PME 3481 – Controle e aplicações

Síntese de reguladores por alocação de polos

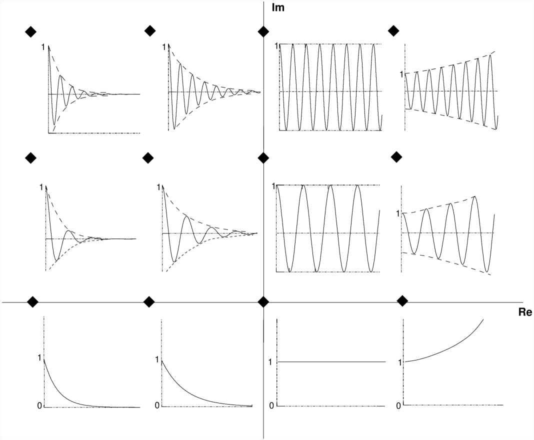
Agenor de Toledo Fleury & Flávio Celso Trigo

2024

Escola Politécnica da USP
Departmento de Engenharia Mecânica

A necessidade do controle

Polos em malha aberta e estabilidade relativa



Logicamente sistemas instáveis em malha aberta devem ser devidamente controlados!

Regulador

Um *regulador* é um tipo de controlador cuja função é levar o estado (o vetor de estado) de volta para a origem, da qual este se afasta devido à presença de perturbações externas, com velocidade satisfatória para o sistema. Matematicamente,

$$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{0}$$

Seguidor de referência

Um *seguidor de referência* é um tipo de controlador cuja função é fazer com que o estado o estado **rastreie um sinal de referência externo conhecido**.

Matematicamente, em espaço de estados,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) + E\mathbf{x}_e(t)$$

$$\mathbf{u} \equiv \text{vetor de controle}$$

$$\mathbf{x}_e \equiv \text{vetor de entradas exógenas}$$

Projeto de reguladores por alocação de polos

Lei de controle

Seja um sistema linear completamente controlável em espaço de estados

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)$$

com $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, matrizes constantes (sistema invariante no tempo).

Para um sistema linear controlável é possível implementar uma lei de controle de realimentação de estados na forma $\mathbf{u}(t) = -K\mathbf{x}(t)$, $K \in \mathbb{R}^{p \times n} \triangleq$ matriz de ganhos de controle de tal forma que a localização dos n polos do sistema em malha fechada no plano complexo possa ser escolhida.

Lei de controle

A lei de controle é tal que a dinâmica do sistema em malha fechada obedece à seguinte equação de estado:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$$
$$\dot{\mathbf{x}} = (A - BK)\mathbf{x} = A_c\mathbf{x}$$

- **a dinâmica do sistema em malha fechada irá depender dos** n **autovalores da matriz** A_c**;**
- **a cada autovalor corresponde um elemento da matriz** $K \in \mathbb{R}^{p\times n}$ **que deve ser calculado.**

Fórmula de Bass-Gura

Fórmula de Bass-Gura

Supondo-se um sistema SIMO cuja realização é dada por $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + bu$, com $A(n \times n)$, $\mathbf{b}(n \times 1)$, $u(1 \times 1)$, para obter a matriz de ganhos $K = [k_1, k_2, \ldots, k_n]$ basta igualar os polinômios característicos em malha aberta e fechada:

$$a(s) = |sI - A| = s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n s^0$$
$$\alpha(s) = |sI - A + bK| = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \ldots + \alpha_n s^0$$

Os coeficientes α_i serão funções dos ganhos k_i, fornecendo n equações para a sua determinação.

Problema: esse procedimento não é adequado quando a ordem do sistema é superior a 3 ou 4.

Fórmula de Bass-Gura

A fórmula de Bass-Gura aplica-se a sistemas de uma entrada e uma ou mais saídas (SISO ou SIMO) e facilita a alocação de polos em sistemas de maior ordem.

Para a dedução do procedimento, utiliza-se a identidade matricial

$$|I + (sI - A)^{-1} bK| = 1 + K(sI - A)^{-1} b$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\alpha(s) &= |sI - A + bK| \\
\alpha(s) &= |(sI - A)[I + (sI - A)^{-1} bK]| \\
\alpha(s) &= a(s)|[I + (sI - A)^{-1} bK]| \\
\alpha(s) &= a(s)[1 + K(sI - A)^{-1} b]| \\
\therefore \alpha(s) - a(s) &= a(s)K(sI - A)^{-1} b \qquad (1)
\end{aligned}$$

Fórmula de Bass-Gura

Observa-se ainda que:

- ambos os lados da equação anterior possuem polinômios em s;
- o polinômio $\alpha(s)$ é obtido utilizando os polos alocados
- o polinômio do lado direito contém os n ganhos a serem determinados;
- a igualdade fornece n equações para a determinação da matriz K de ganhos do controle em malha fechada.

