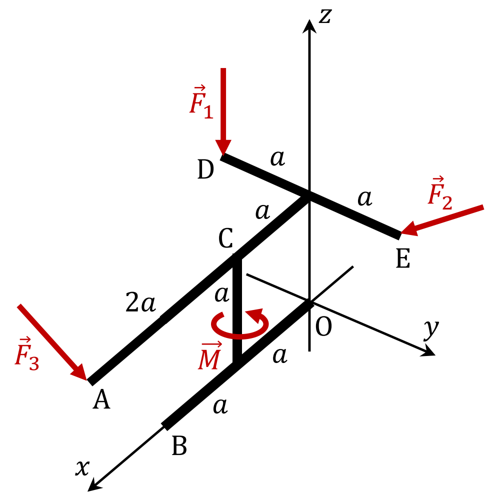
PME 3100 – MECÂNICA I – Prova P1 – Reoferecimento 2024 – 09 de Abril

Instruções gerais e formulário estão disponíveis na folha de respostas.

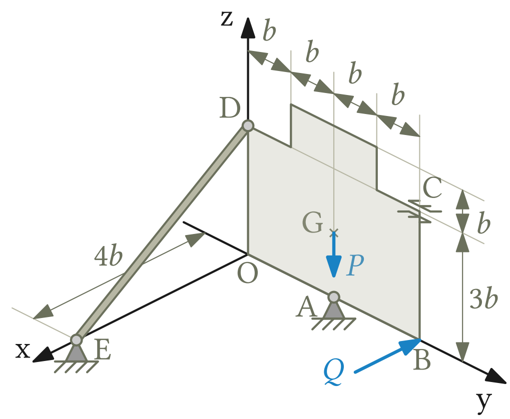
Questão 1 (3,0 pontos). A peça OBACDE ilustrada na figura tem peso desprezível e é submetida ao seguinte sistema de esforços: $(\vec{F}_1, D)$ com $\vec{F}_1 = -F\vec{k}$, $(\vec{F}_2, E)$ com $\vec{F}_2 = F\vec{i} - F\vec{j}$, $(\vec{F}_3, A)$ com $\vec{F}_3 = F\vec{j} - F\vec{k}$, e $\vec{M} = M\vec{k}$ (binário de forças). Pede-se:

a) (0,5) calcular a resultante $\vec{R}$;
b) (0,5) calcular o momento $\vec{M}_O$ com respeito ao polo O;
c) (0,5) calcular o momento $\vec{M}_C$ com respeito ao polo C;
d) (0,5) determinar, em função dos demais dados do problema, o valor de M para o qual o sistema se torna redutível a uma única força;
e) (0,5) calcular o módulo do momento mínimo;
f) (0,5) determinar o sistema de esforços composto por uma força $(\vec{F}^*, C)$ e um binário de forças $\vec{M}^*$ que, se aplicado **em adição** ao sistema de esforços original descrito no enunciado, equilibraria a peça.



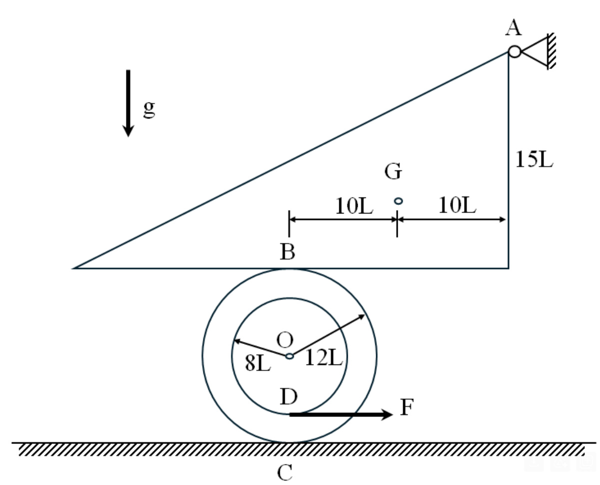
Questão 2 (3,5 pontos). A estrutura em equilíbrio indicada na figura ao lado é composta por uma placa plana rígida homogênea de peso P, e por uma barra rígida DE, de peso desprezível. Os vínculos em A, D e E são articulações ideais, e o vínculo em C é um anel ideal de eixo paralelo a Oy. Além do peso próprio a placa também está sujeita a uma força $(-Q\vec{i}, B)$. Pede-se:

a) (0,6) determinar o vetor posição $(G - O)$ do centro de massa da placa;
b) (0,8) esboçar o diagrama de corpo livre (DCL) da placa;
c) (1,5) utilizando o polo A para o equilíbrio de momentos, obter o sistema de equações de equilíbrio para a placa (enumere as equações obtidas);
d) (0,6) determinar as expressões dos esforços reativos aplicados sobre a placa em função dos dados fornecidos no enunciado e na figura.



