

Agenor de Toledo Fleury & Flávio
Celso Trigo

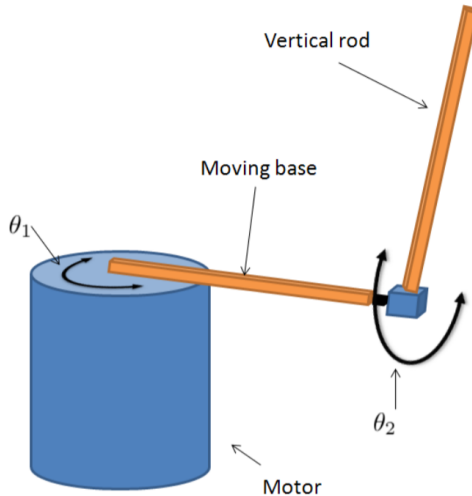
*Escola Politécnica da USP
Departamento de Engenharia Mecânica*

2024

PME 3481 – Controle e aplicações

Alocação de polos & LQR: exemplos

Sistema dinâmico: pêndulo rotativo (Furuta)



O equipamento foi desenvolvido por Furuta, Yamakita e Kobayashi no Instituto de Tecnologia de Tóquio (1992)

Modelo matemático não linear

Definem-se:

- ▶ $\theta_1 [rad]$: ângulo da haste horizontal
- ▶ $\theta_2 [rad]$: ângulo do pêndulo
- ▶ $U(t) [V]$: tensão de controle
- ▶ momento de inércia da haste horizontal: $J_1 = 0,005 [kg.m^2]$
- ▶ comprimento da haste horizontal: $l_1 = 0,2 [m]$
- ▶ massa do pêndulo: $M_2 = 0,15 [m]$
- ▶ comprimento do pêndulo: $l_2 = 0,5 [m]$
- ▶ momento de inércia do pêndulo: $J_2 = \frac{M_2 l_2^2}{3} [kg.m^2]$
- ▶ coeficiente de torque do motor: $K_\phi = 0,008$
- ▶ relação de transmissão: $N = 15$
- ▶ resistência interna do motor: $R = 2,5[\Omega]$

Parâmetros auxiliares:

$$a = J_1 + M_2 L_1^2$$

$$b = \frac{1}{2} M_2 l_1 l_2$$

$$c = J_2$$

$$d = \frac{1}{2} M_2 g l_2$$

$$e = \frac{N K_\phi}{R}$$

$$f = \frac{N^2 K_\phi^2}{R}$$

$$\delta = ac - b^2$$

Pelo método de Lagrange, são obtidas as equações de movimento não-lineares:

$$(J_1 + M_2 l_1^2) \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2} M_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - \frac{1}{2} M_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_1 = \tau(t) \quad (1)$$

$$J_2 \ddot{\theta}_2 + \frac{1}{2} M_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 - \frac{1}{2} M_2 g l_2 \sin \theta_2 = 0 \quad (2)$$

$$N K_\phi \frac{U(t)}{R} - \frac{N^2 K_\phi^2}{R} \dot{\theta}_1 = \tau(t) \quad (3)$$

Equações linearizadas de movimento

O modelo linearizado em torno da configuração de equilíbrio instável $\theta_1 = \theta_2 = \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$ é:

$$\begin{bmatrix} J_1 + M_2 l_1^2 & \frac{1}{2} M_2 l_1 l_2 \\ \frac{1}{2} M_2 l_1 l_2 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} M_2 g l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

O modelo da planta em espaço de estados fica:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{bd}{\delta} & -c \frac{K_\phi^2 N^2}{\delta R} & 0 \\ 0 & \frac{ad}{\delta} & b \frac{K_\phi^2 N^2}{\delta R} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{cK_\phi N}{\delta R} \\ -\frac{bK_\phi N}{\delta R} \end{bmatrix} U(t) \quad (5)$$

Equações linearizadas de movimento

Supondo medidos os deslocamentos angulares absolutos θ_1 e θ_2 , o modelo de observação é dado por

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Pode-se, agora, efetuar o projeto de controladores pelos métodos de alocação de polos e LQR, conforme será apresentado a seguir

<https://www.youtube.com/watch?v=XKzzWe15DEw>