LISTA 2 – Oscilador harmônico, oscilações amortecidas e forçadas, ondas e som

ENTREGA INDIVIDUAL PARA OS TRABALHOS EM GRUPO

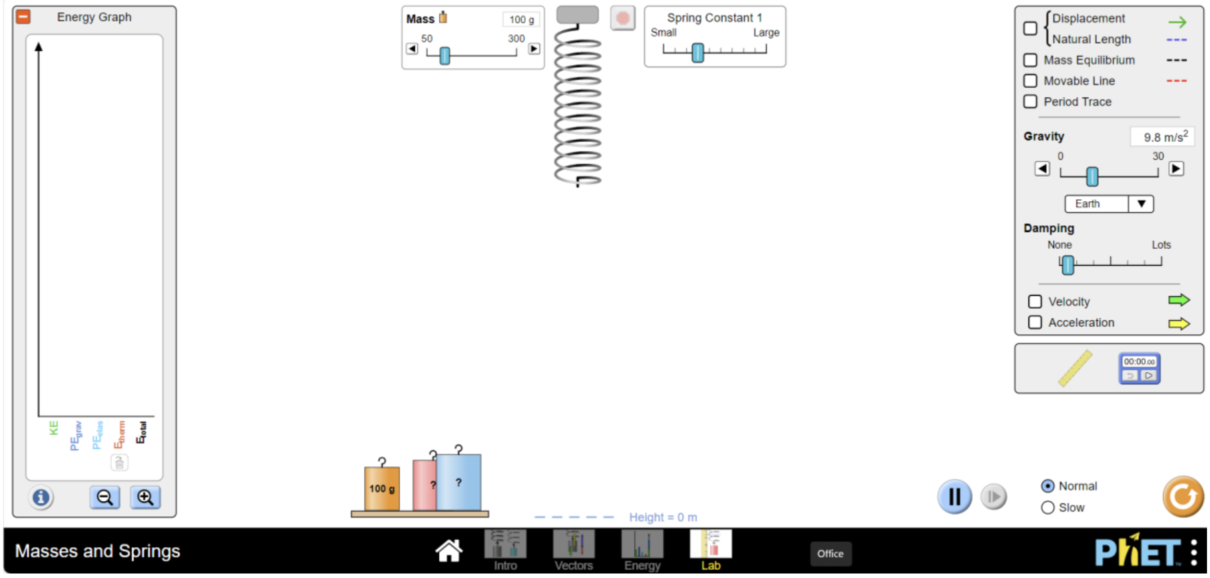
PRAZO: 05/05 – 23:59

EXPERIMENTAÇÃO INDIVIDUAL:

1. ***EXPERIMENTO VIRTUAL - OSCILADOR***

Acesse o site:

https://phet.colorado.edu/sims/html/masses-and-springs/latest/masses-and-springs_all.html

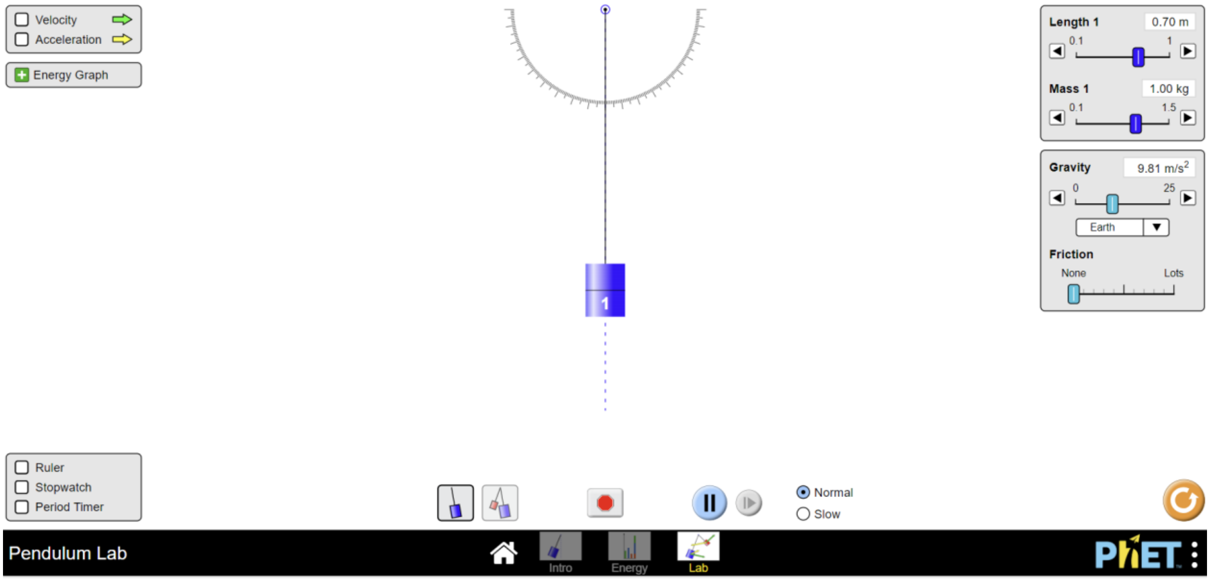


- Escolha a **massa** como sendo os 3 primeiros números de seu CPF. Considere uma constante de mola intermediária
- Caso 1: Sem amortecimento (damping) – Determine a gravidade do Planeta X (Em Gravity selecione “Planet X”)
- Caso 2: Mantenha os parâmetros anteriores (massa, constante de mola e gravidade) e ligue o amortecimento i) (intermediário) e ii) intenso (Lots). Descreva os efeitos em termos das energias e oscilações para essas situações.

2. *EXPERIMENTO VIRTUAL – PÊNDULO*

Acesso o site:

https://phet.colorado.edu/sims/html/pendulum-lab/latest/pendulum-lab_all.html



Escolha a massa em 1 Kg e altere o comprimento 1 (length 1) como sendo o ultimo digito de seu CPF dividido por 10. Se o ultimo digito for 0, considere o comprimento igual a 0.60.

Caso 1: Sem atrito (Friction) – Determine a gravidade do Planeta X (Em Gravity selecione “Planet X”

Caso 2: Mantenha os parâmetros e introduza o atrito. Determine o tempo necessário para o pêndulo parar de oscilar para atritos intermediários e intenso (Lots). Comente sobre os efeitos nas energias.

3. MODELAGEM NUMÉRICA:

Objetivos:

i) Aplicar o método de Euler para resolver numericamente a equação diferencial ordinária de um pêndulo.
ii) Simular e visualizar o comportamento de diferentes tipos de pêndulos:
  - Pêndulo simples
  - Pêndulo amortecido
  - Pêndulo forçado
  - Pêndulo amortecido e forçado
iii) Analisar os diferentes regimes de amortecimento (crítico, sub-crítico, super-crítico).

Parte 1: Teoria

1. **Pêndulo Simples:**
  - Equação: \(\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0\)

2. **Pêndulo Amortecido:**
  - Equação: \(\frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0\)
  - Discutir os casos:
    - Amortecimento Crítico
    - Amortecimento Sub-crítico
    - Amortecimento Super-crítico

3. **Pêndulo Forçado:**
  - Equação: \(\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = A \cos(\omega t)\)

4. **Pêndulo Amortecido e Forçado:**
  - Equação: \(\frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = A \cos(\omega t)\)

Parte 2: Método de Euler

- Explicar o método de Euler para resolver EDOs numericamente.
- Transformar as EDOs de segunda ordem em sistemas de primeira ordem.

Parte 3: Implementação em Python

- Criar um script em Python que implemente o método de Euler para cada tipo de pêndulo.
- Plotar os resultados para diferentes parâmetros (comprimento do pêndulo, coeficiente de amortecimento, amplitude e frequência da força externa).

Parte 4: Análise e Conclusão

- Comparar os comportamentos observados nas simulações com a teoria.
- Discutir a eficácia do método de Euler e possíveis melhorias.

