Agenor de Toledo Fleury & Flávio Celso Trigo

Escola Politécnica da USP
Departmento de Engenharia Mecânica

2024

PME 3481 – Controle e aplicações

Controle Ótimo

Definição do problema de controle ótimo (PCO)

A caracterização matemática do problema de controle ótimo requer:

1. **a descrição do sistema que deve ser controlado;**
2. **a descrição das restrições (vínculos estáticos e/ou dinâmico) e eventuais opções;**
3. **a descrição do objetivo a ser alcançado pelo sistema de controle;**
4. **o estabelecimento de um critério de avaliação do desempenho.**

Formulação

Consideram-se os sistemas em espaço de estados respectivamente contínuo e discreto dados por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(t), t) \tag{1}$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \tag{2}$$

e os respectivos índices de desempenho globais contínuo e discreto

$$J = S(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)dt$$

$$J = S(\mathbf{x}(N)) + \sum_{k=0}^{N-1} L(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}_k)$$

com $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$ e S, L funcionais escalares e reais.

Formulação

As funções S e L representam as seguintes ponderações:

- S é o "custo" associado ao erro na configuração no instante final;
- L é o "custo" relacionado aos erros causados por transitórios no vetor de estado e ao dispêndio de energia no controle;
- o projetista de controle deve selecionar as funções S e L de acordo com a necessidade de maior ênfase em obter o estado final especificado, comportamento dos transientes e utilização de energia no controle.

Classes de problemas de otimização

De acordo com as funções S e L, cinco problemas básicos de controle ótimo são formulados:

- Com $S = 0$ e $L = 1 \;\Rightarrow J = \int_{t_0}^{t_f} dt$ é o problema de tempo mínimo
- com $S = 0$ e $L = \mathbf{u}^T\mathbf{u} \;\Rightarrow J = \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{u}^T\mathbf{u}dt$ é a ponderação dada ao esforço de controle, que pode ser interpretado como o dispêndio de energia. Este é o problema de esforço mínimo;
- com $S = [\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}_e]^T[\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}_e]$ e $L = 0$, J irá minimizar o quadrado da norma do erro entre o estado final $\mathbf{x}(t_f)$ e o estado especificado $\mathbf{x}_e$, caracterizando o problema de erro mínimo final;

Classes de problemas de otimização (cont.)

- com $S = 0$ e $L = [\mathbf{x}(t_f) - \boldsymbol{\eta}(t)]^T[\mathbf{x}(t_f) - \boldsymbol{\eta}(t)]$, J irá minimizar o quadrado da norma do erro instantâneo entre o estado $\mathbf{x}(t)$ e a trajetória especificada $\boldsymbol{\eta}(t)$, caracterizando o problema do seguidor de referência.
- finalmente,é adequado propor um critério geral que possa fornecer uma solução de compromisso entre os três primeiros critérios:

$$S = [\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}_e]^T \boldsymbol{M} [\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}_e],$$
$$L = [\mathbf{x}(t_f) - \boldsymbol{\eta}(t)]^T \boldsymbol{Q} [\mathbf{x}(t_f) - \boldsymbol{\eta}(t)] + \mathbf{u}^T \boldsymbol{R} \mathbf{u}$$

com $\boldsymbol{M}, \ \boldsymbol{Q} \in R^{n \times n}$ e $R \in \mathbb{R}^{r \times r}$.

Essas matrizes devem ser escolhidas de modo a ponderar a importância do estado final, esforço de controle e erro transitório.

Definição: PCO

Dentre todas as funções (ou sequências, no caso de sistemas discretizados) $\mathbf{u}$ possíveis, deseja-se obter a que minimiza o índice de desempenho J e esteja em conformidade com os vínculos dinâmicos dados pelo modelo de estado (eqs. 1) e com todas as condições iniciais e finais especificadas.

Brogan, Modern Control Theory, pg. 503

- **se a ação de controle depender apenas do estado inicial e de outros parâmetros do sistema, o controle é dito de malha aberta;**
- **se a ação de controle for também função do estado instantâneo, caracteriza-se o controle em malha fechada.**

Abordagens para a solução do PCO

O problema de controle ótimo pode ser resolvido através de várias abordagens, dentre elas:

1. **2o. Teorema de Lyapunov (1890)**
2. **Princípio da Otimalidade (Bellman) e Programação Dinâmica (1958)**
3. **Princípio do Mínimo de Pontryagin (1956)**

A abordagem que será aqui apresentada é de no. 3, que baseia-se no Cálculo Variacional, assunto abordado em cursos de pós-graduação e motivo pelo qual diversas demonstrações não serão efetuadas.

