Controle e Aplicações • Aula 3.3

Acompanhamento de referências

Prof. Dr. Renato Maia Matarazzo Orsino

1 Seguidor via controle linear-quadrático
2 Modelos assumidos para variáveis exógenas
3 *Ação integral em realimentação

Seguidor via controle linear-quadrático – horizonte de tempo finito

Um controlador que faça o estado $\mathbf{x}$ do sistema *acompanhar um sinal de referência prescrito* $\mathbf{x}_\mathrm{r}(t)$, $t \in [0, t_1]$, pode ser obtido via *minimização de um índice de desempenho quadrático J para um horizonte de tempo finito*:

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_0^{t_1} \left[(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\mathrm{r})^\top \boldsymbol{Q} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_\mathrm{r}) + \mathbf{u}^\top \boldsymbol{R} \mathbf{u} \right] \mathrm{d}t + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_\mathrm{r})^\top \boldsymbol{Q}_1 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_\mathrm{r}) \Big|_{t=t_1}$$

com $\boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{Q}_1$ sendo *matrizes simétricas e semi-definidas positivas* e $\boldsymbol{R}$ sendo uma *matriz simétrica e definida positiva*.

Uma vez que o sistema deve satisfazer à equação dinâmica:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{B}\mathbf{u}$$

tal condição deve ser tratada como uma *restrição* do problema de otimização. Utilizando o método dos *multiplicadores de Lagrange*, pode-se transformar o problema de *otimização restrita* da função $J(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ em um problema de *otimização irrestrita* de uma função $\bar{J}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda)$.

Solução via método dos multiplicadores de Lagrange

Defina-se a função objetivo estendida $\bar{J}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$:

$$\bar{J}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \int_0^{t_1} \left[(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\mathrm{r})^\top \boldsymbol{Q} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_\mathrm{r}) + \mathbf{u}^\top \boldsymbol{R} \mathbf{u} + 2\boldsymbol{\lambda}^\top \left(\boldsymbol{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{B}\mathbf{u} - \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} \right) \right] \mathrm{d}t$$
$$+ (\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}_\mathrm{r}(t_1))^\top \boldsymbol{Q}_1 (\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}_\mathrm{r}(t_1))$$

Para a minimização de $\bar{J}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$, verifica-se primeiramente sob quais condições $\delta\bar{J} = 0$.

$$\delta\bar{J} = 2 \int_0^{t_1} \left[\delta\mathbf{x}^\top \boldsymbol{Q} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_\mathrm{r}) + \delta\mathbf{u}^\top \boldsymbol{R}\mathbf{u} + \delta\boldsymbol{\lambda}^\top \left(\boldsymbol{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{B}\mathbf{u} - \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} \right) \right.$$
$$\left. + \boldsymbol{\lambda}^\top \left(\boldsymbol{A}\delta\mathbf{x} + \boldsymbol{B}\delta\mathbf{u} - \frac{\mathrm{d}\delta\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} \right) \right] \mathrm{d}t + 2\delta\mathbf{x}(t_1)^\top \boldsymbol{Q}_1 (\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}_\mathrm{r}(t_1))$$

Integrando por partes, verifica-se que:

$$\int_0^{t_1} \boldsymbol{\lambda}^\top \frac{\mathrm{d}\delta\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}\, \mathrm{d}t = \boldsymbol{\lambda}^\top \delta\mathbf{x} \Big|_0^{t_1} - \int_0^{t_1} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}^\top}{\mathrm{d}t} \delta\mathbf{x}\, \mathrm{d}t$$

Solução via método dos multiplicadores de Lagrange

Notando ainda que o estado inicial $\mathbf{x}(0)$ deve ser tratado como um dado do problema e, assim, $\delta\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$, a condição $\delta\bar{J} = 0$ se torna:

$$0 = \int_0^{t_1} \left\{ \delta\mathbf{x}^\top \left[\boldsymbol{Q}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\mathrm{r}) + \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{\lambda} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}}{\mathrm{d}t} \right] + \delta\mathbf{u}^\top \left[\boldsymbol{R}\mathbf{u} + \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{\lambda} \right] + \delta\boldsymbol{\lambda}^\top \left[\boldsymbol{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{B}\mathbf{u} - \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} \right] \right\} \mathrm{d}t + \delta\mathbf{x}(t_1)^\top \left[\boldsymbol{Q}_1 \big(\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}_\mathrm{r}(t_1) \big) - \boldsymbol{\lambda}(t_1) \right]$$