Código de Exemplo em Python:

Aqui está um esqueleto básico que os alunos podem usar como ponto de partida para o código:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def pendulum(theta0, omega0, t, dt, g, l, b=0, A=0, omega_f=0):
    theta, omega = theta0, omega0
    history = [(theta, omega)]
    for _ in np.arange(0, t, dt):
        dtheta_dt = omega
        domega_dt = - (g / l) * np.sin(theta) - b * omega + A * np.cos(omega_f * t)
        theta += dtheta_dt * dt
        omega += domega_dt * dt
        history.append((theta, omega))
    return history

# Parâmetros
g = 9.81  # aceleração da gravidade
l = 1.0   # comprimento do pêndulo
dt = 0.01 # intervalo de tempo
t = 10    # tempo total de simulação

# Simulações
history_simple = pendulum(np.pi/4, 0, t, dt, g, l)
history_damped = pendulum(np.pi/4, 0, t, dt, g, l, b=0.1)
history_forced = pendulum(np.pi/4, 0, t, dt, g, l, A=0.1, omega_f=2)

# Plotar resultados
plt.figure(figsize=(12, 8))
for i, history in enumerate([history_simple, history_damped, history_forced]):
    thetas,

 omegas = zip(*history)
    plt.subplot(3, 1, i+1)
    plt.plot(thetas)
    plt.title(['Pêndulo Simples', 'Pêndulo Amortecido', 'Pêndulo Forçado'][i])
plt.tight_layout()
plt.show()
```

4. DEMONSTRAÇÕES EXPERIMENTAIS EM GRUPO:

SUBMETA UM RELATÓRIO DAS DEMONSTRAÇÕES REALIZADAS PELO GRUPO SOBRE:

1) Sistema Massa-mola
2) Demonstração experimental envolvendo as oscilações amortecidas

DICA: Inclua no relatório: introdução, a metodologia e instrumentos utilizados, os dados obtidos, a análise e gráficos, discussão dos resultados, relato das dificuldades e conclusões.

5. EXERCÍCIOS SUGERIDOS E PARA ENTREGA (em vermelho)

CAPÍTULO 3:

Problemas: 3.9, 3.13, 3.18

CAPÍTULO 4:

Problemas: 4.7, 4.9, 4.17

CAPÍTULO 5:

Problemas: 5.4, 5.6, 5.8

CAPÍTULO 6:

Problemas: 6.1, 6.5, 6.10

PROBLEMAS DO CAPÍTULO 3

1. Um bloco de massa M, capaz de deslizar com atrito desprezível sobre um trilho de ar horizontal, está preso a uma extremidade do trilho por uma mola de massa desprezível e constante elástica k, inicialmente relaxada. Uma bolinha de chiclete de massa m, lançada em direção ao bloco com velocidade horizontal v, atinge-o no instante $t = 0$ e fica grudada nele (Fig. P.1). Ache a expressão do deslocamento x do sistema para $t > 0$.

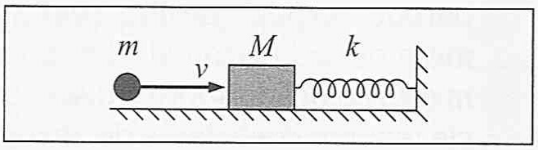


Figura P.1

2. Uma partícula de massa m está suspensa do teto por uma mola de constante elástica k e comprimento relaxado l_0, cuja massa é desprezível. A partícula é solta em repouso, com a mola relaxada. Tomando o eixo Oz orientado verticalmente para baixo, com origem no teto, calcule a posição z da partícula em função do tempo.

3. Duas partículas 1 e 2 de mesma massa m estão presas por molas de constante elástica k, comprimento relaxado l_0 e massa desprezível, a paredes verticais opostas, separadas de $2l_0$; as massas podem deslizar sem atrito sobre uma superfície horizontal (Fig. P.2). Tem-se $m = 10\ g$ e $k = 100$ N/m. No instante $t = 0$, a partícula 1 é deslocada de 1 cm para a esquerda e 2 de 1 cm para a direita, comunicando-se a elas velocidades de magnitude $\sqrt{3}$ m/s, para a esquerda (partícula 1) e para a direita (partícula 2). (a) Escreva as expressões dos deslocamentos x_1 e x_2 das duas partículas para $t > 0$. (b) As partículas irão colidir uma com a outra? Em que instante? (c) Qual a energia total do sistema?

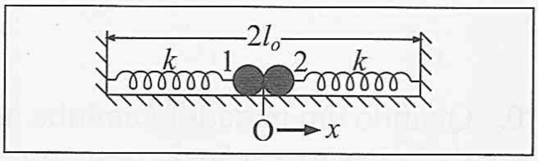


Figura P.2

4. Uma conta de massa m enfiada num aro vertical fixo de raio r, no qual desliza sem atrito, desloca-se em torno do ponto mais baixo, de tal forma que o ângulo θ (Fig. P.3) permanece pequeno. Mostre que o movimento é harmônico simples e calcule o período.

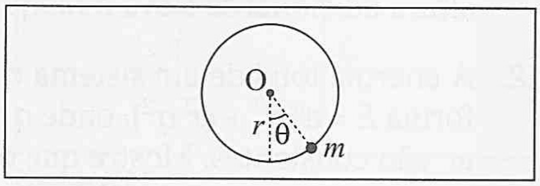


Figura P.3

5. Uma bola de massa m de massa fresca de pão cai de uma altura h sobre o prato de uma balança de mola e fica grudada nele (1, Cap. 6, Problema 6). A constante da mola é k, e as massas da mola e do prato podem ser desprezadas. (a) Qual é a amplitude de oscilação do prato? (b) Qual é a energia total de oscilação?

6. Uma placa circular homogênea de raio R e massa M é suspensa por um fio de módulo de torção K de duas maneiras diferentes: (a) Pelo centro C da placa, ficando ela num plano horizontal; (b) Por um ponto O da periferia, com a placa vertical. Calcule os períodos τ_a e τ_b das pequenas oscilações de torção, respectivamente nos casos (a) e (b) (Fig. P.4).

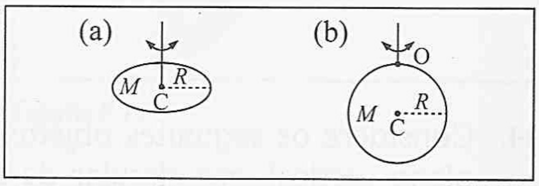


Figura P.4

7. Um pêndulo balístico de madeira, de massa igual a 10 kg, suspenso por um fio de 1 m de comprimento, é atingido no instante $t = 0$ por uma bala de 10 g, viajando à velocidade de 300 m/s, que fica encravada nele. Ache o ângulo θ (em rad) entre o fio e a vertical como função de t.

8. Um disco de massa M, preso por uma mola de constante elástica k e massa desprezível a uma parede vertical, desliza sem atrito sobre uma mesa de ar horizontal. Um bloquinho de massa m está colocado sobre o disco, com cuja superfície tem um coeficiente de atrito estático μ_e. Qual é a amplitude máxima de oscilação do disco para que o bloquinho não escorregue sobre ele?

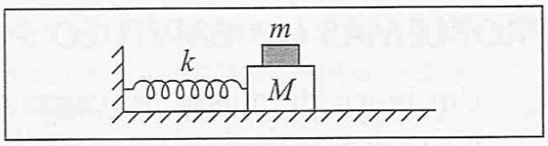


Figura P.5

9. Um densímetro (Cap. 1, Probl. 11), flutuando em equilíbrio na água, tem um volume V_0 submerso (Fig. P.6); a área da secção transversal da porção cilíndrica é A. Empurrando-o verticalmente para baixo, o densímetro entra em pequenas oscilações na direção vertical. Calcule a freqüência angular de oscilação.

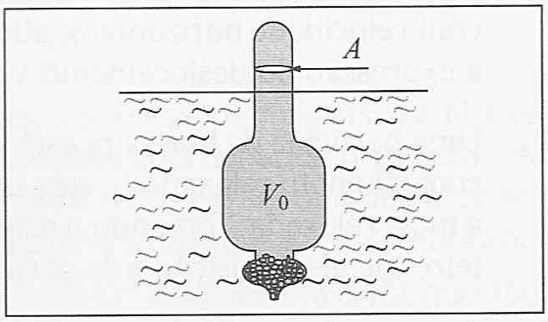


Figura P.6

10. Quando um nadador caminha até a extremidade de um trampolim horizontal, ele desce de 5 cm sob a ação do peso, no equilíbrio. Desprezando a massa do trampolim, calcule a sua freqüência angular de oscilação em torno do equilíbrio, com o nadador permanecendo na extremidade.

