GABARITO - Lista de Exercícios para Prova 1

1) Single: (1)s, (8)e, 23(m)

a) $1 + 8 + 23 = 32$ bits $\qquad x = (-1)^s . (1,m) . 2^{e-b}$

b) Maior número real representado:

$e = [e_{min}, e_{max}]$:

- $e_{max} = (\underbrace{11111110}_{8\ bits})_2 = 1.2^7 + 1.2^6 + 1.2^5 + 1.2^4 + 1.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0 = (254)_{10}$ ✓
- $e_{min} = (00000001)_2 = 1.2^0 = (1)_{10}$ ✓

Logo, $e = [1, 254] \Rightarrow b = 127 \Rightarrow E = [\underset{L}{-126}, \underset{U}{127}]$

$(E = [1-b, 254-b])$

$$\therefore X_{max} = \underset{1\ bit}{0}\ \underbrace{11111110}_{8\ bits}\ \underbrace{11111111111111111111111}_{23\ bits} =$$

$$= (-1)^0 . 1,11111111111111111111111 \times 2^{\overbrace{(11111110)_2}^{e_{max}} - (127)_{10}}$$

$$= [1.2^0 + (1 - 2^{-23})] \times 2^{127}$$

$$= (2 - 2^{-23}) . 2^{127} = 2^{128} - 2^{104} = 3,40282235 \times 10^{38}$$ ■

c) $$X_{min} = \underset{1\ bit}{0}\ \underbrace{00000001}_{8\ bits}\ \underbrace{00000000000000000000000}_{23\ bits}$$

$$= (-1)^0\ 1,00000000000000000000000 \times 2^{\overbrace{(00000001)_2}^{e_{min}} - (127)_{10}}$$

$$= (1.2^0) \times 2^{-126} = 1,1754944 \times 10^{-38}$$ ■

d) $\beta = 2$, $t = 23 + 1 = 24$, $L = -126$, $U = 127$

$\therefore \mathbb{F}(2, 24, -126, 127)$ //

sendo: β (base), t = mantissa + (1) → dígito implícito

L (menor expoente)

U (maior expoente)

D S T Q Q S S

② $\mathbb{F}(2, 4, -30, 31) \rightarrow$ base: $\beta = 2$

$\quad\ \beta \quad t \quad L \quad U$

→ dígito implícito

mantissa: $t - 1 = 4 - (1) = 3$

menor expoente: $L = -30$

maior expoente: $U = 31$

a) Temos: 1 bit para o sinal ✓

3 bits para a mantissa ✓

Expoente: $E = [-30, 31] \Rightarrow e = [1, 62] \Rightarrow \begin{cases} e_{max} = (62)_{10} \\ e_{min} = (1)_{10} \end{cases}$

$b = 31 \qquad e = E + b$

Passando $(62)_{10}$ para base $\beta = 2$:

$$\begin{array}{llllll} 62 & \underline{|2} & & & & \\ 0 & 31 & \underline{|2} & & & \\ & 1 & 15 & \underline{|2} & & \\ & & 1 & 7 & \underline{|2} & \\ & & & 1 & 3 & \underline{|2} \\ & & & & 1 & 1 \ \underline{|2} \\ & & & & & 1 \quad 0 \end{array}$$

$\therefore (62)_{10} = \underbrace{(111110)_2}_{6\ \text{bits}}$ ✓

Assim: $1(s) + 3(m) + 6(e)$

$= 10$ bits

$[1.2^0 + (1 \cdot 2^{-3})].2^{31}$

b) $x_{max} = (\beta - \beta^{-m})\,\beta^U = (2 - 2^{-3}).2^{31} = 4,0265.10^9$

$[1.2^0].2^{-30}$

c) $x_{min} = 1.\beta^L = 2^{-30} = 9,3132.10^{-10}$

③ Operação elementar é uma operação que quando aplicada preserva a solução do sistema. São elas:

- $E_p(c)$ = multiplicação da linha p por $c \neq 0$
- E_{pq} = troca as linhas p e q
- $E_{pq}(c)$ = soma à linha p a linha q vezes $c \neq 0$

4)
$$\begin{cases} 4x_1 \qquad - 2x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases}$$

a) $A\vec{x} = \vec{b}$:
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}}_{b}$$

b)
$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc|c} & A & & b \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{4} & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 3 & 8 \end{array}\right] \end{array}$$