Sendo as variações $\delta\mathbf{x}$, $\delta\mathbf{u}$, $\delta\boldsymbol{\lambda}$ e $\delta\mathbf{x}(t_1)$ independentes, decorre que:

$$\boldsymbol{Q}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\mathrm{r}) + \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{\lambda} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}}{\mathrm{d}t} = -\boldsymbol{Q}\mathbf{x} - \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{Q}\mathbf{x}_\mathrm{r} \qquad ①$$

$$\boldsymbol{R}\mathbf{u} + \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} = -\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{\lambda} \qquad ②$$

$$\boldsymbol{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{B}\mathbf{u} - \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\mathbf{x} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{\lambda} \qquad ③$$

$$\boldsymbol{Q}_1 \big(\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}_\mathrm{r}(t_1) \big) - \boldsymbol{\lambda}(t_1) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\lambda}(t_1) = \boldsymbol{Q}_1\mathbf{x}(t_1) - \boldsymbol{Q}_1\mathbf{x}_\mathrm{r}(t_1) \qquad ④$$

Solução via método dos multiplicadores de Lagrange

Buscando para λ uma solução *afim* em termos do estado $\mathbf{x}$ do sistema:

$$\lambda(t) = \boldsymbol{P}(t)\mathbf{x}(t) - \eta(t) \qquad ⑤$$

Da equação ②, $\mathbf{u}(t) = -\boldsymbol{R}^{-1}(t)\boldsymbol{B}(t)^\top\lambda(t)$ e, portanto, a *lei de controle* proposta adquire a forma:

$$\mathbf{u}(t) = -\boldsymbol{K}(t)\mathbf{x}(t) + \tilde{\mathbf{u}}(t) \quad \text{com} \quad \boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{P} \quad \text{e} \quad \tilde{\mathbf{u}} = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\top\eta$$

Tomando a derivada temporal de ⑤ e utilizando ③, obtém-se:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x} + \boldsymbol{P}\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} \\ &= \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{P}\right]\mathbf{x} - \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\top\eta\end{aligned}$$

Por outro lado, substitindo ⑤ em ①, obtém-se:

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} = \left[-\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{P}\right]\mathbf{x} + \boldsymbol{A}^\top\eta + \boldsymbol{Q}\mathbf{x}_\mathrm{r}$$

Solução via método dos multiplicadores de Lagrange

As duas expressões para $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}}{\mathrm{d}t}$ serão equivalentes se, e somente se, $\forall \mathbf{x}$:

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q}\right]\mathbf{x} - \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}}{\mathrm{d}t} + \left(\boldsymbol{A}^\top - \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\top\right)\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{Q}\mathbf{x}_\mathrm{r}\right] = \mathbf{0}$$

Além disso, da equação ④ também deve ser verdadeiro, qualquer seja o valor de $\mathbf{x}(t_1)$:

$$\boldsymbol{\lambda}(t_1) = \boldsymbol{P}(t_1)\mathbf{x}(t_1) - \boldsymbol{\eta}(t_1) = \boldsymbol{Q}_1\mathbf{x}(t_1) - \boldsymbol{Q}_1\mathbf{x}_\mathrm{r}(t_1)$$

Assim, é suficiente que $\boldsymbol{P}(t)$ e $\boldsymbol{\eta}(t)$ satisfaçam às seguintes EDOs:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} = -\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{P} - \boldsymbol{Q} \quad \text{com} \quad \boldsymbol{P}(t_1) = \boldsymbol{Q}_1$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}}{\mathrm{d}t} = -\left(\boldsymbol{A}^\top - \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\top\right)\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{Q}\mathbf{x}_\mathrm{r} \quad \text{com} \quad \boldsymbol{\eta}(t_1) = \boldsymbol{Q}_1\mathbf{x}_\mathrm{r}(t_1)$$

