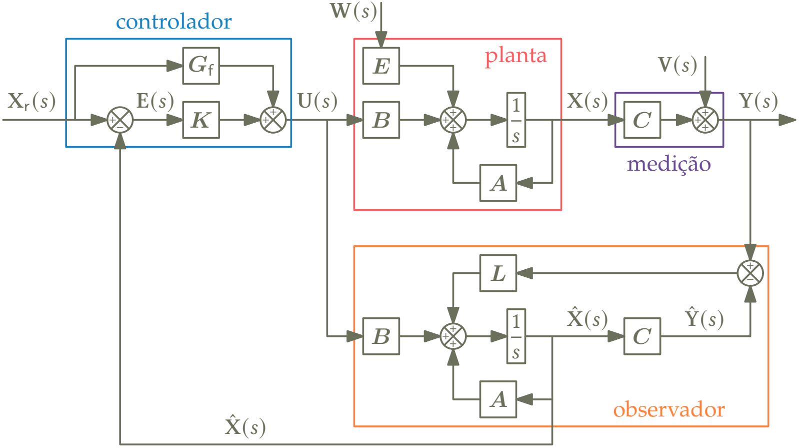
Controle e Aplicações • Aula 3.1

Observadores de estados

Prof. Dr. Renato Maia Matarazzo Orsino

Observador de Luenberger ou observador identidade



Observador de Luenberger – formulação

Planta – modelo linear	Observador
$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \boldsymbol{C}\mathbf{x}(t) \end{cases}$	$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{x}}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \boldsymbol{B}\mathbf{u}(t) + \boldsymbol{L}(\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)) \\ \hat{\mathbf{y}}(t) = \boldsymbol{C}\hat{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$

onde identificamos:

- $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$: matriz de *estados*;
- $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times r}$: matriz de *entradas de controle*;
- $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}$: matriz de *observações*;
- $\boldsymbol{L} \in \mathbb{R}^{n\times m}$: matriz de *ganhos do observador*;

Defina-se ainda o *erro de estimação*:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$$

Observe que: $\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t) = \boldsymbol{C}(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{\varepsilon}(t)$.

Observador de Luenberger – formulação

A dinâmica do *erro de estimação* é dada por:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}(t)}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{x}}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{B}\mathbf{u}(t) - \boldsymbol{A}\hat{\mathbf{x}}(t) - \boldsymbol{B}\mathbf{u}(t) - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C}\boldsymbol{\varepsilon}(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}(t)}{\mathrm{d}t} = \widehat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{\varepsilon}(t) \quad \text{com} \quad \widehat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C}$$

Note que:
(i) da dualidade entre *controlabilidade* e *observabilidade*, sabemos que o par $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C})$ é observável se, e somente se, o par $(\boldsymbol{A}^\top, \boldsymbol{C}^\top)$ é controlável;
(ii) os autovalores de $\widehat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C}$ e $\widehat{\boldsymbol{A}}^\top = \boldsymbol{A}^\top - \boldsymbol{C}^\top\boldsymbol{L}^\top$ são idênticos.

A *matriz de ganhos* $\boldsymbol{L}$ do *observador de estados* pode ser tomada como a *transposta da matriz de ganhos* $\boldsymbol{K}$ de um *controlador* para um sistema cuja *matriz de estados* é $\boldsymbol{A}^\top$ e cuja *matriz de entradas de controle* é $\boldsymbol{C}^\top$.