11. Um tremor de terra coloca em vibração no sentido vertical, com freqüência angular $\omega = 20\ s^{-1}$ e amplitude de 4 cm, uma plataforma horizontal, sobre a qual está colocado um bloquinho de madeira. A plataforma move-se inicialmente para cima. (a) De que altura terá subido a plataforma no momento em que o bloquinho se desprende dela? (b) De que altura adicional se eleva o bloquinho depois que se separou da plataforma?

12. A energia total de um sistema conservativo na vizinhança de um equilíbrio estável é da forma $E = a\,(\dot{q}^2 + \omega^2 q^2)$, onde q (deslocamento, ângulo, ...) é o desvio do equilíbrio e a e ω são constantes. Mostre que o sistema oscila com freqüência angular ω.

13. Uma bolinha homogênea de massa m e raio r rola sem deslizar sobre uma calha cilíndrica de raio $R \gg r$, na vizinhança do fundo, ou seja, com $\theta \ll 1$ (Fig. P.7). Mostre que o movimento é harmônico simples e calcule a freqüência angular ω.

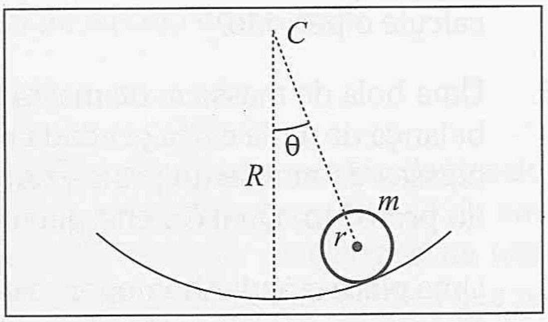


Figura P.7

14. Considere os seguintes objetos oscilando num plano vertical: aro circular de diâmetro l, suspenso de O_a [Fig. P.8(a)] e placa circular homogênea de diâmetro l, suspensa de O_b [Fig. P.8(b)]. Compare os respectivos períodos τ_a e τ_b com o período de oscilação τ de um pêndulo simples de comprimento l.

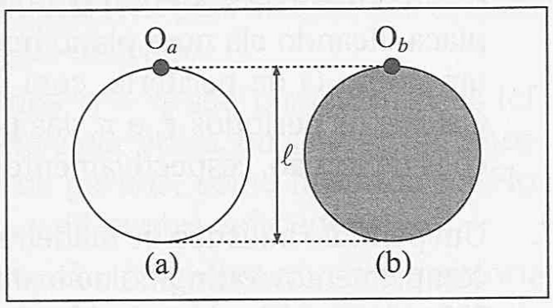


Figura P.8

15. Um pêndulo físico é formado por uma barra delgada homogênea de comprimento l, suspensa por um ponto à distância s ($< l/2$) de seu centro, oscilando num plano vertical. Para que valor de s o período de oscilação é mínimo? Quanto vale então?

16. Um fio de arame de comprimento $2l$ é dobrado ao meio, formando um ângulo de 60°, e é suspenso pelo vértice O (Fig. P.9), oscilando num plano vertical. Calcule o período τ de pequenas oscilações em torno da posição de equilíbrio.

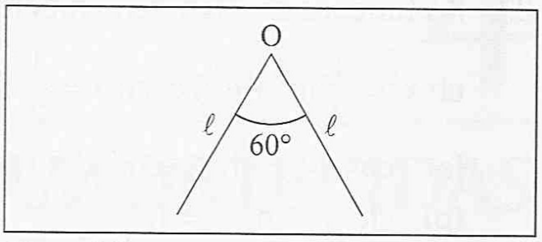


Figura P.9

17. Um oscilador harmônico começa a oscilar em $t = 0$. Após 1/4 de período, sua energia cinética é 3 vezes maior que a energia potencial. Qual é a fase inicial? (Dê todos os valores possíveis).

18. Com um bloco de massa m e duas molas, de constantes elásticas k_1 e k_2, montam-se os dois arranjos indicados nas Figs. P.10(a) e (b). Calcule as respectivas freqüências angulares ω_a e ω_b de pequenas oscilações verticais em torno do equilíbrio.

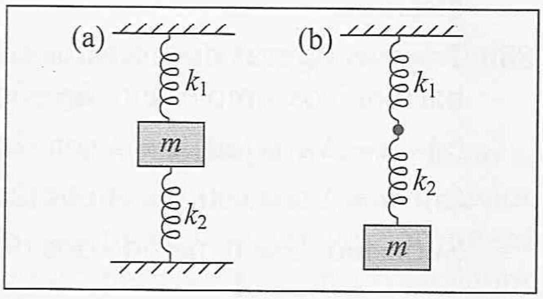


Figura P.10

19. O pêndulo da Fig. P.11, formado por uma barra de massa desprezível e comprimento l com uma massa m suspensa, está ligado em seu ponto médio a uma mola horizontal de massa desprezível e constante elástica k, com a outra extremidade fixa e relaxada quando o pêndulo está em equilíbrio na vertical. Calcule a freqüência angular ω de pequenas oscilações no plano vertical.

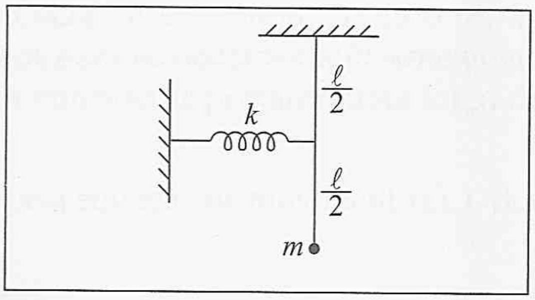


Figura P.11

20. Um tubo cilíndrico cuja secção transversal tem área A está dobrado em forma de V, com um ramo vertical e o outro formando um ângulo φ com a vertical, e contém uma massa M de um líquido de densidade ρ (Fig. P.12). Produz-se um pequeno desnível entre um ramo e o outro. Calcule a freqüência angular de oscilação da massa líquida.

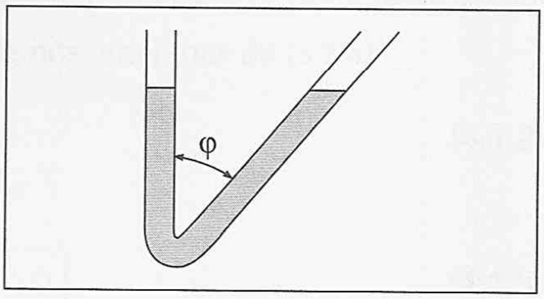


Figura P.12

21. A molécula de HCl é uma molécula iônica, que podemos considerar como resultante da interação entre os íons H^+ e Cl^-, com energia potencial de interação dada por $U(r) = -K(e^2/r) + B/r^{10}$, onde r é a distância entre os centros. O primeiro termo é a atração coulombiana ($k = 9 \times 10^9$ N.m^2/C^2, $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C), e o segundo representa uma interação repulsiva a curta distância ($B > 0$). A distância entre os centros na molécula é de 1,28 Å; uma unidade de massa atômica vale $1{,}66 \times 10^{-27}$ kg. (a) Calcule a "constante de mola efetiva" k da ligação. (b) Calcule a freqüência de vibração ν da molécula (clássica).

22. Use a fórmula de Euler (3.4.19) e as regras para cálculo de produto e potências de números complexos para calcular : (a) $\cos(a+b)$ e $\operatorname{sen}(a+b)$; (b) $\cos(3a)$ e $\operatorname{sen}(3a)$ em função de cos e sen de a e b.

23. As funções ch x (co-seno hiperbólico) e sh x (seno hiperbólico) são definidas por:

$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})$ e $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})$. Mostre que:

(a) $\cos(ix) = \operatorname{ch} x$; $\operatorname{sen}(ix) = i \operatorname{sh} x$;

(b) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$;

(c) $\operatorname{sh}(2x) = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$.

24. Ache o movimento resultante de dois movimentos harmônicos simples na mesma direção dados por: $x_1 = \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$, $x_2 = \operatorname{sen}(\omega t)$. Represente graficamente os respectivos vetores girantes.

25. Trace as figuras de Lissajous correspondentes à composição dos seguintes movimentos harmônicos simples em direções perpendiculares:

(a) $x = A\cos(\omega t)$, $y = A\operatorname{sen}(2\omega t)$

(b) $x = A\operatorname{sen}(\omega t)$, $y = A\cos(2\omega t)$

Sugestão: Use o método dos dois círculos de referência [Seç. 3.5 (c)].

é

$$\boxed{\omega_0^2 = 3T_0 / ma = 3\omega_0^2} \tag{4.6.33}$$

como no caso das oscilações longitudinais (4.6.26).

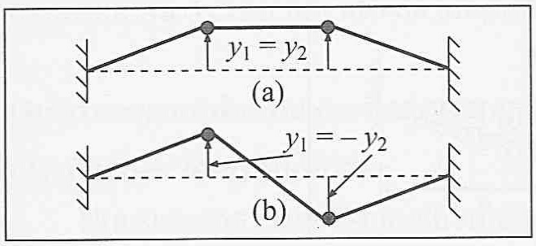


Figura 4.21 — *Modos normais*

Estes resultados sobre modos normais podem ser generalizados às *pequenas* oscilações em torno de equilíbrio estável de um sistema com um número qualquer de partículas acopladas. *Um sistema com N graus de liberdade tem N modos normais de vibração*, cada um deles associado a uma freqüência de oscilação *comum* de todas as partículas. *A solução geral é a superposição de todos os modos normais.*

Assim, para 2 partículas acopladas, cada uma podendo deslocar-se em 3 dimensões, há 6 graus de liberdade. Destes, 2 correspondem aos modos longitudinais da pg. 92 (direção x) e 4 aos modos transversais (2 na direção y, que acabamos de considerar, e 2 na direção z).