Problema do regulador

No problema do regulador, admite-se $\mathbf{x}(t_f) = 0$ e, portanto, $\boldsymbol{M} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\eta}(t) = \mathbf{0}$. Assim, o funcional a ser minimizado é dado por

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt$$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}(t)^T \boldsymbol{Q}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T \boldsymbol{R}(t) \mathbf{u}] dt \tag{3}$$

Seja o sistema linear em espaço de estados $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{y}(t) = C(t)\mathbf{x}(t)$. Deve-se obter um controle $\underline{\mathbf{u}}(t) = -K\mathbf{x}(t)$ que minimize J e que atenda às restrições dinâmicas do sistema.

Problema do regulador: sistema invariante no tempo

Por simplicidade, porém sem perda de generalidade, admite-se o sistema invariante no tempo, além de matrizes de ponderação $Q \geq 0$ e $P > 0$ simétricas constantes.

- **O Princípio do Mínimo de Pontryagin converte um problema de controle em um problema de de otimização;**
- **a chamada função Hamiltoniana permite, através de multiplicadores de Lagrange, incluir os vínculos dinâmicos do sistema na busca da ação ótima de controle.**

Síntese do regulador: procedimento

- função Hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \mathbf{x}^T Q\mathbf{x} + \mathbf{u}^T R\mathbf{u} + \mathbf{p}^T(A\mathbf{x} + B\mathbf{u}) \text{ com} \tag{4}$$

$$\mathbf{p} = \text{mult. de Lagrange}, \quad \mathbf{x}^T Q\mathbf{x} = \dot{J}, \quad A\mathbf{x} + B\mathbf{u} = \dot{\mathbf{x}}$$

- de acordo como Princípio de Pontryagin,

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}^T} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \ \text{(condição inicial)} \tag{5}$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}^T} = -Q\mathbf{x} - A^T\mathbf{p}, \ \ \mathbf{p}(t_f) = \mathbf{0} \ \text{(condição final)} \tag{6}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{u}^T} = \mathbf{0} = R\mathbf{u} + B^T\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{u} = -R^{-1}B^T\mathbf{p} \tag{7}$$

Síntese do regulador: procedimento

- de (7) em (5)

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}}_{\mathcal{H}} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \tag{8}$$

- adotando

$$\mathbf{p}(t) = P(t)\mathbf{x}(t) \Rightarrow \tag{9}$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \dot{P}\mathbf{x} + P\dot{\mathbf{x}} \Rightarrow \tag{10}$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \dot{P}\mathbf{x} + PA\mathbf{x} - PBR^{-1}B^TP\mathbf{x} \Rightarrow \tag{11}$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -Q\mathbf{x} - A^T \underbrace{\mathbf{p}}_{P\mathbf{x}} \tag{12}$$

Síntese do regulador: procedimento

- de (11) e (12) chega-se à célebre equação diferencial matricial de Riccati:

$$-\dot{P} = PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P, \quad \text{com} \quad P(t_f) = \mathbf{0} \quad (13)$$

A partir de $P(t_f) = 0$, resolve-se a equação de Riccati regressivamente no tempo.

Obtido $P(t) \Rightarrow \mathbf{p}(t) = P(t)\mathbf{x}(t)$, calcula-se o ganho:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= -K(t)\mathbf{x}(t) \\ -R^{-1}B^T P(t)x(t) &= -K(t)\mathbf{x}(t) \\ \Rightarrow K(t) = R^{-1}B^T P(t) & \end{aligned} \quad (14)$$

Finalmente, $\mathbf{u} = -R^{-1}B^T P(t)\mathbf{x}$ é a ação de controle LQR

Síntese do regulador: solução de horizonte infinito

Dadas as condições

1. o sistema é invariante no tempo (matrizes A, B, C constantes);
2. a operação contínua é suficiente longa em comparação com as constantes de tempo intrínsecas do sistema;

a hipótese de tempo infinitamente longo é justificável e adequada. Com isso,

$$\lim_{t \to \infty} \dot{P}(t) = 0 \Rightarrow \tag{15}$$

$$PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \tag{16}$$

A eq. (16) é denominada *equação algébrica de Riccati*, cuja solução é a matriz $P(t) = P_c$, constante. Este é o caso do problema de *horizonte infinito*, em que a matriz de ganhos de realimentação tende a uma constante, ou seja

$$\lim_{t \to \infty} K(t) = K_c = R^{-1}B^T P_c \text{ e } \mathbf{u}_\infty = -K_c\mathbf{x}(t) \tag{17}$$