Questão 3 (3,5 pontos). No sistema plano ilustrado na figura, a cantoneira triangular tem peso $3P$ e o disco tem peso $2P$. Os coeficientes de atrito μ no contato da cantoneira com o disco e no contato do disco com o solo são idênticos e iguais a $1/3$. Pede-se:

a) (1,0) desenhar os diagramas de corpo livre (DCLs) do disco e da cantoneira;
a) (1,6) determinar as forças no contato entre a cantoneira e o disco e no contato entre o disco e o solo;
c) (0,9) determinar a máxima força F compatível com o equilíbrio.



Resolução comentada

Questão 1 (3,0 pontos)

a) A resultante $\vec{R}$ é obtida somando os vetores das forças do sistema de esforços:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{R} = F(\vec{\imath} - 2\vec{k})} \quad (0,5)$$

b) O momento $\vec{M}_O$ pode então ser obtido como:

$$\begin{aligned}\vec{M}_O &= (D - O) \wedge \vec{F}_1 + (E - O) \wedge \vec{F}_2 + (A - O) \wedge \vec{F}_3 + \vec{M} \\ &= (-a\vec{\jmath} + a\vec{k}) \wedge (-F\vec{k}) + (a\vec{\jmath} + a\vec{k}) \wedge (F\vec{\imath} - F\vec{\jmath}) + (3a\vec{\imath} + a\vec{k}) \wedge (F\vec{\jmath} - F\vec{k}) + M\vec{k}\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{M}_O = aF\vec{\imath} + 4aF\vec{\jmath} + (2aF + M)\vec{k}} \quad (0,5)$$

c) Aplicando a fórmula de mudança de polo:

$$\vec{M}_C = \vec{M}_O + (O - C) \wedge \vec{R} = \left[aF\vec{\imath} + 4aF\vec{\jmath} + (2aF + M)\vec{k}\right] + (-a\vec{\imath} - a\vec{k}) \wedge (F\vec{\imath} - 2F\vec{k})$$

$$\boxed{\vec{M}_C = aF\vec{\imath} + aF\vec{\jmath} + (2aF + M)\vec{k}} \quad (0,5)$$

d) Aplicando a definição de invariante escalar:

$$I = \vec{M}_O \cdot \vec{R} \quad \Rightarrow \quad I = -F(3aF + 2M)$$

Para o sistema de esforços ser redutível a uma única força, $\vec{R} \neq \vec{0}$ e $I = 0$. Portanto:

$$I = 0 \quad \Rightarrow \quad -F(3aF + 2M) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M = -\frac{3aF}{2}} \quad (0,5)$$

e) Utilizando a expressão do módulo do momento mínimo, tem-se:

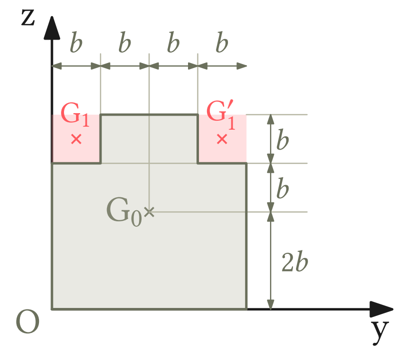
$$\left|\vec{M}_{min}\right| = \frac{|I|}{|\vec{R}|} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left|\vec{M}_{min}\right| = \frac{\sqrt{5}}{5}(3aF + 2M)} \quad (0,5)$$

f) Para que o sistema de esforços adicional equilibre a peça, ele deve ter resultante e momento opostos em relação ao sistema de esforços original. Assim o novo sistema de esforços que adicionado ao sistema original equilibra a peça é: $(\vec{F}^*, C)$ e um binário de forças $\vec{M}^*$, onde:

$$\vec{F}^* = -\vec{R} \quad \text{e} \quad \vec{M}^* = -\vec{M}_C$$

$$\boxed{\vec{F}^* = -F(\vec{\imath} - 2\vec{k}) \quad \text{e} \quad \vec{M}^* = -aF\vec{\imath} - aF\vec{\jmath} - (2aF + M)\vec{k}} \quad (0,5)$$