• zerar a_{21} : $m_{21} = -\dfrac{a_{21}}{a_{11}} = -\dfrac{1}{4}$

$E_{21}(-m_{21})$

$a_{21} = 1 + \left(\dfrac{-1}{4}\right) 4 = 0$; $a_{22} = 2 + \left(\dfrac{-1}{4}\right) . 0 = 2$

$a_{23} = 2 + \left(\dfrac{-1}{4}\right) . (-2) = \dfrac{5}{2}$; $b_2 = 3 + \left(\dfrac{-1}{4}\right)(-1) = \dfrac{13}{4}$

• zerar a_{31} : $m_{31} = -\dfrac{a_{31}}{a_{11}} = -\dfrac{2}{4} = -\dfrac{1}{2}$

$E_{31}(-m_{31})$

$a_{31} = 2 + \left(\dfrac{-1}{2}\right) . 4 = 0$; $a_{32} = -4 + \left(\dfrac{-1}{2}\right) 0 = -4$

$a_{33} = 3 + \left(\dfrac{-1}{2}\right)(-2) = 4$; $b_3 = 8 + \left(\dfrac{-1}{2}\right)(-1) = \dfrac{17}{2}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & \boxed{2} & 5/2 & 13/4 \\ 0 & -4 & 4 & 17/2 \end{array}\right]$$

• zerar a_{32} : $m_{32} = -\dfrac{a_{32}}{a_{22}} = -\dfrac{(-4)}{2} = 2$

$E_{32}(-m_{32})$

$a_{32} = -4 + 2 . 2 = 0$; $a_{33} = 4 + 2 . \dfrac{5}{2} = 9$

$b_3 = \dfrac{17}{2} + 2 . \dfrac{13}{4} = \dfrac{30}{2} = 15$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 5/2 & 13/4 \\ 0 & 0 & 9 & 15 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{cases} 4x_1 + \; - 2x_3 = -1 \\ 2x_2 + 5/2\, x_3 = 13/4 \\ 9x_3 = 15 \end{cases} \quad (*)$$

Resolvendo (*) por substituições sucessivas:

$x_3 = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$; $x_2 = \left(\frac{13}{4} - \frac{5}{2}\left(\frac{5}{3}\right)\right)/2 = \left(\frac{13}{8} - \frac{25}{12}\right) = \frac{39-50}{24} = \frac{-11}{24}$

$x_1 = \left[-1 + 2.\left(\frac{5}{3}\right)\right]/4 = \frac{-3+10}{12} = \frac{7}{12}$

$\therefore \; X = \begin{pmatrix} 7/12 \\ -11/24 \\ 5/3 \end{pmatrix}$

c) Decomposição LU: Já tendo realizado a solução pelo método de Gauss, a decomposição LU pode ser facilmente obtida

$U = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ e $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & -m_{32} & 1 \end{bmatrix}$, sendo $m_{21} = -1/4$

$m_{31} = -1/2$

$m_{32} = 2$

Portanto $\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 \\ 1/2 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}}_{U}$

d) $\det(A) = \cancel{\det(L)}^{1} . \det(U) = \det(U) = 4 . 2 . 9 = 72$

e) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ Para encontrar a decomposição PA = LU, devemos realizar o método de Gauss com pivotamento

$$\begin{bmatrix} \boxed{4} & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

No primeiro passo, o objetivo é zerar os elementos da primeira coluna que estão abaixo da diagonal principal. Note que $4 = \max\{|4|, |1|, |2|\}$. Assim, 4 deve ser o pivô, e neste caso não há necessidade de trocar linhas, pois ele já ocupa a posição a_{11}.

• zerar a_{21}: $m_{21} = \dfrac{-a_{21}}{a_{11}} = \dfrac{-1}{4}$

• zerar a_{31}: $m_{31} = \dfrac{-a_{31}}{a_{11}} = \dfrac{-2}{4} = \dfrac{-1}{2}$

$a_{21} = 1 + \left(\dfrac{-1}{4}\right) \cdot 4 = 0$;

$a_{22} = 2 + \left(\dfrac{-1}{4}\right) \cdot 0 = 2$;

$a_{23} = 2 + \left(\dfrac{-1}{4}\right) \cdot (-2) = \dfrac{5}{2}$.