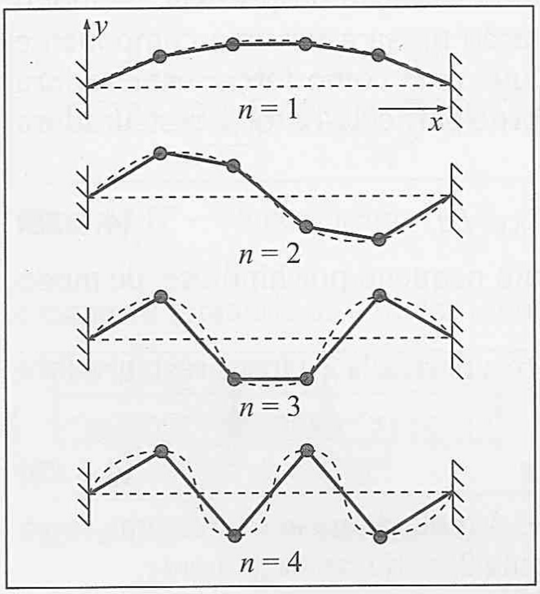


Figura 4.22 — *Modos transversais de 4 particulas*

A Fig. 4.22 ilustra os 4 modos de vibração transversal na direção y de um sistema de 4 partículas idênticas acopladas por molas também iguais, que generalizam os modos de 2 partículas considerados na pg. anterior. Os modos foram numerados ($n = 1, 2, 3$ e 4) em ordem de freqüência crescente. Conforme vemos pelas (4.6.28) a (4.6.30), quanto maiores os ângulos formados pelas molas com o eixo horizontal, maior a força restauradora por unidade de deslocamento e massa, o que justifica a afirmação de que os modos da fig. ao lado estão ordenados segundo freqüências crescentes.

PROBLEMAS DO CAPÍTULO 4

1. Verifique que a (4.2.17) é solução da (4.1.2) para $\omega_0 = \gamma/2$, e que a (4.3.20) satisfaz a equação diferencial (4.3.4) e as condições iniciais (4.3.17).

2. Um oscilador harmônico amortecido tem um fator $Q = 10$. Partindo da posição de equilíbrio, é-lhe comunicada uma velocidade inicial de 5 m/s. Verifica-se que a energia total do oscilador diminui numa taxa, por segundo, igual a 4 vezes sua energia cinética instantânea. Calcule o deslocamento x do oscilador (em m) em função do tempo t (em s).

3. Seja r a razão entre dois máximos consecutivos do deslocamento de um oscilador livre fracamente amortecido ($\gamma \ll \omega_0$). O parâmetro $\delta = |\ln r|$ chama-se *decremento logarítmico*. (a) Relacione δ com a constante de amortecimento γ e com o período τ do oscilador. (b) Se n é o número de períodos necessário para que a amplitude de oscilação caia à metade do valor inicial, ache δ.

4. Um oscilador criticamente amortecido, partindo da posição de equilíbrio, recebe um impulso que lhe comunica uma velocidade inicial v_0. Verifica-se que ele passa por seu deslocamento máximo, igual a 3,68 m, após 1 segundo. (a) Qual é o valor de v_0? (b) Se o oscilador tivesse um deslocamento inicial $x_0 = 2$ m com a mesma velocidade inicial v_0, qual seria o valor de x no instante t?

5. Uma partícula de massa m move-se na direção z no interior de um fluido, cuja resistência de atrito é da forma $-\rho\dot{z}$ ou seja, é proporcional à velocidade ($\rho > 0$). A força peso é desprezível em confronto com a resistência de atrito durante o intervalo de tempo considerado. Dadas a posição inicial z_0 e a velocidade inicial v_0, ache $z\,(t)$.

6. Para pequenas partículas em queda livre na atmosfera, a resistência do ar é proporcional à velocidade, ou seja, orientando o eixo z verticalmente para baixo, é da forma $-\rho\dot{z}\,(\rho > 0)$. Considere a queda livre de uma tal partícula a partir de uma posição inicial z_0 e velocidade inicial v_0, levando em conta a força peso (ao contrário do Problema 5). Ache $z\,(t)$. *Sugestão*: Usando o método da Seção 4.3 (a), procure uma solução particular da equação diferencial de movimento, que é inomogênea. Para isto, leve em conta que, para tempos grandes, a partícula tende a cair com velocidade constante (por quê?), que se chama *velocidade terminal*.

7. Um oscilador não amortecido de massa m e freqüência própria ω_0 move-se sob a ação de uma força externa $F = F_0$ sen (ωt), partindo da posição de equilíbrio com velocidade inicial nula. Ache o deslocamento $x\,(t)$.

8. Um oscilador não amortecido de massa m e freqüência própria ω_0 move-se sob a ação de uma força externa $F = F_0 \exp(-\beta t)$, onde $\beta > 0$ é uma constante. Inicialmente, o oscilador encontra-se em repouso na posição de equilíbrio. Ache o deslocamento $x\,(t)$. *Sugestão*: Use o método da Seção 4.3 (a), procurando uma solução particular da equação diferencial inomogênea de comportamento análogo ao de F.

9. Um bloco cúbico de 10 cm de aresta e densidade 8 g/cm^3 está suspenso do teto por uma mola de constante elástica 40 N/m e comprimento relaxado de 0,5 m, e mergulhado dentro de um fluido viscoso de densidade 1,25 g/cm^3. Na situação considerada, a resistência do fluido é proporcional à velocidade, com coeficiente de proporcionalidade $\rho = 2$ N.s/m. Inicialmente em equilíbrio, o bloco é deslocado de 1 cm para baixo e solto a partir do repouso. Com origem no teto e eixo z vertical orientado para baixo (fig. P.1), determine a coordenada z da extremidade superior do bloco em função do tempo.

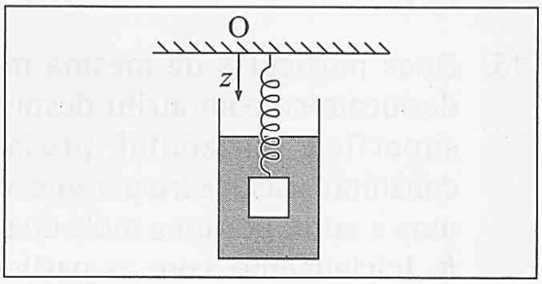


Figura P.1

10. Para um oscilador de massa m, freqüência livre ω_0 e constante de amortecimento γ, sujeito à força externa $F = F_0 \cos(\omega t)$, calcule: (a) O valor exato de ω para o qual a amplitude de oscilação estacionária A é máxima, e o valor máximo de A; (b) O valor exato de ω para o qual a velocidade tem amplitude ωA máxima, e o valor do máximo.

11. Uma pessoa está segurando uma extremidade A de uma mola de massa desprezível e constante elástica 80 N/m. Na outra extremidade B, há uma massa de 0,5 kg suspensa, inicialmente em equilíbrio. No instante $t = 0$, a pessoa começa a sacudir a extremidade A (fig. P.2), fazendo-a oscilar harmonicamente com amplitude de 5 cm e período de 1 s. (a) Calcule o deslocamento z da massa em relação à posição de equilíbrio, para $t > 0$. (b) Calcule a força total $F(t)$ exercida sobre a extremidade A para $t > 0$.

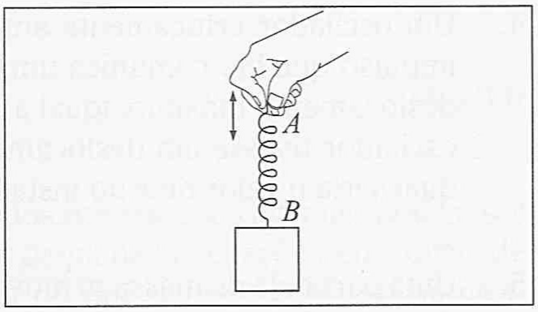


Figura P.2

12. Um bloco de 1 kg, ligado a uma parede vertical por uma mola de massa desprezível e constante elástica 100 N/m, inicialmente relaxada, pode deslocar-se sobre uma superfície horizontal com coeficiente de atrito (estático e cinético) $\mu = 0{,}25$. No instante $t = 0$, o bloco é deslocado de 24,5 cm para a direita e solto a partir do repouso. Descreva o movimento subseqüente. *Observação*: Como a força de atrito tem sinal oposto ao da velocidade, é preciso tratar separadamente cada semiperíodo de oscilação.

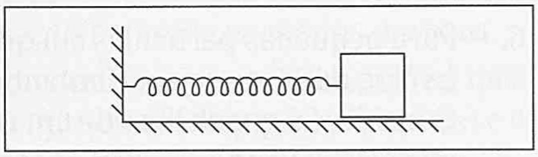