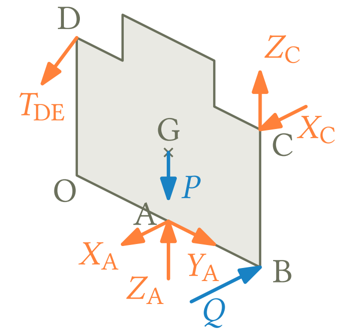
Questão 2 (3,5 pontos)



a) Pela simetria da placa: $\boxed{y_G = 2b}$ (0,3).
Para o cálculo da coordenada z_G, concebamos a placa como uma chapa retangular de centro G_0 e área $A_0 = (4b)^2 = 16b^2$ na qual foram removidos dois pedaços quadrados (destacados em vermelho na figura ao lado) de centros G_1 e G'_1 e área $A_1 = b^2$ cada. Considerando que, pela homogeneidade da placa, a distribuição de massas é diretamente proporcional às áreas:

$$z_G = \frac{A_0 z_0 - A_1 z_1 - A_1 z'_1}{A_0 - A_1 - A_1} = \frac{16b^2(2b) - b^2\left(3b + \frac{b}{2}\right) - b^2\left(3b + \frac{b}{2}\right)}{16b^2 - b^2 - b^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_G = \frac{25}{14}b} \quad (0,3) \quad \Rightarrow \boxed{(G - O) = 2b\vec{\jmath} + \frac{25}{14}b\,\vec{k}}$$



b) O DCL da placa é indicado na figura ao lado.
A nota (0,8) será atribuída a uma resolução inteiramente correta. Caso a resolução tenha uma ou duas componentes de força ativa ou reativa erradas a nota atribuída será (0,4). Havendo mais de duas componentes erradas a nota atribuída será (0,0).

c) Considerando que $(E - D) = 4b\,\vec{\imath} - 3b\,\vec{k}$ e $|E - D| = b\sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5b$, temos:

$$\vec{T}_{DE} = T_{DE}\frac{(E - D)}{|E - D|} = T_{DE}\left(\frac{4}{5}\vec{\imath} - \frac{3}{5}\vec{k}\right)$$

Utilizando o polo A para o cálculo do momento do sistema:

$$\begin{aligned}
\vec{M}_A &= (B - A) \wedge (-Q\vec{\imath}) + (C - A) \wedge (X_C\vec{\imath} + Z_C\vec{k}) + (D - A) \wedge \vec{T}_{DE} + (G - A) \wedge (-P\vec{k}) \\
&= (2b\vec{\jmath}) \wedge (-Q\vec{\imath}) + (2b\vec{\jmath} + 3b\,\vec{k}) \wedge (X_C\vec{\imath} + Z_C\vec{k}) + (-2b\vec{\jmath} + 3b\,\vec{k}) \wedge T_{DE}\left(\frac{4}{5}\vec{\imath} - \frac{3}{5}\vec{k}\right) + \left(\frac{25}{14}b\,\vec{k}\right) \wedge (-P\vec{k}) \\
&= \left(2bZ_C + \frac{6}{5}bT_{DE}\right)\vec{\imath} + \left(3bX_C + \frac{12}{5}bT_{DE}\right)\vec{\jmath} + \left(2bQ - 2bX_C + \frac{8}{5}bT_{DE}\right)\vec{k}
\end{aligned}$$

Resultante do sistema:

$$\vec{R} = (X_A\vec{\imath} + Y_A\vec{\jmath} + Z_A\vec{k}) + (-Q\vec{\imath}) + (X_C\vec{\imath} + Z_C\vec{k}) + \vec{T}_{DE} + (-P\vec{k}) = \left(X_A - Q + X_C + \frac{4}{5}T_{DE}\right)\vec{\imath} + Y_A\,\vec{\jmath} + \left(Z_A + Z_C - \frac{3}{5}T_{DE} - P\right)\vec{k}$$