$a_{31} = 2 + \left(\dfrac{-1}{2}\right) \cdot 4 = 0$

$a_{32} = -4 + \left(\dfrac{-1}{2}\right) 0 = -4$

$a_{33} = 3 + \left(\dfrac{-1}{2}\right) \cdot (-2) = 4$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 5/2 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

Agora, no segundo passo o pivô deve ser -4, pois $|-4| > |2|$. Porém o pivô deve ocupar a posição a_{22}, e por isso precisamos trocar as linhas 2 e 3, utilizando a operação E_{23} em A

$$I_{3\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad E_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = P$$

$$E_{23}[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 5/2 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & \boxed{-4} & 4 \\ 0 & 2 & 5/2 \end{bmatrix}$$

* os elementos m_{21} e m_{31} também devem ser trocados na matriz L.

• Agora o objetivo é zerar os elementos da segunda coluna que estão abaixo da diagonal principal

• zerar a_{32}: $m_{32} = -\frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$

$a_{32} = 2 + \frac{1}{2}(-4) = 0$

$a_{33} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \cdot 4 = \frac{9}{2}$

Assim obtemos $U = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 9/2 \end{bmatrix}$; $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

e $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{31} & 1 & 0 \\ -m_{21} & -m_{32} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$

Note que os elementos m_{31} e m_{21} aparecem trocados na matriz L. Isso ocorre por causa da troca de linhas do pivotamento.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 9/2 \end{bmatrix}}_{U}$$

f) $\det(PA) = \det(LU) = \det(L) \cdot \det(U) = 1 \cdot 4 \cdot (-4) \cdot 9/2 = -72$

Portanto, $\det(PA) = -72 \neq 72 = \det(A)$

Determinante de PA é diferente do determinante de A ($\det(PA) = -\det(A)$), pois cada operação de troca de linhas $[E_{pq}]$ inverte o sinal do determinante.

g) Queremos encontrar A^{-1} tal que $A.A^{-1} = I$

$$A \cdot \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} a^{-1}_{11} \\ a^{-1}_{21} \\ a^{-1}_{31} \end{matrix}}_{\vec{a}^{-1}_1} & \underbrace{\begin{matrix} a^{-1}_{12} \\ a^{-1}_{22} \\ a^{-1}_{32} \end{matrix}}_{\vec{a}^{-1}_2} & \underbrace{\begin{matrix} a^{-1}_{13} \\ a^{-1}_{23} \\ a^{-1}_{33} \end{matrix}}_{\vec{a}^{-1}_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}}_{\vec{e}_1} & \underbrace{\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}}_{\vec{e}_2} & \underbrace{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}}_{\vec{e}_3} \end{bmatrix}$$

Assim, definimos o sistema

$$A . \vec{a}^{-1}_i = \vec{e}_i$$

ou seja $\vec{a}^{-1}_i$ são os vetores coluna da inversa de A

Para resolver este problema usando a decomposição $PA = LU$, temos

$$A\vec{x} = \vec{b}$$
$$PA\vec{x} = P\vec{b}$$
$$L\underbrace{U\vec{x}}_{\vec{y}} = P\vec{b} \longrightarrow \begin{array}{ll} L\vec{y} = P\vec{b} & (1) \\ U\vec{x} = \vec{y} & (2) \end{array}$$

Conhecendo

$$U = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 9/2 \end{bmatrix} ; \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} ; \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

• Para $i = 1$:

$\rightarrow L\vec{y} = P\vec{e}_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} y_1 = 1 \\ y_2 = -1/2 \\ y_3 = -1/2 \end{array}$$

$\rightarrow U\vec{x} = \vec{y}$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 9/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = -1/9 \\ x_2 = (1/2 - 4/9) \cdot \frac{1}{4} = 1/72 \\ x_1 = (1 - 2/9) \cdot \frac{1}{4} = 7/36 \end{array}$$

· Para $i=2$: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow L\vec{y} = P\vec{e}_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 1 \end{array}$$

$\Rightarrow U\vec{x} = \vec{y}$ $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 9/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = 2/9 \\ x_2 = (4 \cdot 2/9)\frac{1}{4} = 2/9 \\ x_1 = (2 \cdot 2/9)\frac{1}{4} = 1/9 \end{array}$

· Para $i=3$: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow L\vec{y} = P\vec{e}_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} y_1 = 0 \\ y_2 = 1 \\ y_3 = 1/2 \end{array}$$

$\Rightarrow U\vec{x} = \vec{y}$ $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 9/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = 1/9 \\ x_2 = (-1 + 4/9)\frac{1}{4} = -5/36 \\ x_1 = 2/9 \cdot 1/4 = 2/36 \end{array}$