Figura P.3

13. Seja $x = a \cos(\omega t) + b \operatorname{sen}(\omega t)$ a solução estacionária para o movimento de um oscilador amortecido sob a ação da força $F = F_0 \cos(\omega t)$. Mostre que somente a componente em quadratura contribui para a potência média $\bar{P}$. Calcule $\bar{P}$.

14. Duas partículas de mesma massa, igual a 250 g, estão suspensas do teto por barras idênticas, de 0,5 m de comprimento e massa desprezível, e estão ligadas uma à outra por uma mola de constante elástica 25 N/m. No instante $t = 0$, a partícula 2 (fig. P.4) recebe um impulso que lhe transmite uma velocidade de 10 cm/s. Determine os deslocamentos $x_1(t)$ e $x_2(t)$ das posições de equilíbrio das duas partículas (em cm) para $t > 0$.

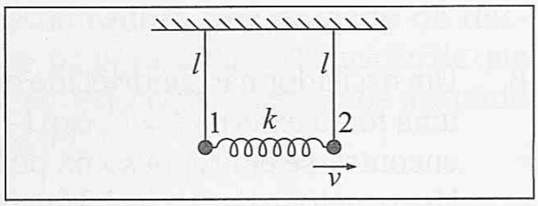


Figura P.4

15. Duas partículas de mesma massa m (fig. P.5) deslocam-se com atrito desprezível sobre uma superfície horizontal, presas por molas de constante elástica k a paredes verticais e ligadas uma à outra por uma mola de constante elástica K. Inicialmente, com as partículas em repouso na posição de equilíbrio, comunica-se uma velocidade v à partícula 2 através de um impulso. Ache os deslocamentos $x_1(t)$ e $x_2(t)$ das duas partículas das respectivas posições de equilíbrio, para $t > 0$.

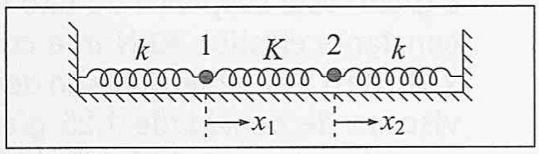


Figura P.5

16. Dois pêndulos idênticos, formados por partículas de massa m suspensas por barras de massa desprezível e comprimento l, estão ligados um ao outro por uma mola de massa desprezível e constante elástica k, inicialmente relaxada, com os pêndulos na posição vertical de equilíbrio (Fig. P.4). Aplica-se à partícula 2 uma força $F = F_0 \cos(\omega t)$. (a) Obtenha a solução estacionária para os deslocamentos $x_1(t)$ e $x_2(t)$ das duas partículas. (b) Trace gráficos representando o andamento das amplitudes de oscilação das duas partículas em função de ω.

17. Um modelo clássico para a molécula de CO_2 é constituído por duas partículas idênticas de massa M ligadas a uma partícula central de massa m por molas idênticas de constante elástica k e massa desprezível. Sejam x_1, x_2 e x_3 os deslocamentos das três partículas a partir das respectivas posições de equilíbrio (fig. P.6). (a) Escreva as equações de movimento para x_1, x_2 e x_3 e verifique que o centro de massa do sistema permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme. (b) Obtenha as equações de movimento para as coordenadas relativas, $x_2 - x_1 = \xi$ e $x_3 - x_2 = \eta$. (c) A partir de (b), calcule as freqüências angulares de oscilação associadas aos dois modos normais de vibração do sistema. Interprete fisicamente estes dois modos, caracterizando os tipos de oscilação das massas a eles associados. (d) Aplique este modelo à molécula de CO_2, calculando a *razão* entre as duas freqüências de modos normais de vibração para esta molécula. Tome as massas do carbono e oxigênio como 12 e 16, respectivamente, em unidades de massa atômica.

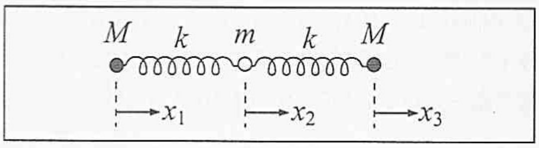


Figura P.6

18. Uma partícula de massa m está ligada por uma mola de constante elástica k e massa desprezível a outra partícula de mesma massa, suspensa do teto por urna mola idêntica à anterior (Fig. P.7). Inicialmente o sistema está em equilíbrio. Sejam z_1 e z_2 deslocamentos, a partir das respectivas posições de equilíbrio, das partículas 1 e 2, com o eixo dos z orientado verticalmente para baixo. (a) Escreva as equações de movimento para z_1 e z_2. (b) Obtenha os modos normais de oscilação vertical do sistema. Para isto, considere uma nova coordenada q, combinação linear de z_1 e z_2: $q = \alpha z_1 + \beta z_2$. Escreva a equação de movimento para q e procure determinar os coeficientes α e β de tal forma que esta equação para q se reduza à equação de movimento de um oscilador harmônico simples. Você obterá duas soluções, q_1 e q_2, que se chamam as *coordenadas normais* (Seção 4.6). Calcule as freqüências angulares de oscilação ω_1 e ω_2 associadas aos dois modos normais do sistema.

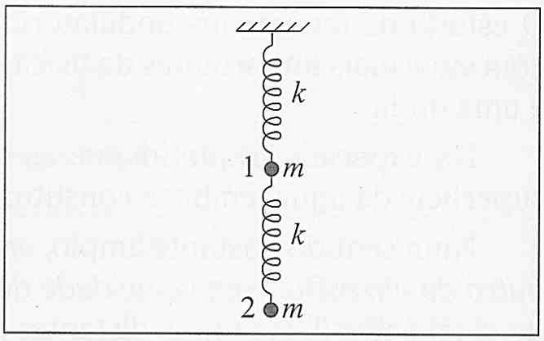


Figura P.7

PROBLEMAS DO CAPÍTULO 5

1. Uma corda uniforme, de 20 m de comprimento e massa de 2 kg, está esticada sob uma tensão de 10 N. Faz-se oscilar transversalmente uma extremidade da corda, com amplitude de 3 cm e freqüência de 5 oscilações por segundo. O deslocamento inicial da extremidade é de 1,5 cm para cima. (a) Ache a velocidade de propagação v e o comprimento de onda λ da onda progressiva gerada na corda. (b) Escreva, como função do tempo, o deslocamento transversal y de um ponto da corda situado à distância x da extremidade que se faz oscilar, após ser atingido pela onda e antes que ela chegue à outra extremidade. (c) Calcule a intensidade I da onda progressiva gerada.

2. A mesma corda descrita no Problema 1 está com uma extremidade amarrada num poste. A outra, inicialmente em repouso na posição de equilíbrio, é deslocada de 10 cm para cima, com velocidade uniforme, entre $t = 0$ e $t = 0{,}5$ s. A seguir, é deslocada para baixo, com a magnitude da velocidade reduzida à metade da anterior, entre $t = 0{,}5$ s e $t = 1{,}5$ s, quando retorna à posição de equilíbrio. (a) Desenhe a forma da corda no instante $t = 1{,}7$ s. (b) Desenhe a forma da corda no instante $t = 2{,}6$ s.

3. Mede-se a velocidade v de propagação de ondas transversais num fio com uma extremidade presa a uma parede, que é mantido esticado pelo peso de um bloco suspenso da outra extremidade através de uma polia. Depois (Fig. P.1), mergulha-se o bloco na água até os 2/3 da altura e verifica-se que a velocidade de propagação cai para 95,5% da anterior. Qual é a densidade do bloco em relação à água?

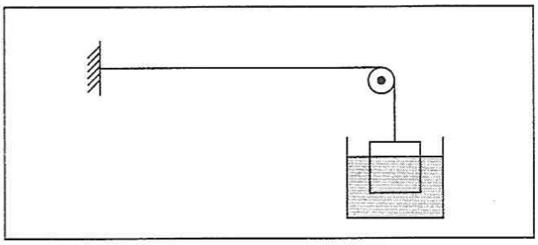


Figura P.1