Seguidor via controle linear-quadrático – horizonte de tempo finito

Conclui-se que, no projeto de um *seguidor via controle linear-quadrático*, a matriz $\boldsymbol{P}(t)$ deve satisfazer à *mesma equação diferencial de Riccati* obtida na síntese de um *regulador linear-quadrático (LQR)*. Consequentemente:

> A matriz de ganho $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{P}$ do projeto de um *seguidor* deve ser a *mesma* adotada no projeto do respectivo *regulador*.

A *dinâmica do seguidor em malha fechada* é descrita pela equação ③:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{P})\mathbf{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{\eta} \quad \text{com} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

Em particular, definindo a *matriz de estados em malha fechada*:

$$\overline{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{P})$$

a equação ③ simplifica-se para a forma:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \overline{\boldsymbol{A}}\mathbf{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{\eta} \quad \text{com} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

Seguidor via controle linear-quadrático – horizonte de tempo finito

A equação diferencial para a determinação de $\boldsymbol{\eta}(t)$ também pode ser simplificada a partir da definição de $\overline{\boldsymbol{A}}$:

$$\left(\boldsymbol{A}^\top - \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\top\right) = \left(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{P}\right)^\top = \overline{\boldsymbol{A}}^\top$$

Assim:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}}{\mathrm{d}t} = -\overline{\boldsymbol{A}}^\top\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{Q}\mathbf{x}_\mathrm{r} \quad \text{com} \quad \boldsymbol{\eta}(t_1) = \boldsymbol{Q}_1\mathbf{x}_\mathrm{r}(t_1)$$

**Nota* – a solução do problema poderia alternativamente ser formulada colocando as equações ① e ③ na seguinte forma matricial:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\begin{array}{c}\mathbf{x}\\ \hline \boldsymbol{\lambda}\end{array}\right] = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c}\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\top\\ \hline -\boldsymbol{Q} & -\boldsymbol{A}^\top\end{array}\right]}_{\text{matriz Hamiltoniana } \boldsymbol{H}}\left[\begin{array}{c}\mathbf{x}\\ \hline \boldsymbol{\lambda}\end{array}\right] + \left[\begin{array}{c}\mathbf{0}\\ \hline \boldsymbol{Q}\end{array}\right]\mathbf{x}_\mathrm{r}$$

com *condição inicial* $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ e *condição final* $\boldsymbol{\lambda}(t_1) = \boldsymbol{Q}_1\left(\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}_\mathrm{r}(t_1)\right)$, eq. ④.

*Solução explícita em malha fechada – seguidor LQ

Pode-se obter uma solução explícita para $\boldsymbol{\eta}(t)$ por meio da equação:

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \overline{\boldsymbol{\Psi}}(t,0)\boldsymbol{\eta}(0) - \int_0^t \overline{\boldsymbol{\Psi}}(t,\tau)\boldsymbol{Q}\mathbf{x}_{\mathrm{r}}(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

com $\overline{\boldsymbol{\Psi}}(t,\tau)$ satisfazendo à equação diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{\boldsymbol{\Psi}}(t,\tau) = -\overline{\boldsymbol{A}}^{\top}(t)\overline{\boldsymbol{\Psi}}(t,\tau) \quad \text{com} \quad \overline{\boldsymbol{\Psi}}(\tau,\tau) = \boldsymbol{I}, \;\; \forall\tau \in [0, t_1]$$

O valor de $\boldsymbol{\eta}(0)$ consistente com a *condição final* $\boldsymbol{\eta}(t_1) = \boldsymbol{Q}_1\mathbf{x}_{\mathrm{r}}(t_1)$ é:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}(0) &= \overline{\boldsymbol{\Psi}}(0,t_1)\left[\boldsymbol{\eta}(t_1) + \int_0^{t_1} \overline{\boldsymbol{\Psi}}(t_1,\tau)\boldsymbol{Q}\mathbf{x}_{\mathrm{r}}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] \\ &= \overline{\boldsymbol{\Psi}}(0,t_1)\boldsymbol{Q}_1\mathbf{x}_{\mathrm{r}}(t_1) + \int_0^{t_1} \overline{\boldsymbol{\Psi}}(0,\tau)\boldsymbol{Q}\mathbf{x}_{\mathrm{r}}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