As equações de equilíbrio decorrem das condições $\vec{M}_A = \vec{0}$ e $\vec{R} = \vec{0}$:

$$2bZ_C + \frac{6}{5}bT_{DE} = 0 \qquad (1) \qquad\qquad X_A - Q + X_C + \frac{4}{5}T_{DE} = 0 \qquad (4)$$

$$3bX_C + \frac{12}{5}bT_{DE} = 0 \qquad (2) \qquad\qquad Y_A = 0 \qquad (5)$$

$$2bQ - 2bX_C + \frac{8}{5}bT_{DE} = 0 \qquad (3) \qquad\qquad Z_A + Z_C - \frac{3}{5}T_{DE} - P = 0 \qquad (6)$$

Será atribuída nota (0,3) a cada equação inteiramente correta do sistema (1), (2) e (3).
Será atribuída nota (0,2) a cada equação inteiramente correta do sistema (4), (5) e (6).

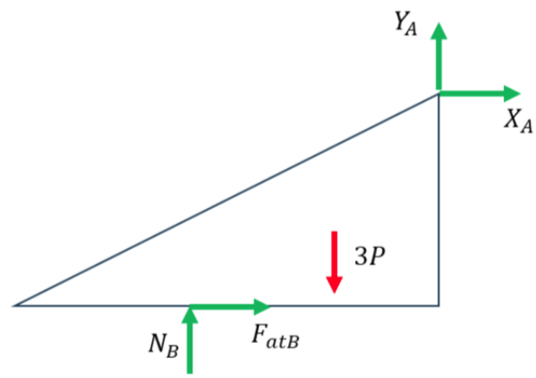
d) Da equação (5): $\boxed{Y_A = 0}$ (0,1)

Resolvendo o sistema formado pelas equações (2) e (3): $\boxed{T_{DE} = -\frac{5}{8}Q}$ (compressão) (0,1) e $\boxed{X_C = \frac{1}{2}Q}$ (0,1)

Substituindo o valor de T_{DE} em (1): $\boxed{Z_C = \frac{3}{8}Q}$ (0,1)

Substituindo os valores de T_{DE}, X_C e Z_C em (4) e (6): $\boxed{X_A = Q}$ (0,1) e $\boxed{Z_A = P - \frac{3}{4}Q}$ (0,1)

Questão 3 (3,5 pontos)

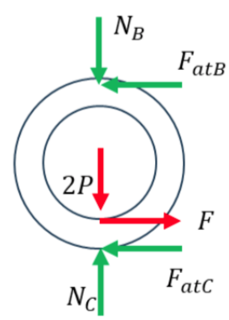


a) Os diagramas de corpo livre são indicados na figura ao lado. (1,0)

b) As equações da cantoneira: (0,6)

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad X_A + F_{atB} = 0$$
$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_A + N_B - 3P = 0$$
$$\sum M_{Az} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_B \cdot 20L - 3P \cdot 10L - F_{atB} \cdot 15L = 0$$

As equações do disco: (0,6)



$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -F_{atB} - F_{atC} + F = 0$$
$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N_C - N_B - 2P = 0$$
$$\sum M_{Az} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{atB} \cdot 24L - F \cdot 4L = 0$$

Forças nos contatos: (0,4)

$$\boxed{F_{atB} = \frac{F}{6}} \quad \boxed{F_{atC} = \frac{5F}{6}} \quad \boxed{N_B = \frac{3P}{2} + \frac{F}{8}} \quad \boxed{N_C = \frac{7P}{2} + \frac{F}{8}}$$

c) Lei de Coulomb em B: (0,3)

$$F_{atB} \leq \mu N_B \quad \Rightarrow \quad \frac{F}{6} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{3P}{2} + \frac{F}{8}\right) = \frac{P}{2} + \frac{F}{24} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F \leq 4P}$$

Lei de Coulomb em C: (0,3)

$$F_{atC} \leq \mu N_C \quad \Rightarrow \quad \frac{5F}{6} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{7P}{2} + \frac{F}{8}\right) = \frac{7P}{6} + \frac{F}{24} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F \leq \frac{28P}{19}}$$

A máxima força F: (0,3)

$$F_{max} = \min\left\{4P, \frac{28P}{19}\right\} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_{max} = \frac{28P}{19}}$$