4. (a) Mostre, diferenciando a expressão para a velocidade de propagação de ondas numa corda, que a variação percentual de velocidade $\Delta v/v$ produzida por uma variação percentual $\Delta T/T$ da tensão na corda é dada por $\Delta v / v = \frac{1}{2} \Delta T / T$. (b) Um afinador de pianos faz soar a nota lá de um diapasão, de freqüência $\nu = 440$ Hz, para compará-la com a nota lá da escala média de um piano. Com ambas soando simultaneamente, ele ouve batimentos cuja intensidade máxima se repete a intervalos de 0,5 s. Que ajuste percentual ele deve fazer na tensão da corda do piano para afiná-la?

5. Desprezando efeitos de tensão superficial, pode-se mostrar que ondas na superfície da água, com comprimento de onda λ muito menor que a profundidade da água, propagam-se com velocidade de fase v_φ dada por $v_\varphi = \sqrt{(g\lambda)/(2\pi)}$ onde g é a aceleração da gravidade.

   Mostre que a velocidade de grupo correspondente é $v_g = \frac{1}{2} v_\varphi$.

6. Duas ondas transversais de mesma freqüência $\nu = 100\ s^{-1}$ são produzidas num fio de aço de 1 mm de diâmetro e densidade 8 g/cm^3, submetido a uma tensão $T = 500$ N. As ondas são dadas por

$$y_1 = A\cos\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{6}\right),\quad y_2 = 2A\,\text{sen}\,(\omega t - kx)$$

   onde $A = 2$ mm. (a) Escreva a expressão da onda harmônica progressiva resultante da superposição dessas duas ondas. (b) Calcule a intensidade da resultante. (c) Se fizemos variar a diferença de fase entre as duas ondas, qual é a razão entre os valores máximo e mínimo possíveis da intensidade da resultante?

7. A corda mi de um violino tem uma densidade linear de 0,5 g/m e está sujeita a uma tensão de 80 N, afinada para uma freqüência $v = 660$ Hz. (a) Qual é o comprimento da corda? (b) Para tocar a nota lá da escala seguinte, de freqüência 880 Hz, prende-se a corda com um dedo, de forma a utilizar apenas uma fração f de seu comprimento. Qual é o valor de f?

8. Uma corda de comprimento l está distendida, com uma extremidade presa a um suporte e a outra extremidade livre. (a) Ache as freqüências v_n dos modos normais de vibração da corda. (b) Desenhe a forma da corda associada aos três modos de vibração mais baixos (em ordem de freqüência crescente). A velocidade de ondas na corda é v.

9. Considere novamente a corda do problema 8, com um extremo fixo e outro livre e de comprimento l. No instante $t = 0$, um pequeno pulso de forma triangular está-se propagando para a direita na corda. Depois de quanto tempo a corda voltará à configuração inicial?

10. Uma corda vibrante de comprimento l, presa em ambas as extremidades, está vibrando em seu n-ésimo modo normal, com deslocamento transversal dado pela (5.7.10). Calcule a energia total de oscilação da corda. *Sugestão*: Considere um instante em que a corda esteja passando pela posição de equilíbrio, de modo que sua energia total de oscilação esteja em forma puramente cinética. Calcule a densidade linear de energia cinética e integre sobre toda a corda.

11. Duas cordas muito longas, bem esticadas, de densidades lineares diferentes μ_1 e μ_2, estão ligadas uma à outra. Toma-se a posição de equilíbrio como eixo dos x e a origem O no ponto de junção, sendo y o deslocamento transversal da corda (Fig. P.2). Uma onda harmônica progressiva, $y_i = A_1 \cos(k_1 x - \omega t)$, viajando na corda 1 ($x < 0$), incide sobre o ponto, de junção, fazendo-o oscilar com freqüência angular ω. Isto produz na corda 2 ($x > 0$) uma onda progressiva de mesma freqüência, $y_t = A_2 \cos(k_2 x - \omega t)$ (*onda transmitida*), e dá origem na corda 1, a uma onda que viaja em sentido contrário, $y_r = B_1 \cos(k_1 x + \omega t)$ (*onda refletida*). Dada a onda incidente y_i, de amplitude A_1, desejam-se obter a *amplitude de reflexão* $\rho = B_1/A_1$, e a *amplitude de transmissão* $\tau = A_2/A_1$. (a) Dada a tensão T da corda, calcule as velocidades de propagação v_1 e v_2 nas cordas 1 e 2, bem como os respectivos números de onda k_1 e k_2. O deslocamento total na corda 1 é $y_i + y_r$, e na corda 2 é y_t. (b) Mostre que, no ponto de junção $x = 0$, deve-se ter $y_i + y_r = y_t$. (c) Aplicando a 3.ª lei de Newton ao ponto de junção $x = 0$, mostre que, nesse ponto, deve-se ter também $(\partial/\partial x)(y_i + y_r) = (\partial/\partial x)\, y_t$. (d) A partir de (b) e (c), calcule as amplitudes de reflexão e transmissão ρ e τ em função das velocidades v_1 e v_2. Discuta o sinal de ρ.

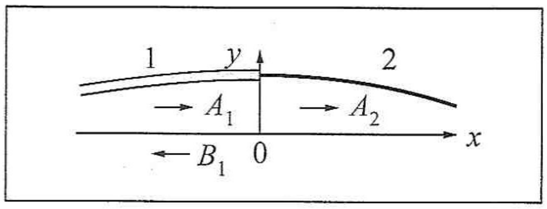


Figura P.2

12. No problema 11, a *refletividade* r da junção é definida como a razão da intensidade da onda refletida para a intensidade da onda incidente, e a *transmissividade* t como a razão da intensidade transmitida para a incidente. (a) Calcule r e t. (b) Mostre que $r + t = 1$, e interprete esse resultado.

$$t_n = n\Delta t + \frac{r_n}{V} \tag{6.9.13}$$

onde, pela Fig. 6.33,

$$r_n \approx r_0 - \overline{F_0A} = r_0 - \underbrace{\overline{F_0F_n}}_{V\cdot n\Delta t}\cos\theta$$

de modo que, na (6.9.13),

$$t_n = n\Delta t + \underbrace{\frac{r_0}{V}}_{t_0} - n\Delta t\frac{V}{v}\cos\theta$$

ou seja

$$\boxed{t_n - t_0 = n\Delta t\left(1 - \frac{V}{v}\cos\theta\right)} \tag{6.9.14}$$

No caso subsônico $V < v$, a (6.9.14) mostra que as frentes de onda chegam ao ponto de observação P na mesma ordem temporal de sucessão em que são emitidas, mas isto não é necessariamente válido para $V > v$. Em particular, neste caso supersônico, existe um ângulo θ_0 para o qual *todas as frentes de onda chegam a* P *no mesmo instante* t_0: pela (6.9.14), θ_0 é dado por

$$\boxed{\cos\theta_0 = \frac{v}{V} = \text{sen}\,\alpha \quad \{\ \theta_0 = \frac{\pi}{2} - \alpha} \tag{6.9.15}$$

onde usamos a (6.9.12).

Nesta direção, perpendicular à superfície do cone de Mach, a acumulação das frentes de onda que chegam simultaneamente a P produz uma *onda de choque*. Este é um efeito bem conhecido no caso de um avião que atinge velocidade supersônica; na Fig. 6.33, F_0F representaria a trajetória do avião e F_0P o percurso da onda de choque que atinge o ponto de observação P. O análogo bidimensional do cone de Mach, nas ondas sobre a superfície da água, é a *esteira* deixada por um barco de velocidade maior que a das ondas.