· Portanto, $\vec{a}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 7/36 \\ 1/72 \\ -1/9 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1/9 \\ 2/9 \\ 2/9 \end{pmatrix}$; $\vec{a}_3^{-1} = \begin{pmatrix} 2/36 \\ -5/36 \\ 1/9 \end{pmatrix}$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1^{-1} & \vec{a}_2^{-1} & \vec{a}_3^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/36 & 1/9 & 2/36 \\ 1/72 & 2/9 & -5/36 \\ -1/9 & 2/9 & 1/9 \end{bmatrix}$$ ■

D S T Q Q S S

(5) Um método iterativo é um procedimento que fornece uma sequência de aproximantes da solução, cada uma das quais obtida das anteriores pela repetição do mesmo tipo de processo:

$$x^k = f(x^{k-1})$$

e que quando convergente, tem-se

$$\lim_{k \to \infty} \| x^k - x \| = 0$$

onde x é a solução do problema.

Como dificilmente o caso $x^k = x$ será atingido, é necessário estabelecer um critério de parada para que ao atingir uma precisão satisfatória ou um número máximo de iterações o processo seja interrompido

(6) O método de Gauss-Seidel converge mais rápido geralmente, visto que as variáveis já atualizadas são utilizadas imediatamente, não sendo necessário esperar a próxima iteração como ocorre no método de Gauss-Jacobi

(7) $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}}_{U}$

Se A é triangular superior, então $U = A$ e L é a matriz identidade.

(8) • $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{bmatrix}$

• zerar a_{21}: $m_{21} = \frac{-a_{21}}{a_{11}} = -a_{21}$

$a_{21} = a_{21} + (-a_{21}).1 = 0 \quad a_{22} = 1 + (-a_{21}).0 = 1$

$a_{23} = 0 + (-a_{21}).0 = 0$

• zerar a_{31}: $m_{31} = \frac{-a_{31}}{a_{11}} = -a_{31}$

$a_{31} = a_{31} + (-a_{31}).1 = 0 \quad a_{32} = a_{32} + (-a_{31}).0 = a_{32}$

$a_{33} = 1 + (-a_{31}).0 = 1$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_{32} & 1 \end{bmatrix}$

• zerar a_{32}: $m_{32} = \frac{-a_{32}}{a_{22}} = -a_{32}$

$a_{32} = a_{32} + (-a_{32}).1 = 0$

$a_{33} = 1 + (-a_{32}).0 = 1$

$\downarrow$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$ e $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & -m_{32} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{bmatrix} = A$

Portanto, se A é triangular inferior com 1's na diagonal principal, então $L = A$ e U é a matriz identidade.

• $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

• zerar a_{21}: $m_{21} = \frac{-a_{21}}{a_{11}}$

$a_{21} = a_{21} + \left(\frac{-a_{21}}{a_{11}}\right).a_{11} = 0; \quad a_{22} = a_{22} + \left(\frac{-a_{21}}{a_{11}}\right).0 = a_{22}$

$a_{32} = 0 + \left(\frac{-a_{21}}{a_{11}}\right).0 = 0$

• zerar a_{31}: $m_{31} = \frac{-a_{31}}{a_{11}}$

$a_{31} = a_{31} + \left(\frac{-a_{31}}{a_{11}}\right).a_{11} = 0; \quad a_{32} = a_{32} + \left(\frac{a_{31}}{a_{11}}\right).0 = a_{32}$

$a_{33} = a_{33} + \left(\frac{-a_{31}}{a_{11}}\right).0 = a_{33}$

D S T Q Q S S

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

• Zerar a_{32}: $m_{32} = \frac{-a_{32}}{a_{22}}$

$a_{32} = a_{32} + \left(-\frac{a_{32}}{a_{22}}\right) \cdot a_{22} = 0$; $a_{33} = a_{33} + \left(\frac{-a_{32}}{a_{22}}\right) \cdot 0 = a_{33}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} = U \; ; \; L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & -m_{32} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21}/a_{11} & 1 & 0 \\ a_{31}/a_{11} & a_{32}/a_{22} & 1 \end{bmatrix}$$