O resolvente

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{a(s)}(s^{n-1}I + s^{n-2}(A + a_1 I) + \ldots + s^0 a_n I) \qquad (2)$$

Com (2) em (1),

$$\begin{aligned} &(s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \ldots + \alpha_n) - (s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n) \\ &= K(s^{n-1}I + s^{n-2}(A + a_1 I) + s^{n-3}(A^2 + a_1 A + a_2 I) + \ldots + a_n I)b \end{aligned}$$

Fórmula de Bass-Gura

o resultado é o sistema de equações

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 - a_1 &= Kb \\
\alpha_2 - a_2 &= KAb + a_1 KB \\
\alpha_3 - a_3 &= KA^2 b + a_1 KAb + a_2 Kb \\
&\vdots \\
\alpha_n - a_n &= KA^{n-1} b
\end{aligned}
$$

Fórmula de Bass-Gura

que pode ser escrito em termos das matrizes

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix} \quad \text{coef. do pol. caracter. de polos alocados}$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} \quad \text{coef. do pol. característico}$$

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} b & Ab & \dots & A^{n-1}b \end{bmatrix} \quad \text{matriz de controlabilidade}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \dots k_n \end{bmatrix} \quad \text{matriz de ganhos de controle}$$

$$\mathbb{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{matrix de Toeplitz}$$

Fórmula de Bass-Gura

permitindo o cálculo da matriz K:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{a} &= K\left(\mathbb{C}\mathbb{T}^T\right) \\
K &= \left[\left(\mathbb{C}\mathbb{T}^T\right)\right]^{-1}(\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{a}) \\
K &= T(\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{a}) \quad \textbf{com} \quad T \triangleq \left[\left(\mathbb{C}\mathbb{T}^T\right)\right]^{-1}
\end{aligned}
$$

A utilização da fórmula de Bass-Gura depende da descrição do sistema em espaço de estados na forma canônica controlável.

Transformação de variáveis de estado

Seja um sistema de ordem n na forma de espaço de estados

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu$$

$$y = C\mathbf{x} + Du$$

Efetua-se uma transformação linear $\mathbf{z} = T\mathbf{x}$, T quadrada de dimensão n e não-singular. Então,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= T^{-1}\mathbf{z} \Rightarrow \\ T^{-1}\dot{\mathbf{z}} &= AT^{-1}\mathbf{z} + Bu \\ \dot{\mathbf{z}} &= TAT^{-1}\mathbf{z} + TBu \\ y &= CT^{-1}\mathbf{z} + Du \end{aligned}$$

Nomeando $\underline{A} = TAT^{-1}$, $\underline{B} = TB$, $\underline{C} = CT^{-1}$ e $\underline{D} = D$, tem-se

$$\dot{\mathbf{z}} = \underline{A}\mathbf{z} + \underline{B}u$$

$$y = \underline{C}\mathbf{z} + \underline{D}u$$

Transformação de variáveis de estado

Uma *transformação de similaridade* dessa natureza não altera as características dinâmicas do sistema.

Portanto, para converter um sistema (controlável) em espaço de estados de uma realização genérica para a forma canônica controlável, deve-se obter a matriz T apropriada.

Características das matrizes $\underline{A}$ e $\underline{B}$:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Transformação de variáveis de estado

O cálculo da matriz T parte da hipótese de que as matrizes $\underline{A}$ e $\underline{B}$ sejam conhecidas:

1. $\underline{A} = TAT^{-1} \Rightarrow \underline{A}T = TA$ e $\underline{B} = TB$;
2. como $\underline{A}$ e $\underline{B}$ estão supostamente na forma canônica controlável, pode-se escrever, por exemplo, para um sistema de com $n = 3$,

$$\begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 A \\ \mathbf{t}_2 A \\ \mathbf{t}_3 A \end{bmatrix}$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 B \\ \mathbf{t}_2 B \\ \mathbf{t}_3 B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Transformação de variáveis de estado

Efetuando-se os produtos obtém-se

$$-a_1\mathbf{t}_1 - a_2\mathbf{t}_2 - a_3\mathbf{t}_3 = \mathbf{t}_1 A \tag{3}$$

$$\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2 A \tag{4}$$

$$\mathbf{t}_2 = \mathbf{t}_3 A \rightarrow \mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_3 A^2 \tag{5}$$

$$\mathbf{t}_1 B = 1 \tag{6}$$

$$\mathbf{t}_2 B = 0 \tag{7}$$

$$\mathbf{t}_3 B = 0 \tag{8}$$

De (5) e (7), $\mathbf{t}_2 B = \mathbf{t}_3 AB$ (9)
De (4) e (6), $\mathbf{t}_1 B = \mathbf{t}_3 A^2 B$ 10

Transformação de variáveis de estado

Então

$$\mathbf{t}_3 \begin{bmatrix} B| & AB| & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0| & 0| & 1 \end{bmatrix} \quad \text{mas}$$

$$\begin{bmatrix} B| & AB| & A^2B \end{bmatrix} \equiv \mathbb{C}, \quad \text{matrix de controlabilidade} \Rightarrow$$

$$\mathbf{t}_3 = \begin{bmatrix} 0| & 0| & 1 \end{bmatrix} \mathbb{C}^{-1}$$

Assim, voltando-se às equações (9) e (10), as demais linhas da matriz T que converte o sistema de qualquer realização para a forma canônica controlável são calculadas. A extensão para sistemas de maior ordem é imediata.