Note que foi utilizada a seguinte propriedade da matriz de transição:

$$\overline{\boldsymbol{\Psi}}(t_2,t_1)\overline{\boldsymbol{\Psi}}(t_1,t_0) = \overline{\boldsymbol{\Psi}}(t_2,t_0) \quad \Rightarrow \quad \overline{\boldsymbol{\Psi}}(t_0,t_1) = \overline{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}(t_1,t_0)$$

*Solução explícita em malha fechada – seguidor LQ

Substituindo a expressão para $\boldsymbol{\eta}(0)$ na expressão para $\boldsymbol{\eta}(t)$:

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \overline{\boldsymbol{\Psi}}(t, t_1)\boldsymbol{Q}_1\mathbf{x}_\mathrm{r}(t_1) + \int_0^{t_1} \overline{\boldsymbol{\Psi}}(t, \tau)\boldsymbol{Q}\mathbf{x}_\mathrm{r}(\tau)\,\mathrm{d}\tau - \int_0^{t} \overline{\boldsymbol{\Psi}}(t, \tau)\boldsymbol{Q}\mathbf{x}_\mathrm{r}(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \overline{\boldsymbol{\Psi}}(t, t_1)\boldsymbol{Q}_1\mathbf{x}_\mathrm{r}(t_1) + \int_t^{t_1} \overline{\boldsymbol{\Psi}}(t, \tau)\boldsymbol{Q}\mathbf{x}_\mathrm{r}(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

A última etapa da dedução de uma expressão explícita para $\boldsymbol{\eta}(t)$ consiste em expressar a matriz de transição $\overline{\boldsymbol{\Psi}}(t, \tau)$, associada a $-\overline{\boldsymbol{A}}^\top(t)$, com a *matriz de transição $\overline{\boldsymbol{\Phi}}(t, \tau)$ do sistema em malha fechada*, associada à matriz $\overline{\boldsymbol{A}}(t)$ e que, por sua vez, satisfaz à seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{\boldsymbol{\Phi}}(t, \tau) = \overline{\boldsymbol{A}}(t)\overline{\boldsymbol{\Phi}}(t, \tau) \quad \text{com} \quad \overline{\boldsymbol{\Phi}}(\tau, \tau) = \boldsymbol{I}, \ \ \forall \tau \in [0, t_1]$$

Tomando a derivada parcial em t da identidade $\overline{\boldsymbol{\Phi}}(t, \tau)\overline{\boldsymbol{\Phi}}(\tau, t) = \boldsymbol{I}$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{\boldsymbol{\Phi}}(t, \tau)\overline{\boldsymbol{\Phi}}(\tau, t) + \overline{\boldsymbol{\Phi}}(t, \tau)\frac{\partial}{\partial t}\overline{\boldsymbol{\Phi}}(\tau, t) = \mathbf{0}$$

*Solução explícita em malha fechada – seguidor LQ

Dessa forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{\boldsymbol{\Phi}}(\tau,t) = -\overline{\boldsymbol{\Phi}}(\tau,t)\frac{\partial}{\partial t}\overline{\boldsymbol{\Phi}}(t,\tau)\overline{\boldsymbol{\Phi}}(\tau,t) = -\overline{\boldsymbol{\Phi}}(\tau,t)\overline{\boldsymbol{A}}(t)\overline{\boldsymbol{\Phi}}(t,\tau)\overline{\boldsymbol{\Phi}}(\tau,t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\overline{\boldsymbol{\Phi}}(\tau,t) = -\overline{\boldsymbol{\Phi}}(\tau,t)\overline{\boldsymbol{A}}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\overline{\boldsymbol{\Phi}}^\top(\tau,t) = -\overline{\boldsymbol{A}}^\top(t)\overline{\boldsymbol{\Phi}}^\top(\tau,t)$$