(9) $f(x) = 4x - e^x = 0$

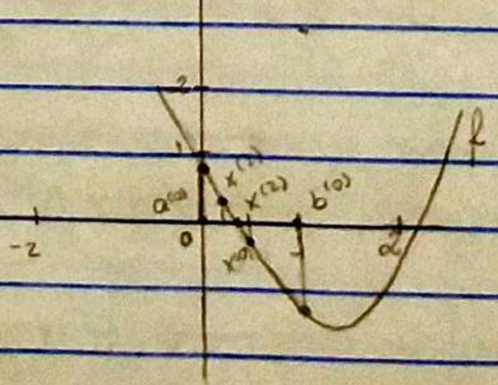
• $[0,1]$: $f(0) = 4 \cdot 0 - e^0 = -1 < 0$
$f(1) = 4 \cdot 1 - e^1 = 4 - e = 1{,}28 > 0$ $\Big\}$ $f(0) \cdot f(1) < 0$

$\therefore$ a função $f(x)=0$ possui raiz no intervalo $(0,1)$

• $[2,3]$: $f(2) = 4 \cdot 2 - e^2 = 8 - e^2 = 0{,}61 > 0$
$f(3) = 4 \cdot 3 - e^3 = 12 - e^3 = -8{,}09 < 0$ $\Big\}$ $f(2) \cdot f(3) < 0$

$\therefore$ a função $f(x)=0$ possui raiz no intervalo $(2,3)$

(10) a) $\exp(x) - 4x = 0 = f(x)$



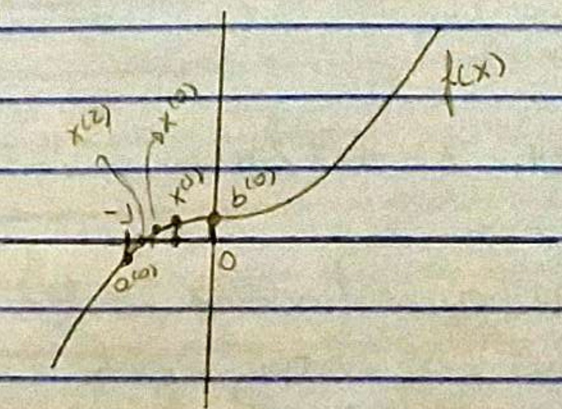
$a^{(0)} = 0 \rightarrow f(a^{(0)}) = 1$
$b^{(0)} = 1 \rightarrow f(b^{(0)}) = -1{,}28$ $\Big\}$ ✓
$x^{(0)} = 0{,}5 \rightarrow f(x^{(0)}) = -0{,}35 < 0$
Então $b^{(1)} = x^{(0)}$ e $a^{(1)} = a^{(0)}$

$a^{(1)} = 0 \rightarrow f(a^{(1)}) = 1$
$b^{(1)} = 0{,}5 \rightarrow f(b^{(1)}) = -0{,}35$ $\Big\}$ ✓
$x^{(1)} = 0{,}25 \rightarrow f(x^{(1)}) = 0{,}28 > 0$
Então $a^{(2)} = x^{(1)}$ e $b^{(2)} = b^{(1)}$

$a^{(2)} = 0{,}25 \rightarrow f(a^{(2)}) = 0{,}28$
$b^{(2)} = 0{,}5 \rightarrow f(b^{(2)}) = -0{,}35$ $\Big\}$ ✓
$x^{(2)} = 0{,}375 \rightarrow f(x^{(2)}) = -0{,}045 < 0$
Então $a^{(3)} = a^{(2)}$ e $b^{(3)} = x^{(2)}$ (...)

b) $x^3 + \cos(x) = 0 = f(x)$

Vamos escolher o intervalo $[-1, 0]$



$a^{(0)} = -1 \to f(a^{(0)}) = -0{,}46$ ✓

$b^{(0)} = 0 \to f(b^{(0)}) = 1$

$x^{(0)} = -0{,}5 \to f(x^{(0)}) = 0{,}75 > 0$

Então $a^{(1)} = a^{(0)}$ e $b^{(1)} = x^{(0)}$

$a^{(1)} = -1 \to f(a^{(1)}) = -0{,}46$ ✓

$b^{(1)} = -0{,}5 \to f(b^{(1)}) = 0{,}75$

$x^{(1)} = -0{,}75 \to f(x^{(1)}) = 0{,}31 > 0$

Então $a^{(2)} = a^{(1)}$ e $b^{(2)} = x^{(1)}$

$a^{(2)} = -1 \to f(a^{(2)}) = -0{,}46$

$b^{(2)} = -0{,}75 \to f(b^{(2)}) = 0{,}31$

$x^{(2)} = -0{,}875 \to f(x^{(2)}) = -0{,}029 < 0$

Então $a^{(3)} = x^{(2)}$ e $b^{(3)} = b^{(2)}$ (...)

