Agenor de Toledo Fleury & Flávio Celso Trigo

Escola Politécnica da USP
Departmento de Engenharia Mecânica

2024

PME 3481 – Controle e aplicações

Observadores de estado

Introdução

- Diversos procedimentos analíticos sofisticados para o projeto de sistemas de controle baseiam-se na suposição de que o vetor de estado completo seja mensurável;
- tais procedimentos especificam o valor atual de entrada de controle como uma função do vetor de estado atual.
- a razão matemática e ao mesmo tempo lógica para a escolha de tal estratégia é simples:
  - como o sistema evolui obdecendo à suas equaçoes de estado, uma estratégia de controle que visa influenciar o comportamento futuro do sistema deve basear-se no valor atual do vetor de estado.

> Um exemplo disso é o método de alocação de polos, cuja escolha dos autovalores do sistema em malha fechada baseia-se na hipótese de que todas as variáveis de estado são conhecidas.

Introdução

- No entanto, nem todas as variáveis de estado podem ser diretamente medidas; muito pelo contrário;
- nessas situações as estratégias de controle *devem necessariamente ser baseadas em valores provenientes de um subconjunto das variáveis de estado, ou mesmo de todas elas.*

> Para resolver este problema, é possível *construir uma aproximação do vetor de estado completo com base apenas no vetor de medidas existente*. A partir daí, utiliza-se o *estado aproximado* em conjunto com modelos de controle que requerem o conhecimento do estado completo.

Formulação

O processo de estimação é normalmente denominado *observação* e o "dispositivo" capaz de estimar as variáveis de estado tanto mensuráveis quanto não-mensuráveis é denominado *observador de estados*.

O observador nada mais é que um sistema dinâmico determinístico cujas entradas são as saídas mensuráveis do sistema dinâmico original que se deseja controlar e cuja saída é o vetor de estado completo do sistema original.

Luenberger (1964)foi o responsável pela formulação matemática dos observadores de estados.

Formulação: observadores para sistemas contínuos

Para o que se segue, considera-se o sistema invariante no tempo e completamente observável em espaço de estados dado por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \tag{1}$$

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) \tag{2}$$

com $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^m$, $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{n\times n}$, $B \in \mathcal{R}^{m\times n}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{R}^{p\times 1}$, $C \in \mathcal{R}^{p\times n}$

Observações: *(i)* as matrizes A, B e C poderiam ser variantes no tempo, sem invalidar o desenvolvimento apresentado; *(ii)* a saída do sistema poderia incluir também um termo em $\mathbf{u}(t)$ na forma $\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t)$ que, para simplificar algebricamente o problema, foi omitido.

Formulação
1. Observador trivial

- A solução mais simples para o problema de estimar o estado de um sistema é adotar um observador cuja dinâmica copie integralmente a dinâmica do sistema original;
- note que, mesmo que alguma medida do sistema real esteja sendo efetuada e seja disponível, nessa arquitetura ela não será utilizada.

O observador trivial é uma cópia do sistema original. Portanto,

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = A\mathbf{z}(t) + B\mathbf{u}(t) \tag{3}$$

Como $\mathbf{u}(t)$ são ações de controle conhecidas, adotando-se uma condição inicial $\mathbf{z}(0)$ para o observador, espera-se que $(z)(t) \to \mathbf{x}(t)$ em tempo adequado.

Formulação
1. Observador trivial (cont.)

- A medida do tempo adequado é dada pela velocidade de convergência do valor estimado para o valor real, isto é, a velocidade com que o *erro de estimação*

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{z}(t) - \mathbf{x}(t) \tag{4}$$

tende a zero;

- Subtraindo a eq. 1 da eq. 3 obtemos

$$\begin{aligned} [\dot{\mathbf{z}}(t) - \dot{\mathbf{x}}(t)] &= A[\mathbf{z}(t) - \mathbf{x}(t)] \quad \text{ou} \\ \dot{\mathbf{e}}(t) &= A\mathbf{e}(t) \end{aligned} \tag{5}$$

Formulação
1. Observador trivial (cont.)