Ainda, como $\overline{\boldsymbol{\Phi}}^\top(\tau,\tau) = \boldsymbol{I}, \ \ \forall\tau \in [0, t_1]$, conclui-se que:

$$\overline{\boldsymbol{\Psi}}(t,\tau) = \overline{\boldsymbol{\Phi}}^\top(\tau,t)$$

Finalmente, para a *dinâmica do seguidor em malha fechada* (supondo *realimentação de estados*), obtém-se:

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \overline{\boldsymbol{\Phi}}^\top(t_1,t)\boldsymbol{Q}_1\mathbf{x}_\mathrm{r}(t_1) + \int_t^{t_1}\overline{\boldsymbol{\Phi}}^\top(\lambda,t)\boldsymbol{Q}\mathbf{x}_\mathrm{r}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$$

$$\mathbf{x}(t) = \overline{\boldsymbol{\Phi}}(t,0)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\top(\tau)\boldsymbol{\eta}(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

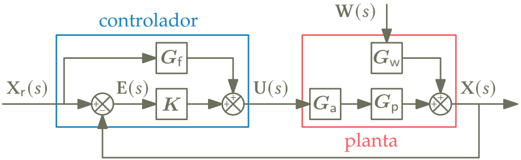
Lei de controle e diagrama de blocos – seguidor LQ

Pode-se definir o erro do seguidor como:

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}_\mathrm{r}(t) - \mathbf{x}(t)$$

Considerando ainda que: $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{P}$, a lei de controle do seguidor pode ser escrita como:

$$\mathbf{u}(t) = \underbrace{\boldsymbol{K}(t)\mathbf{e}(t)}_{\text{realimentação}} + \underbrace{\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}(t)^\top\big(\boldsymbol{\eta}(t) - \boldsymbol{P}(t)\mathbf{x}_\mathrm{r}(t)\big)}_{\text{pré-alimentação}}$$



1 Seguidor via controle linear-quadrático
2 Modelos assumidos para variáveis exógenas
3 *Ação integral em realimentação

Modelos assumidos para variáveis exógenas

Considere um sistema linear invariante no tempo:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{B}\mathbf{u}(t) + \boldsymbol{E}\mathbf{w}(t)$$

Assuma que tanto o sinal de referência $\mathbf{x}_{\mathrm{r}}(t)$ quanto a perturbação $\mathbf{w}(t)$ sejam modelados como soluções de equações diferenciais conhecidas:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}_{\mathrm{r}}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{r}}\mathbf{x}_{\mathrm{r}}(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{w}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{w}}\mathbf{w}(t)$$

Definindo o *erro de acompanhamento* (erro do seguidor) como:

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}_{\mathrm{r}}(t) - \mathbf{x}(t)$$

verifica-se que $\mathbf{e}(t)$ satisfaz à seguinte EDO:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\mathbf{e}(t) - \big(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}_{\mathrm{r}}\big)\mathbf{x}_{\mathrm{r}}(t) - \boldsymbol{B}\mathbf{u}(t) - \boldsymbol{E}\mathbf{w}(t)$$

Modelos assumidos para variáveis exógenas

Para simplificar a equação diferencial, defina-se a matriz $\boldsymbol{F}$ e o *vetor de variáveis exógenas* $\mathbf{x}_0(t)$:

$$\boldsymbol{F} = \left[\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}_r \;\middle|\; \boldsymbol{E}\right] \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_0(t) = \left[\begin{array}{c} \mathbf{x}_r(t) \\ \hline \mathbf{w}(t) \end{array}\right]$$

Assim:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\mathbf{e}(t) - \boldsymbol{B}\mathbf{u}(t) - \boldsymbol{F}\mathbf{x}_0(t)$$