Princípio da separação

As *leis de controle para reguladores* discutidas até então pressupõem, em sua dedução, que o estado $\mathbf{x}(t)$ do sistema seja inteiramente acessível, sendo possível propor uma *realimentação de estados* da forma:

$$\mathbf{u}(t) = -\boldsymbol{K}\mathbf{x}(t)$$

No entanto, na impossibilidade de se medir integralmente o estado do sistema, pode-se propor uma lei de controle em que o estado $\mathbf{x}(t)$ é *substituído por sua estimativa* $\hat{\mathbf{x}}(t)$ fornecida pelo *observador de estados*:

$$\mathbf{u}(t) = -\boldsymbol{K}\hat{\mathbf{x}}(t) = -\boldsymbol{K}\left(\mathbf{x}(t) - \boldsymbol{\varepsilon}(t)\right)$$

Assim, a dinâmica do *sistema em malha fechada* para a ser descrita como:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\begin{array}{c}\mathbf{x}(t)\\ \hline \boldsymbol{\varepsilon}(t)\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c}\overline{\boldsymbol{A}} & \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\\ \hline \mathbf{0} & \widehat{\boldsymbol{A}}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}\mathbf{x}(t)\\ \hline \boldsymbol{\varepsilon}(t)\end{array}\right] \quad \text{com} \quad \begin{cases}\overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\\ \widehat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C}\end{cases}$$

Princípio da separação

O *polinômio característico $p(s)$ do sistema* pode ser escrito como o *produto* do *polinômio característico $\bar{p}(s)$ da planta em malha fechada admitindo realimentação de estados* pelo *polinômio característico $\hat{p}(s)$ da dinâmica do erro de estimação*:

$$p(s) = \det \left[\begin{array}{c|c} s\boldsymbol{I} - \overline{\boldsymbol{A}} & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{K} \\ \hline \mathbf{0} & s\boldsymbol{I} - \widehat{\boldsymbol{A}} \end{array} \right] = \underbrace{\det\left(s\boldsymbol{I} - \overline{\boldsymbol{A}}\right)}_{\bar{p}(s)} \underbrace{\det\left(s\boldsymbol{I} - \widehat{\boldsymbol{A}}\right)}_{\hat{p}(s)}$$

Os $2n$ *polos do sistema completo* controlado por uma lei de controle da forma $\mathbf{u}(t) = -\boldsymbol{K}\hat{\mathbf{x}}(t)$ correspondem aos:

- *n polos do controlador projetado via realimentação de estados*;
- *n polos do observador*.

Assim, controlador e observador podem ser projetados de forma independente.

Transformação de variáveis baseada na matriz de observações

Admita que a *matriz de observações* $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *tenha posto completo* (ou seja, suas m linhas sejam *linearmente independentes*).
Seja $\boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^{(n-m)\times n}$ uma matriz cujas *linhas constituem uma base*[1] para $\ker(\boldsymbol{C}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{C}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$. Neste caso, $\boldsymbol{C}\boldsymbol{V}^\top = \mathbf{0}$ e:

$$\boldsymbol{T} = \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{C} \\ \hline \boldsymbol{V} \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

é uma *matriz invertível*:

$$\boldsymbol{T}^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{M} & \boldsymbol{N} \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \text{com} \quad \boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{n\times m} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{N} \in \mathbb{R}^{n\times(n-m)}$$

Observe que, das identidades $\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{I}_n$ e $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{I}_n$ decorre que:

$$\begin{array}{lll} \boldsymbol{C}\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{C}\boldsymbol{N} = \mathbf{0} & \boldsymbol{M}\boldsymbol{C} + \boldsymbol{N}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{I}_n \\ \boldsymbol{V}\boldsymbol{M} = \mathbf{0} & \boldsymbol{V}\boldsymbol{N} = \boldsymbol{I}_{(n-m)} & \end{array}$$

[1] É comum casos em que $\boldsymbol{C}$ seja formada por algumas linhas da matriz identidade $\boldsymbol{I}_n$. Nestes casos, basta definir $\boldsymbol{V}$ como a matriz formada pelas linhas de $\boldsymbol{I}_n$ *ausentes* em $\boldsymbol{C}$.