Percebe-se, da eq. 5, que:

- **o erro na estimativa tende a zero apenas se o sistema original for estável, o que é determinado pela matriz A;**
- **mais ainda, essa tendência é apenas na velocidade de convergência determindada pelos autorvalores do sistema original.**

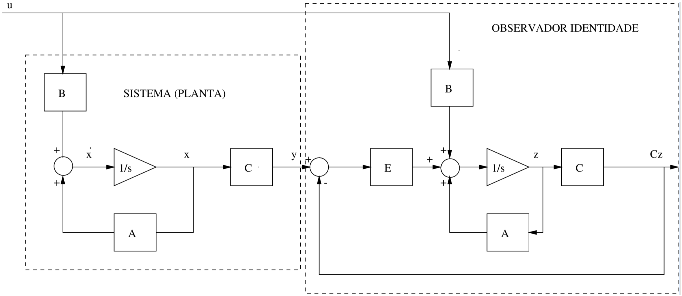
> Uma maneira de superar tais limitaçoes é a escolha de observados mais gerais, conforme será visto na seqüência.

Formulação
2. Observador identidade

Considere o seguinte observador de estados para o sistema dado pelas equações 1 e 2,

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = A\mathbf{z}(t) + E[\mathbf{y}(t) - C\mathbf{z}(t)] + B\mathbf{u}(t), \qquad (6)$$
$$\text{com } \mathbf{z} \in \mathcal{R}^n, \ E \in \mathcal{R}^{n \times p}$$

denominado **observador identidade**.



Formulação
2. Observador identidade (cont.)

- Utilizando $\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t)$ na eq. 6,

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = A\mathbf{z}(t) + EC[\mathbf{x}(t) - \mathbf{z}(t)] + B\mathbf{u}(t) \tag{7}$$

- Subtraindo a primeira das eqs. 2 da eq. 7,

$$[\dot{\mathbf{z}}(t) - \dot{\mathbf{x}}(t)] = [A - EC][\mathbf{z} - \mathbf{x}] \tag{8}$$

> Se o observador for inicializado de tal forma que $\mathbf{z}(0) = \mathbf{x}(0)$, então $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t)$ para todo $t > 0$ ou seja, o o estado estimado pelo observador segue o estado do sistema original.

Formulação
2. Observador identidade (cont.)

- Caso $\mathbf{z}(0) \neq \mathbf{x}(0)$ o vetor de erro $\mathbf{e}(t) = \mathbf{z}(t) - \mathbf{x}(t)$ é governado pelo sistema homogêneo

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = [A - EC]\mathbf{e}(t) \tag{9}$$

- Se a matriz $[A - EC]$ do sistema descrito pela eq. 9 for assintoticamente estável, o vetor de erros tenderá a zero na taxa determinada pelos autovalores da matriz $[A - EC]$, que podem ser alterados dependendo da matriz E adotada.

> *Teorema do Observador Identidade* (Luenberger)
> Dado um sistema completamente observável (eq. 2), pode-se construir um observador identidade na forma da eq. 6, cujos coeficientes do polinômio característico (que fornece os autovalores) podem ser arbitrariamente escolhidos.

Formulação
3. Observador de ordem reduzida

- O observador identidade possui redundância pois, embora eventualmente $\mathbf{p}$ medidas estejam disponíveis, todo o vetor de estado é estimado;
- é lógico pensar que um observador de ordem $n - p$ possa ser projetado;
- dessa forma, o vetor completo de estado seria reconstituído a partir das partir das $n - p$ varíaveis de estado estimadas pelo observador adicionadas às p variáveis medidas;
- Este procedimento é efetivamente possível, conforme será descrito a seguir. O observador resultante é também denominado *Observador de Luenberger.*

3. Observador de ordem reduzida (cont.)

- Seja novamente o sistema dinâmico dado pelas eqs. 1 e 2 com C de posto p $\Rightarrow$ todas as medidas são linearmente independentes.
- Considera-se uma matriz $V \in \mathcal{R}^{(n-p)\times n}$ tal que a matriz $P_{n\times n}$ construída como

$$P = \begin{bmatrix} V \\ C \end{bmatrix}$$

  seja não-singular, o que é sempre possível desde que C tenha posto p.
- Introduz-se a transformação de variáveis

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = P\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} V \\ C \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \tag{10}$$

3. Observador de ordem reduzida (cont.)

- Com isso,

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V\mathbf{x}(t) \\ C\mathbf{x}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} \in \mathcal{R}^{(n-p)\times 1}, \tag{11}$$

  e, assim, o vetor de saídas é igual às p últimas variáveis do estado transformado $\tilde{\mathbf{x}}(t)$.