Proponha-se uma lei de controle da forma:

$$\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{K}\mathbf{e}(t) - \boldsymbol{G}\mathbf{x}_0(t)$$

o que faz com que a *dinâmica do erro de acompanhamento em malha fechada* seja dada por:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}(t)}{\mathrm{d}t} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\mathbf{e}(t) - (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{G})\mathbf{x}_0(t) = \overline{\boldsymbol{A}}\mathbf{e}(t) - (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{G})\mathbf{x}_0(t)$$

Modelos assumidos para variáveis exógenas

Note que, em *regime permanente*, ou seja, com $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{e}(t)}{\mathrm{d}t} = 0$, o valor do erro de acompanhamento é:

$$\overline{\boldsymbol{A}}\mathbf{e} = (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{G})\mathbf{x}_0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e} = \overline{\boldsymbol{A}}^{-1}(\boldsymbol{F} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{G})\mathbf{x}_0$$

Seria ideal se fosse possível tornar nulo o valor do erro em regime permanente *qualquer seja* o valor em regime permanente das variáveis exógenas, ou seja, escolher $\boldsymbol{G}$ tal que $\overline{\boldsymbol{A}}^{-1}(\boldsymbol{F} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{G}) = \mathbf{0}$. No entanto, em geral, isto não é possível. Busquemos então uma matriz $\boldsymbol{M}$ que torne, em *regime permanente*:

$$\boldsymbol{M}\mathbf{e} = \mathbf{0}$$

Isto será verdadeiro para todo $\mathbf{x}_0$ se:

$$\boldsymbol{M}\overline{\boldsymbol{A}}^{-1}(\boldsymbol{F} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{G}) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{M}\overline{\boldsymbol{A}}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{G} = \boldsymbol{M}\overline{\boldsymbol{A}}^{-1}\boldsymbol{F}$$

Modelos assumidos para variáveis exógenas

Para obter uma solução fechada para $\boldsymbol{G}$ é necessário que a matriz $\boldsymbol{M}\overline{\boldsymbol{A}}^{-1}\boldsymbol{B}$ seja invertível. Isto requer, em primeiro lugar, que ela seja quadrada, ou seja, $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{r\times n}$. Em outras palavras, *dispondo de r atuadores é possível seguir com erro nulo em regime permanente somente r sinais de referência*. Conclui-se, portanto, que:

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{F} \quad \text{com} \quad \boldsymbol{N} = \left[\boldsymbol{M}\overline{\boldsymbol{A}}^{-1}\boldsymbol{B}\right]^{-1}\boldsymbol{M}\overline{\boldsymbol{A}}^{-1}$$

Assim, a lei de controle do seguidor se torna:

$$\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{K}\mathbf{e}(t) - \boldsymbol{N}\boldsymbol{F}\mathbf{x}_{\mathsf{o}}(t) = \boldsymbol{K}\mathbf{e}(t) - \boldsymbol{N}\left(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}_{\mathsf{r}}\right)\mathbf{x}_{\mathsf{r}}(t) - \boldsymbol{N}\boldsymbol{E}\mathbf{w}(t)$$

e a *dinâmica do erro de acompanhamento* se torna:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}(t)}{\mathrm{d}t} = \overline{\boldsymbol{A}}\mathbf{e}(t) - \left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{N}\right)\boldsymbol{F}\mathbf{x}_{\mathsf{o}}(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}(t)}{\mathrm{d}t} = \overline{\boldsymbol{A}}\mathbf{e}(t) - \left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{N}\right)\left[\left(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}_{\mathsf{r}}\right)\mathbf{x}_{\mathsf{r}}(t) + \boldsymbol{E}\mathbf{w}(t)\right]$$

1 Seguidor via controle linear-quadrático
2 Modelos assumidos para variáveis exógenas
3 *Ação integral em realimentação

*Ação integral em realimentação

Admita que se queira propor uma lei de controle com ganho integral em realimentação da forma:

$$\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{K}\mathbf{e}(t) + \boldsymbol{K}_{\mathrm{i}}\mathbf{e}_{\mathrm{i}}(t) - \boldsymbol{G}\mathbf{x}_{\mathrm{o}}(t)$$

com $\mathbf{e}_{\mathrm{i}}(t)$ sendo definida como a integral de uma combinação linear de componentes de $\mathbf{e}(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_{\mathrm{i}}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{i}}\mathbf{e}(t) = \boldsymbol{C}_{\mathrm{i}}\big(\mathbf{x}_{\mathrm{r}}(t) - \mathbf{x}(t)\big)$$

