda_1 \alpha_1 \vec{v}_1$$

$\vec{x} = \alpha_1 \vec{v}_1$ é autovetor do maior autovalor λ_1.