PROBLEMAS DO CAPÍTULO 6

1. Uma experiência de demonstração divertida consiste em mudar a tonalidade da voz enchendo a boca de gás hélio: uma voz grave transforma-se em aguda (cuidado: não procure fazer isso por sua conta! — inalar hélio é perigoso, podendo levar à sufocação). Para explicar o efeito, admita que os comprimentos de onda associados à voz são determinados pelas dimensões das cordas vocais, laringe e boca, estas funcionando como cavidades ressonantes, de modo que a variação de tonalidade seria devida unicamente à variação da velocidade do som (embora isto não seja bem correto). (a) Calcule a velocidade do som no hélio a 20°C. É um gás monoatômico, de massa atômica ≈ 4 g/mol, com $\gamma \approx 1{,}66$. A constante universal dos gases R vale 8,314 J/mol K. (b) Explique o efeito, calculando a razão entre as freqüências do som no hélio e no ar para o mesmo comprimento de onda.
2. Um alto-falante de um aparelho de som emite 1 W de potência sonora na freqüência $\nu = 100$ Hz. Admitindo que o som se distribui uniformemente em todas as direções, deter-

mine, num ponto situado a 2 m de distância do alto-falante: (a) o nível sonoro em db; (b) a amplitude de pressão; (c) a amplitude de deslocamento. Tome a densidade do ar como 1,3 kg/m^3 e a velocidade do som como 340 m/s (d). A que distância do alto-falante o nível sonoro estaria 10 db abaixo do calculado em (a)?

3. Que comprimento deve ter um tubo de órgão aberto num extremo e fechado no outro para produzir, como tom fundamental, a nota dó da escala média, ν = 262 Hz, a 15°C, quando a velocidade do som no ar é de 341 m/s? Qual é a variação de freqüência $\Delta\nu$ quando a temperatura sobe para 25°C?

4. Na experiência da pág. 136, o diapasão emite a nota lá de 440 Hz. À medida que vai baixando o nível da água no tubo, a 1.ª ressonância aparece quando a altura da coluna de ar é de 17,5 cm e a 2.ª quando é de 55,5 cm. (a) Qual é o comprimento de onda? (b) Qual é o valor da correção terminal (pág. 135)? (c) Estime o diâmetro do tubo. (d) Qual é a velocidade do som no tubo?

5. O *tubo de Kundt*, que costumava ser empregado para medir a velocidade do som em gases, é um tubo de vidro que contém o gás, fechado numa extremidade por uma tampa M que se faz vibrar com uma freqüência ν conhecida (por exemplo, acoplando-a a um alto-falante) e na outra por um pistão P que se faz deslizar, variando o comprimento do tubo. O tubo contém um pó fino (serragem, por exemplo). Ajusta-se o comprimento do tubo com o auxilio do pistão até que ele entre em ressonância com a freqüência ν, o que se nota pelo reforço da intensidade sonora emitida.

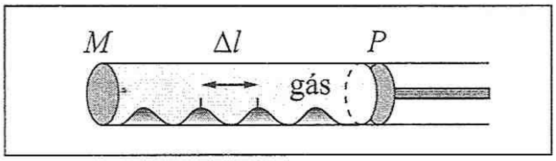


Figura P.1

Observa-se então que o pó fica acumulado em montículos igualmente espaçados, de espaçamento Δl (Fig. P.1), que se pode medir. (a) A que correspondem as posições dos topos dos montículos? (b) Qual é a relação entre Δl, ν e a velocidade do som no gás? (c) Com o tubo cheio de CO_2 a 20°C e ν = 880 Hz , o espaçamento médio medido é de 15,2 cm. Qual é a velocidade do som no CO_2 a 20°C?

6. (a) Mostre que, para uma onda sonora harmônica de freqüência angular ω, em três dimensões, num fluido cuja densidade de equilíbrio é ρ_0, o deslocamento $\mathbf{u}$ (que neste caso é um vetor!) está relacionado com a pressão p por: grad $p = \rho_0\, \omega^2\, \mathbf{u}$. (b) Considere uma onda sonora harmônica que se propaga no semi-espaço $x > 0$, com $p = p\,(x, y, z, t)$, e suponha que o plano $x = 0$ é uma parede fixa, rígida. Mostre, utilizando o resultado da parte (a), que p tem de satisfazer a condição de contorno $\partial p/\partial x = 0$ para $x = 0$, qualquer que seja t. Em particular, isto vale na extremidade fechada de um tubo de órgão (pg. 137).

7. Uma onda sonora plana monocromática de pressão dada por [cf. (6.5.7)]

$$p_i = \wp \cos(-k_x x + k_y y - \omega t)$$

onde $k^2 = k_x^2 + k_y^2 = \omega^2/v^2$ (v = velocidade do som), incide com ângulo de incidência θ_1, sobre o plano $x = 0$, ocupado por uma parede rígida (Fig. P.2), dando origem à *onda refletida*, de pressão dada por

$$p_r = \wp' \cos(k_x x + k_y y - \omega t)$$

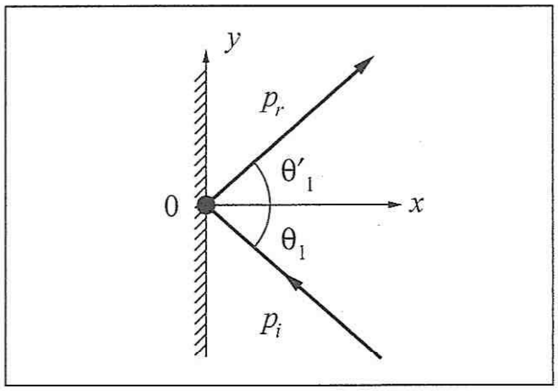


Figura P.2

associada ao ângulo de reflexão θ_1' (Fig.). (a) Verifique que $k_x = k \cos \theta_1$, $k_y = k$ sen θ_1. (b) Aplique a condição de contorno do problema 6 à onda total $p = p_i + p_r$, e determine ρ' em função de ρ, usando (b), e interprete o resultado. Mostre que, no caso particular em que $k_y = 0$, ele se reduz ao que foi encontrado na pag. 135 para a reflexão na extremidade fechada de um tubo de órgão.

8. Uma lente esférica plano-convexa delgada é formada por um meio onde o som se propaga com velocidade v_2, limitado por uma face plana e outra esférica de raio de curvatura R; o raio $h = \overline{I'A}$ da face plana (Fig. P.3) é suposto $<< R$. No meio externo à lente, o som se propaga com velocidade v_1, com $v_2 = v_1/n$, onde n é o índice de refração relativo. Supomos $n > 1$. Nestas condições, uma onda plana incidente perpendicularmente sobre a face plana é *focalizada* pela lente em seu foco F. A distância $f = \overline{OF}$ do foco à face curva chama-se *distância focal* (Fig.), e $\overline{AO} = e$ é a espessura da lente. (a) Mostre que, para $h << R$, tem-se $e \approx h^2/(2R)$. Para isso, você poderá utilizar a aproximação: $\sqrt{1 \pm \varepsilon} \approx 1 \pm \frac{1}{2}\varepsilon$, válida para $|\varepsilon| << 1$. (b) Com o auxílio do Princípio de Huygens, mostre que $f = R/(n-1)$. *Sugestão*: Partindo da frente de onda plana incidente II' (Fig.), iguale o tempo que as frentes de onda secundárias levam para convergir no foco passando pela periferia da lente (caminhos $\overline{I'F}$, $\overline{IF}$) e pelo centro (caminho $\overline{AO} + \overline{OF}$) e use o resultado da parte (a).