Neste caso, as variáveis $\mathbf{e}_{\mathrm{i}}(t)$ assim definidas constituem, juntamente a $\mathbf{x}(t)$ um vetor de estados aumentado $\mathbf{x}_{\mathrm{a}}(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\begin{array}{c}\mathbf{x}(t)\\ \hline \mathbf{e}_{\mathrm{i}}(t)\end{array}\right] = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c}\boldsymbol{A} & \mathbf{0}\\ \hline -\boldsymbol{C}_{\mathrm{i}} & \mathbf{0}\end{array}\right]}_{\boldsymbol{A}_{\mathrm{a}}}\underbrace{\left[\begin{array}{c}\mathbf{x}(t)\\ \hline \mathbf{e}_{\mathrm{i}}(t)\end{array}\right]}_{\mathbf{x}_{\mathrm{a}}(t)} + \underbrace{\left[\begin{array}{c}\boldsymbol{B}\\ \hline \mathbf{0}\end{array}\right]}_{\boldsymbol{B}_{\mathrm{a}}}\mathbf{u}(t) + \underbrace{\left[\begin{array}{c|c}\boldsymbol{E} & \mathbf{0}\\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{I}\end{array}\right]}_{\boldsymbol{E}_{\mathrm{a}}}\underbrace{\left[\begin{array}{c}\mathbf{w}(t)\\ \hline \boldsymbol{C}_{\mathrm{i}}\mathbf{x}_{\mathrm{r}}(t)\end{array}\right]}_{\mathbf{w}_{\mathrm{a}}(t)}$$

*Ação integral em realimentação

Assim, pode-se escrever a equação diferencial do sistema na forma:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}_\mathsf{a}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}_\mathsf{a}\mathbf{x}_\mathsf{a}(t) + \boldsymbol{B}_\mathsf{a}\mathbf{u}(t) + \boldsymbol{E}_\mathsf{a}\mathbf{w}_\mathsf{a}(t)$$

Pode-se então formular o *problema de acompanhamento de referências* para esta planta aumentada tomando $\mathbf{x}_\mathsf{r}(t)$ como referência para $\mathbf{x}(t)$ e zero como referência para $\mathbf{e}_\mathsf{i}(t)$. Para que o problema tenha solução, no entanto, é necessário que o par $(\boldsymbol{A}_\mathsf{a}, \boldsymbol{B}_\mathsf{a})$ seja *controlável*, o que limita as possibilidades de escolha para a matriz $\boldsymbol{C}_\mathsf{i}$.

A dinâmica da planta aumentada em malha fechada é dada pela matriz de estados $\overline{\boldsymbol{A}}_\mathsf{a} = \boldsymbol{A}_\mathsf{a} - \boldsymbol{B}_\mathsf{a}\boldsymbol{K}_\mathsf{a}$ em que a matriz de ganhos $\boldsymbol{K}_\mathsf{a}$ é:

$$\boldsymbol{K}_\mathsf{a} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K} & \big| & -\boldsymbol{K}_\mathsf{i} \end{bmatrix}$$

ou seja, a lei de controle pode ser reescrita como:

$$\mathbf{u}(t) = -\boldsymbol{K}_\mathsf{a}\mathbf{x}_\mathsf{a}(t) + \boldsymbol{K}\mathbf{x}_\mathsf{r}(t) - \boldsymbol{G}\mathbf{x}_\mathsf{o}(t)$$

Neste caso, $\mathbf{x}_\mathsf{o}(t)$ deve incluir tanto $\mathbf{x}_\mathsf{r}(t)$ quanto $\mathbf{w}_\mathsf{a}(t)$ (em vez de $\mathbf{w}(t)$).

Perguntas?

reorsino@usp.br