(1) Semelhanças:

· Ambos os métodos (Newton e Secante) são métodos iterativos

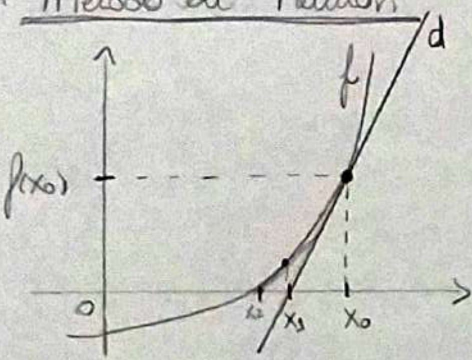
· Ambos os métodos possuem uma justificativa geométrica, um considerando a reta tangente ao gráfico da função f, e o outro considerando a reta secante.

Diferenças:

· O método de Newton requer o cálculo de $f'(x)$, enquanto o método da secante não.

· O método de Newton necessita de um chute inicial $x^{(0)}$, enquanto o método da secante necessita de $x^{(0)}$ e $x^{(1)}$

* Método de Newton



Sabemos que a eq. da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é dada por:

$$y - f(x_0) = f'(x_0).(x - x_0)$$

↳ coef. angular da reta tangente

Note que o ponto $(x_1, 0)$ pertence à reta d, logo, podemos escrever

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

$$\Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

E no caso geral: $$\boxed{x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}}$$

Geometricamente, dada a aproximação x_0, então x_1 é definido como sendo a abcissa do ponto de interseção do eixo horizontal com a reta tangente que passa pelo ponto $(x_0, f(x_0))$.

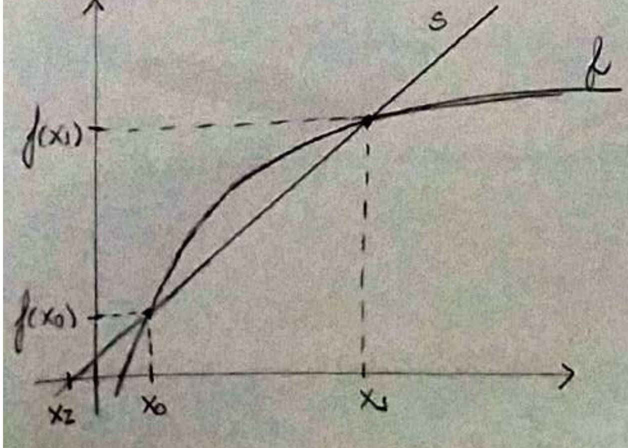
O método da Secante consiste numa modificação do método de Newton a partir da substituição da derivada pelo quociente das diferenças:

$$f'(x_k) \cong \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

E no caso geral:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})\,(x^{(k)} - x^{(k-1)})}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}$$

* Método da Secante



Geometricamente, dadas as aproximações x_0 e x_1, então x_2 é definido como sendo a abcissa do ponto de interseção do eixo x com a secante que passa por $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$.

12) a) V

b) V

c) F, pois $\det(A) = \det(L) \cdot \det(U)$

d) F, pois $\det(PA) = \det(L) \cdot \det(U)$

e) V

f) F, pois A precisa satisfazer a condição dos menores principais

g) V

13 Temos $f(\vec{x}) \approx \vec{f}(\vec{a}) + J_{\vec{f}}(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a})$
como sendo a aproximação de Taylor de ordem 1 em torno de $\vec{a}$ para uma função $\vec{f}(\vec{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qualquer, onde J_f é a matriz Jacobiana de $\vec{f}$

No método de Newton, a cada iteração, aproximamos a função $\vec{f}(\vec{x})$ em torno de $\vec{x}^{(k)}$ e encontramos o valor de $x^{(k+1)}$ correspondente ao ponto em que a aproximação é zero, ou seja:

$$\vec{f}(\vec{x}^{(k+1)}) = \vec{f}(\vec{x}^{(k)}) + J_{\vec{f}}(\vec{x}^{(k)}) \, (x^{(k+1)} - x^{(k)}) = 0$$

$$J_{\vec{f}}(\vec{x}^{(k)}) \, (\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}) = -\vec{f}(\vec{x}^{(k)})$$

$$\boxed{\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - \vec{J}_{f}^{-1}(\vec{x}^{(k)}) \cdot \vec{f}(\vec{x}^{(k)})}$$

(15) É necessário que o determinante da matriz Jacobiana de f aplicada em $\vec{x}^{(k)}$ seja diferente de zero, para que sua inversa exista