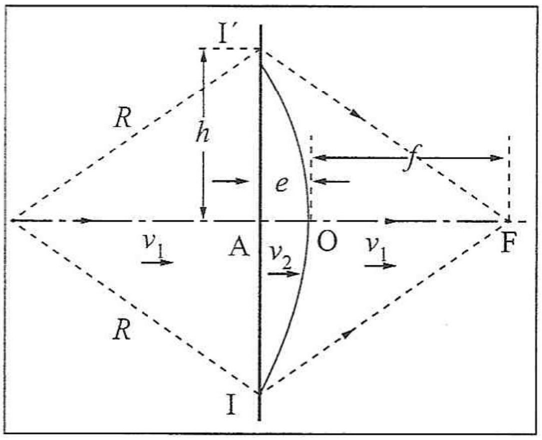


Figura P.3

9. Duas fontes sonoras A e B oscilam em fase com a freqüência de 20 kHz, no ar, emitindo ondas esféricas; a distância $\overline{AB} = 3d$ é de 10,2 m. Considere o plano perpendicular a $\overline{AB}$ que passa pelo terço O do segmento $\overline{AB}$: $\overline{AO} = d = \frac{1}{2}\,\overline{OB}$ (Fig. P.4). Ache as distâncias x do ponto O associadas aos dois primeiros mínimos e aos dois primeiros máximos de interferência sobre esse plano.

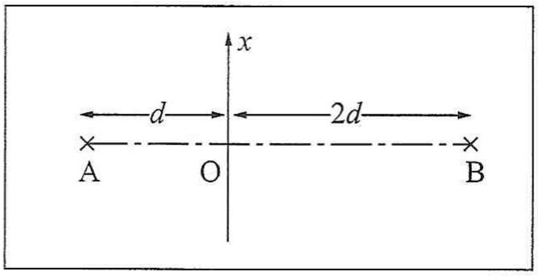


Figura P.4

Você poderá utilizar a aproximação: $\sqrt{1+\varepsilon} \approx 1 + \frac{1}{2}\varepsilon$ ($|\varepsilon| << 1$); a velocidade do som no ar é de 340m/s. Se as ondas emitidas por A e B têm a mesma amplitude, qual é a razão da intensidade dos máximos à dos mínimos?

10. Uma onda sonora plana harmônica de comprimento de onda λ incide perpendicularmente sobre um anteparo opaco com três fendas igualmente espaçadas, de espaçamento $d >> \lambda$. Para pontos de observação P situados a distâncias $R >> d$, determine as direções de observação θ (Fig. P.5) em que aparecem mínimos de interferência, generalizando a (6.8.11) de duas para três fendas. Qual é a intensidade nos mínimos? *Sugestão*: Você terá de calcular a resultante de três oscilações com defasagens consecutivas δ iguais. Use a notação complexa e a fórmula (demonstre-a!)

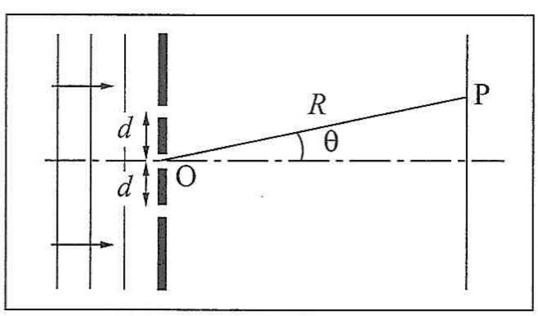


Figura P.5

$$|1+e^{i\delta}+e^{2i\delta}|^2=\left|\frac{e^{3i\delta}-1}{e^{i\delta}-1}\right|^2=\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{3}{2}\delta\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

O mesmo método se aplica a um número qualquer de fendas igualmente espaçadas.

11. Uma ambulância, em velocidade constante e com sua sereia sempre ligada, passa ao lado de um observador parado. A tonalidade da sereia percebida pelo observador varia de um semitom da escala cromática (pag. 134) entre quando ela está se aproximando, vindo de longe, e quando se afasta, já distante. A velocidade do som no ar é de 340 m/s. Calcule a velocidade da ambulância (em km/h).

12. Dois trens viajam em sentidos opostos, sobre trilhos, com velocidades de mesma magnitude. Um deles vem apitando. A freqüência do apito percebida por um passageiro do outro trem varia entre os valores de 348 Hz, quando estão se aproximando, e 259 Hz, quando estão se afastando. A velocidade do som no ar é de 340 m/s. (a) Qual é a velocidade dos trens (em km/h)? (b) Qual é a freqüência do apito?

13. Numa estrada de montanha, ao aproximar-se de um paredão vertical que a estrada irá contornar, um motorista vem buzinando. O eco vindo do paredão interfere com o som da buzina, produzindo 5 batimentos por segundo. Sabendo-se que a freqüência da buzina é de 200 Hz e a velocidade do som no ar é de 340 m/s, qual é a velocidade do carro (em km/h)?

14. Uma fonte sonora fixa emite som de freqüência ν_0. O som é refletido por um objeto que se aproxima da fonte com velocidade u. O eco refletido volta para a fonte, onde interfere com as ondas que estão sendo emitidas, dando origem a batimentos, com freqüência $\Delta\nu$. Mostre que é possível determinar a magnitude $|u|$ da velocidade do objeto móvel em função de $\Delta\nu$, ν_0 e da velocidade do som v.

    O mesmo princípio é utilizado (com ondas eletromagnéticas em lugar de ondas sonoras) na detecção do excesso de velocidade nas estradas, com auxílio do radar.

15. Dois carros (1 e 2) trafegam em sentidos opostos numa estrada, com velocidades de magnitudes v_1 e v_2. O carro 1 trafega contra o vento, que tem velocidade V. Ao avistar o carro 2 o motorista do carro 1 pressiona sua buzina, de freqüência ν_0. A velocidade do som no ar parado é v. Qual é a freqüência ν do som da buzina percebida pelo motorista do carro 2? Com que freqüência ν' ela é ouvida pelo motorista de um carro 3 que trafega no mesmo sentido que o carro 1 e com a mesma velocidade?

16. Complete a teoria do efeito Doppler para movimento numa direção qualquer (pág. 150) calculando a freqüência ν percebida por um observador quando a fonte, de frequência ν_0, está em repouso na atmosfera e o observador se move ao longo de uma direção P_0P com velocidade de magnitude u. No instante considerado, a direção PF que liga o observador à fonte (Fig. P.6) faz um ângulo θ com a direção do movimento. Verifique que se recai nos resultados obtidos no texto para $\theta = 0$ e $\theta = \pi$.

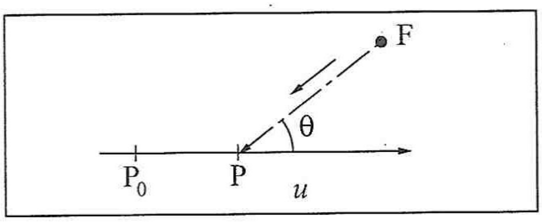


Figura P.6

17. Mostre que se pode obter o efeito Doppler a partir da transformação de Galileu (**1**, Seção 13.1). (a) Considere primeiro uma onda sonora harmônica em uma dimensão, para uma fonte sonora em repouso no meio, de freqüência ν_0. Escreva a expressão da onda num ponto x no instante t, no referencial S do meio. Considere agora um observador que se

desloca com velocidade u em relação a S, na direção θ. Relacione x com a coordenada x' do observador, no referencial S' que se desloca com ele. Substitua na expressão da onda e interprete o resultado. (b) Considere agora o caso em que o observador se move com velocidade $\mathbf{u}$ numa direção qualquer. Generalize o resultado de (a), usando a transformação de Galileu geral, e mostre que se obtém a mesma expressão para o efeito Doppler encontrada no Problema 16. Parta da expressão geral (6.5.3) para uma onda plana.

18. Um avião a jato supersônico está voando a Mach 2 (o dobro da velocidade do som). (a) Qual é o ângulo de abertura do cone de Mach? (b) 2,5 s depois de o avião ter passado diretamente acima de uma casa, a onda de choque causada pela sua passagem atinge a casa, provocando um estrondo sônico. A velocidade do som no ar é de 340 m/s. Qual é a altitude do avião em relação à casa?