Transformação de variáveis baseada na matriz de observações

Utilizando a matriz $\boldsymbol{T}$, defina-se uma *transformação de variáveis*:

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{x}_*(t)\\ \hline \mathbf{x}_\#(t)\end{array}\right] = \boldsymbol{T}\mathbf{x}(t) = \left[\begin{array}{c}\boldsymbol{C}\mathbf{x}(t)\\ \hline \boldsymbol{V}\mathbf{x}(t)\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\mathbf{y}(t)\\ \hline \boldsymbol{V}\mathbf{x}(t)\end{array}\right]$$

A partir desta transformação é possível descrever o estado $\mathbf{x}(t)$ como:

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{T}^{-1}\left[\begin{array}{c}\mathbf{x}_*(t)\\ \hline \mathbf{x}_\#(t)\end{array}\right] = \boldsymbol{M}\mathbf{x}_*(t) + \boldsymbol{N}\mathbf{x}_\#(t) = \boldsymbol{M}\mathbf{y}(t) + \boldsymbol{N}\mathbf{x}_\#(t)$$

Uma vez que $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ é medido, o problema de estimar $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ pode ser reduzido ao problema de estimar $\mathbf{x}_\# \in \mathbb{R}^{(n-m)}$:

$$\boxed{\hat{\mathbf{x}}(t) = \boldsymbol{M}\mathbf{y}(t) + \boldsymbol{N}\hat{\mathbf{x}}_\#(t)}$$

Transformação de variáveis baseada na matriz de observações

Adotando a transformação de variáveis baseada na matriz de observações, a *expressão em forma de espaço de estados do modelo da planta* se torna:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{x}_*(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}_{11}\mathbf{x}_*(t) + \boldsymbol{A}_{12}\mathbf{x}_\#(t) + \boldsymbol{B}_1\mathbf{u}(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{x}_\#(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}_{21}\mathbf{x}_*(t) + \boldsymbol{A}_{22}\mathbf{x}_\#(t) + \boldsymbol{B}_2\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{x}_*(t) \end{cases}$$

com:

$$\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \hline \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{array}\right] = \boldsymbol{TAT}^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{CAM} & \boldsymbol{CAN} \\ \hline \boldsymbol{VAM} & \boldsymbol{VAN} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c} \boldsymbol{B}_1 \\ \hline \boldsymbol{B}_2 \end{array}\right] = \boldsymbol{TB} = \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{CB} \\ \hline \boldsymbol{VB} \end{array}\right]$$

Observador de ordem reduzida

A seguinte estrutura é proposta para o *observador de ordem reduzida* para a estimação de $\mathbf{x}_\#(t)$:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_\#(t) = \boldsymbol{J}\mathbf{y}(t) + \mathbf{z}(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{z}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}\mathbf{z}(t) + \boldsymbol{G}\mathbf{y}(t) + \boldsymbol{H}\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

Define-se o *erro de estimação* como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\#(t) = \mathbf{x}_\#(t) - \hat{\mathbf{x}}_\#(t)$$

Dessa forma, a derivada do erro de estimação é dada por:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_\#(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}_\#(t)}{\mathrm{d}t} - \boldsymbol{J}\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}(t)}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\mathbf{z}(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_\#(t)}{\mathrm{d}t} &= (\boldsymbol{A}_{21} - \boldsymbol{J}\boldsymbol{A}_{11} - \boldsymbol{G})\mathbf{y}(t) + (\boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{J}\boldsymbol{A}_{12})\mathbf{x}_\#(t) \\ &\quad + (\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{J}\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{H})\mathbf{u}(t) - \boldsymbol{F}\mathbf{z}(t) \end{aligned}$$