- Dado que $\mathbf{x}(t) = P^{-1}\tilde{\mathbf{x}}(t)$,

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = P\dot{\mathbf{x}}(t) = PA\mathbf{x}(t) + PB\mathbf{u}(t) = PAP^{-1}\tilde{\mathbf{x}}(t) + PB\mathbf{u}(t),$$

  o sistema da eq. 11 na forma particionada fica:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{w}}(t) \\ \dot{\mathbf{y}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \tag{12}$$

3. Observador de ordem reduzida (cont.)

- De 12 pode-se extrair um subsistema de ordem $(n-p)$ que possui como entradas as quantidades conhecidas $\mathbf{y}(t)$ e $\mathbf{u}(t)$.
- Multiplicando a parte inferior do sistema da eq. 12 por uma matriz arbitrária $E \in \mathcal{R}^{(n-p)\times p}$ e subtraindo da parte superior conduz à sequência de operações

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{w}}(t) - E\dot{\mathbf{y}}(t) &= (A_{11} - EA_{21})\mathbf{w}(t) + (A_{12} - EA_{22})\mathbf{y}(t) \\ &\quad + (B - EB_2)\mathbf{u}(t),\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{w}}(t) - E\dot{\mathbf{y}}(t) &= (A_{11} - EA_{21})[\mathbf{w}(t) - E\mathbf{y}(t)] \\ &\quad [A_{11}E - EA_{21}E + A_{12} - EA_{22}]\mathbf{y}(t) \\ &\quad + (B_1 - EB_2)\mathbf{y}(t)\end{aligned} \tag{14}$$

3. Observador de ordem reduzida (cont.)

- Fazendo Fazendo $\mathbf{v}(t) = \mathbf{w}(t) - E\mathbf{y}(t)$ obtém-se

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = (A_{11} - EA_{21})\mathbf{v}(t) + [A_{11}E - EA_{21}E + A_{12} - EA_{22}]\mathbf{y}(t) + (B_1 - EB_2)\mathbf{u}(t) \tag{15}$$

- Nota-se que
  - $\mathbf{v}(t)$ é desconhecida;
  - $\mathbf{y}(t)$ e $\mathbf{u}(t)$ são entradas conhecidas;
  - não existe qualquer observação de $\mathbf{v}(t)$, de dimensão $(n-p)$.
- Para obtê-lo, constrói-se um observador simplesmente copiando as equaçoes dinâmicas do sistema dado por 15:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = (A_{11} - EA_{21})\mathbf{z}(t) + [A_{11}E - EA_{21}E + A_{12} - EA_{22}]\mathbf{y}(t) + (B_1 - EB_2)\mathbf{u}(t) \tag{16}$$

3. Observador de ordem reduzida (cont.)

- A eq. 16 é um observador para o sistema da eq. 12;
- como a dimensão de $\mathbf{z}(t)$ é $(n-p)$, número mínimo suficiente para completar a estimação do estado original, o observador é denominado *observador de ordem reduzida* ou *observador de Luenberger*.
- A dinâmica do erro é dada por 16-15:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) - \dot{\mathbf{v}}(t) = (A_{11} - EA_{21})[\mathbf{z}(t) - \mathbf{v}(t)], \tag{17}$$

ou seja, o erro evolui na forma

$$dot\mathbf{e}(t) = (A_{11} - EA_{21})\mathbf{e}(t). \tag{18}$$

> Observe que $\mathbf{z}(t) \rightarrow \mathbf{v}(t)$ na velocidade determinada pelos autovalores da matriz $(A_{11} - EA_{21})$.

3. Observador de ordem reduzida (cont.)

- Com $\mathbf{z}(t)$ do observador, o estado dado pela eq. 12 é estimado por $\hat{\mathbf{w}}(t)$ e $\hat{\mathbf{y}}(t)$ determinados através de

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{w}}(t) &= \mathbf{z}(t) + E\mathbf{y}(t) \\ \hat{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{y}(t) \end{aligned} \qquad (19)$$

- Com $\mathbf{w}(t)$ estimado por $\hat{\mathbf{w}}(t)$, retorna-se à estimativa de $\mathbf{x}$:
  - como

$$\hat{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{w}}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix} \text{ e } \tilde{\mathbf{x}}(t) = P\mathbf{x}(t),$$

basta utilizar a relação $\hat{\mathbf{x}}(t) = P^{-1}\hat{\tilde{\mathbf{x}}}(t)$.

Formulação
3. Observador de ordem reduzida (cont.)

- A eficiência do observador depende diretamente dos autovalores da matriz do sistema do observador, $[A_{11} - EA_{12}]$.
- Demonstra-se que se o sistema original dado pela eq. 2 for completamente observável, então o par A_{21}, A_{11} também o será.
- Assim, é possível selecionar os autovalores de $[A_{11} - EA_{12}]$ arbitrariamente por uma escolha apropriada de E, o que proporciona ao observador de ordem reduzida a mesma flexibilidade dinâmica que o observador identidade possui.

Dúvidas?