5 Solução de sistemas de eq. não-lineares

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Quarteroni: 2.5
Franco: 3.6

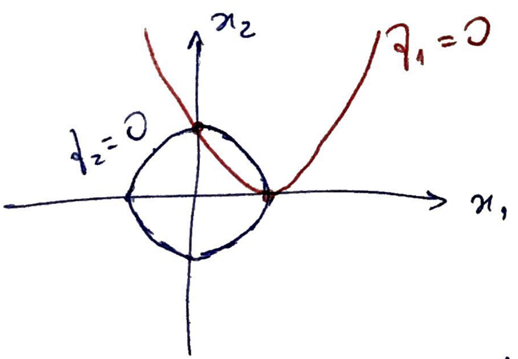
onde $f_1, f_2, \dots, f_n$ são funções não-lineares

$$\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$$

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

podemos escrever o sistema na forma: $\boxed{\vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}}$

ex) $\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1 - x_2 + 1 = 0 & \text{(parábola)} \\ f_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 & \text{(círculo)} \end{cases}$



f → superfície 3D

$f = 0$ → superfície corta o plano (x_1, x_2)

solução: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

* Método de Newton:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

- Polinômio de Taylor de ordem r: aproximação de uma função r-diferenciável por um polinômio de grau r centrado em a

$$f(x) \simeq f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(r)}(a)}{r!}(x-a)^r$$

truncando a série em $r=1$, e tomando $a = x^{(k)}$, $x \to x^{(k+1)}$

queremos $f(x^{(k+1)}) = 0$, então

$$f(x^{(k+1)}) = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = 0$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

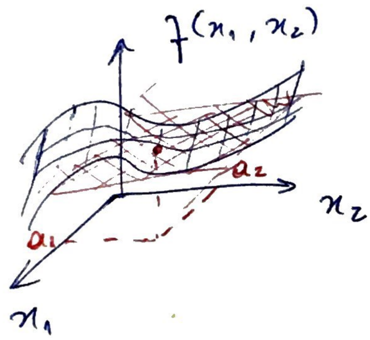
a cada iteração, aproximamos $f(x)$ por sua série de Taylor de ordem 1 centrada em $x^{(k)}$ (reta), e estimamos $x^{(k+1)}$ como o zero da aproximação de $f(x)$.

- para uma função <u>escalar</u> de n variáveis:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$f(x_1, x_2) \simeq f(a_1, a_2) + \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{(a_1,a_2)} (x_1 - a_1) + \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{(a_1,a_2)} (x_2 - a_2)$$

(aproximação de $\overset{f(\vec{x})}{f(x_1, x_2)}$ pelo $\overset{\text{hiperplano}}{\text{plano}}$ tangente em (a_1, a_2))



$$f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \underbrace{\overbrace{\vec{\nabla}^T f(\vec{a})}^{\text{vetor linha}}\,\underbrace{(\vec{x} - \vec{a})}_{\text{vetor coluna}}}_{\text{produto escalar}}$$

operador gradiente: $\vec{\nabla} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix}$

$\vec{\nabla}^T \to$ transposto

$$f(x_1, x_2) = f(a_1, a_2) + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\vec{a}} \begin{bmatrix} (x_1 - a_1) \\ (x_2 - a_2) \end{bmatrix}}_{\text{produto escalar } \vec{a}^T \vec{b} = (\vec{a} \cdot \vec{b})}$$

- para uma função <u>vetorial</u> de n variáveis:

$$\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

aproximação com polinômio de Taylor de ordem 1 para cada componente de $\vec{f}$:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(a_1, a_2, \dots, a_n) + \left[\vec{\nabla}^T f_1(\vec{a})\right](\vec{x}-\vec{a}) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_m(a_1, a_2, \dots, a_n) + \left[\vec{\nabla}^T f_m(\vec{a})\right](\vec{x}-\vec{a}) \end{cases}$$

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{a}) + \overbrace{J_{\vec{f}}(\vec{a})(\vec{x}-\vec{a})}^{\text{produto matriz } m\times n \text{ com vetor } n\times 1 \,=\, \text{vetor } m\times 1}$$

onde $$J_{\vec{f}}(\vec{a}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\vec{a}}$$

é a matriz Jacobiana de $\vec{f}$ $(J_{\vec{f}})$ aplicada no ponto $\vec{a}$

* Método de Newton para $\vec{f}(\vec{x}) = 0$:

$\vec{a} \to \vec{x}^{(k)}$, $\vec{x} \to \vec{x}^{(k+1)}$, queremos $\vec{f}(\vec{x}^{(k+1)}) = 0$

$$\vec{f}(\vec{x}^{(k+1)}) = \vec{f}(\vec{x}^{(k)}) + J_{\vec{f}}(\vec{x}^{(k)})(\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}) = 0$$

$$\boxed{\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - J_{\vec{f}}^{-1}(\vec{x}^{(k)})\,\vec{f}(\vec{x}^{(k)})}$$

a cada iteração, aproximamos $\vec{f}(\vec{x})$ por sua série de Taylor de ordem 1 centrada em $\vec{x}^{(k)}$ (hiperplano), e estimamos $\vec{x}^{(k+1)}$ como o zero dessa aproximação de $\vec{f}(\vec{x})$.

$$\delta\vec{x} = - J_f^{-1}(\vec{x}^{(k)})\, \vec{f}(\vec{x}^{(k)})$$

algoritmo: $\begin{cases} J_{\vec{f}}(\vec{x}^{(k)})\, \delta\vec{x} = - \vec{f}(\vec{x}^{(k)}) \\ \vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} + \delta\vec{x} \end{cases}$ → sistema de eq lineares (somente números)

obs: $J_{\vec{f}}$ tem que ter determinante diferente de zero a cada iteração.

ex) $\begin{cases} f_1 = x_1^2 - 2x_1 - x_2 + 1 = 0 \\ f_2 = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \end{cases}$

$$J_f = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - 2 & -1 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix}$$

$\vec{x}^{(0)} = (1, -1)^T$

$k=1$ $\quad J_{\vec{f}}(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad -f(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}^{(1)} = (1, -1)^T + (1/2, 1)^T = (3/2, 0)^T$$

$$K = 2 \qquad J_{\vec{f}}\,(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad -f(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 5/4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 5/4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/12 \\ 1/6 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}^{(2)} = \vec{x}^{(1)} + \delta\vec{x}^{(1)} = (3/2,\ 0)^T + (5/12\ ,\ 1/6)^T = (23/12,\ 1/6)^T$$

(...)