SMA0169 – EDP **Lista 3 - Ondas e Difusões**

Prof. Sergio H. Monari Soares **09 de abril de 2024**

1. Considere o valor inicial para a equação das ondas

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\
&u(x,0) = \phi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x), \quad -\infty < x < \infty.
\end{aligned}
$$

Suponha que ϕ e ψ sejam periódicas de período α. Mostre que a solução $u(x,t)$ também é periódica em x com período α.

2. Considere o valor inicial para a equação das ondas não homogênea

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(t,x), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\
&u(x,0) = \phi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x), \quad -\infty < x < \infty.
\end{aligned}
$$

Suponha que $\phi \in C^2(\mathbb{R})$ e $\psi \in C^1(\mathbb{R})$. Mostre que a solução desse problema, caso exista, é única. (Sugestão: use a integral de energia.)

3. Considere o valor inicial para a equação das ondas

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\
&u(x,0) = \phi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x), \quad -\infty < x < \infty.
\end{aligned}
$$

Sejam u_1 e u_2 as soluções correspondentes aos dados ϕ_1, ψ_1 e ϕ_2, ψ_2, respectivamente. Mostre que para todo $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T]$

$$
\sup_{x\in\mathbb{R}} |u_1(x,t) - u_2(x,t)| \le \|\phi_1 - \phi_2\|_\infty + T\|\psi_1 - \psi_2\|_\infty,
$$

onde

$$
\|\phi_1 - \phi_2\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\phi_1(x) - \phi_2(x)| \qquad \|\psi_1 - \psi_2\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\psi_1(x) - \psi_2(x),
$$

ou seja, uma pequena alteração nos dados causa uma pequena alteração nas soluções, pelo menos durante um intervalo de tempo fixo, mostrando que a solução depende continuamente dos dados iniciais.

4. (O golpe do martelo) Considere a corda infinita com posição inicial $\phi(x) = 0$ e velocidade inicial $\psi(x) = 1$ para $|x| < a$ e $\psi(x) = 0$ para $|x| \ge a$. Esboce o perfil da corda (u versus x) em cada um dos os instantes sucessivos $t = a/2c$, a/c, $3a/2c$, $2a/c$ e $5a/c$.

   [Sugestão: decomponha o semiplano xt com $t \ge 0$ nas seis regiões determinadas pelas retas características emanadas dos pontos $(-a,0)$ e $(a,0)$.]

5. No Exercício 4, encontre o maior deslocamento, $\max_x u(x,t)$, como uma função de t .

6. Considere um paralelogramo $ABCD$ no plano (x,t) formado por segmentos de retas características. Chamos por x_A e t_A as coordenadas do ponto A, e usando notações análogas para B, C e D, prove que

$$
u(x_A, t_A) + u(x_D, t_D) = u(x_B, t_B) + u(x_C, tC)
$$

se A e D são vértices opostos, B e C são vérices opostos e u é uma solução qualquer da equação das ondas. (Esta identidade mostra que conhecendo o valor de u em três vérices de um quadrilátero característico é possível portanto calcular seu valor no quarto vértice.)