Observador de ordem reduzida

Substituindo na última expressão:

$$\mathbf{z}(t) = \hat{\mathbf{x}}_\#(t) - \boldsymbol{J}\mathbf{y}(t)$$
$$\mathbf{x}_\#(t) = \hat{\mathbf{x}}_\#(t) + \boldsymbol{\varepsilon}_\#(t)$$

obtém-se:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_\#(t)}{\mathrm{d}t} = (\boldsymbol{A}_{21} - \boldsymbol{J}\boldsymbol{A}_{11} - \boldsymbol{G} + \boldsymbol{F}\boldsymbol{J})\mathbf{y}(t) + (\boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{J}\boldsymbol{A}_{12})\boldsymbol{\varepsilon}_\#(t) + (\boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{J}\boldsymbol{A}_{12} - \boldsymbol{F})\hat{\mathbf{x}}_\#(t) + (\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{J}\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{H})\mathbf{u}(t)$$

A dinâmica do erro de estimação se torna independente das variáveis $\mathbf{y}$, $\hat{\mathbf{x}}_\#$ e $\mathbf{u}$ se tormarmos:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{J}\boldsymbol{A}_{12}$$
$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{A}_{21} - \boldsymbol{J}\boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{F}\boldsymbol{J}$$
$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{J}\boldsymbol{B}_1$$

Observador de ordem reduzida

Nestas condições, a dinâmica do erro de estimação se torna:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{\#}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{\varepsilon}_{\#}(t) \quad \text{com} \quad \boldsymbol{F} = \boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{J}\boldsymbol{A}_{12} = \left(\boldsymbol{V} - \boldsymbol{J}\boldsymbol{C}\right)\boldsymbol{A}\boldsymbol{N}$$

Pode-se demonstrar que, se o par $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C})$ for *observável*, o par $(\boldsymbol{A}_{22}, \boldsymbol{A}_{12})$ também será *observável*.

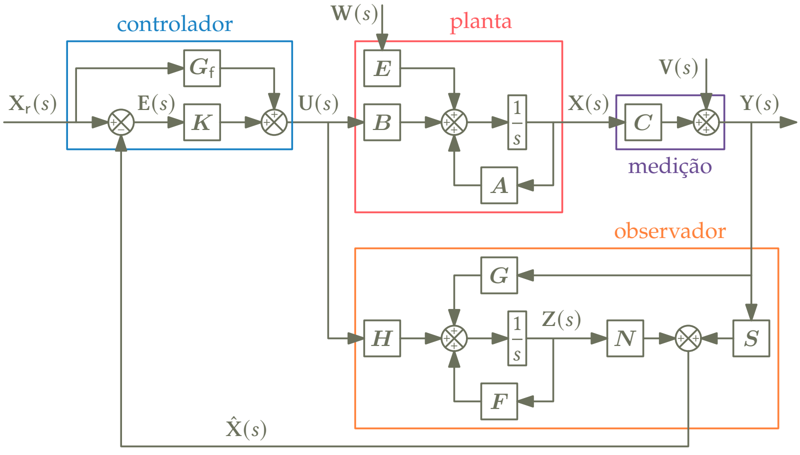
Recorrendo à *dualidade*, a *matriz de ganhos* $\boldsymbol{J} \in \mathbb{R}^{(n-m)\times m}$ do *observador de estados de ordem reduzida* pode ser tomada como a *transposta da matriz de ganhos* $\boldsymbol{K} \in \mathbb{R}^{m\times(n-m)}$ de um *controlador* para um sistema com:

- matriz de estados $\boldsymbol{A}_{22}^{\top} \in \mathbb{R}^{(n-m)\times(n-m)}$;
- matriz de entradas de controle $\boldsymbol{A}_{12}^{\top} \in \mathbb{R}^{(n-m)\times m}$.

Ainda, o *estimador $\hat{\mathbf{x}}(t)$ do estado do sistema* se torna:

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \boldsymbol{S}\mathbf{y}(t) + \boldsymbol{N}\mathbf{z}(t) \quad \text{com} \quad \boldsymbol{S} = \boldsymbol{M} + \boldsymbol{N}\boldsymbol{J}$$

Observador de ordem reduzida



Perguntas?

reorsino@usp.br