

# Ondas e Difusões

## Equação da corda vibrante

Considere uma corda flexível, elástica e homogênea de comprimento  $l$ , que sofre vibrações transversais relativamente pequenas. Por exemplo, uma corda de violão ou uma corda de violino dedilhada. Em um determinado instante  $t$ , a corda pode ter a aparência mostrada na Figura 1.



Figure: 1

Admita que a corda permaneça em um plano. Seja  $u(x, t)$  seu deslocamento da posição de equilíbrio no tempo  $t$  e na posição  $x$ . Como a corda é perfeitamente flexível, a tensão (força) é direcionada tangencialmente ao longo da corda (Figura 2).

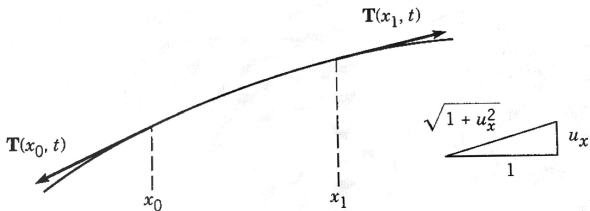


Figure: 2

Seja  $T(x, t)$  o módulo desse vetor de tensão  $\mathbf{T}(x, t)$ . Seja  $\rho$  a densidade (massa por unidade de comprimento) da corda, que é uma constante porque a corda é homogênea.

Escreveremos a lei de Newton para a parte da corda entre quaisquer dois pontos em  $x = x_0$  e  $x = x_1$ . A inclinação da corda em  $x$  é  $u_x(x, t)$ . A lei de Newton  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  nas componentes longitudinal ( $x$ ) e transversal ( $u$ ) é

$$\left. \frac{T}{\sqrt{1 + u_x^2}} \right|_{x_0}^{x_1} = 0 \quad (\text{longitudinal})$$

$$\left. \frac{Tu_x}{\sqrt{1 + u_x^2}} \right|_{x_0}^{x_1} = \int_{x_0}^{x_1} \rho u_{tt} dx \quad (\text{transversal})$$

Como estamos supondo que o movimento é pequeno - mais especificamente, que  $|u_x|$  é bem pequeno, então  $\sqrt{1 + u_x^2} \approx 1$  pode ser substituído por 1. Assim, a primeira equação diz que  $T$  é constante ao longo da corda. Vamos supor que  $T$  é independente de  $t$  bem como de  $x$ . A segunda equação pode ser reescrita como

$$Tu_x \Big|_{x_0}^{x_1} = \int_{x_0}^{x_1} \rho u_{tt} dx.$$

Supondo que  $u_{xx}$  seja continua, assim como  $u_{tt}$ , temos

$$Tu_x \Big|_{x_0}^{x_1} = \int_{x_0}^{x_1} Tu_{xx} dx.$$

Assim,

$$\int_{x_0}^{x_1} T u_{xx} dx = \int_{x_0}^{x_1} \rho u_{tt} dx.$$

E como  $x_0$  e  $x_1$  são arbitrários, segue que

$$\rho u_{tt} = T u_{xx}.$$

Isto é,

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad \text{onde } c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Esta é a equação das ondas.

*Análise dimensional da constante  $c$ .*  $T$  tem dimensão de força, isto é,  $mlt^{-2}$ , onde  $m$  é massa,  $l$  é comprimento e  $t$  é tempo. Por outro lado,  $\rho$  tem a dimensão  $ml^{-3}$ . Logo  $c$  tem dimensão  $lt^{-1}$ , isto é, a dimensão de uma velocidade. Mais adiante veremos que essa velocidade tem um sentido físico.

Existem muitas variações dessa equação, por exemplo:

- (i) Se a resistência do ar ( $r > 0$ ) estiver presente, temos um termo extra proporcional a velocidade  $u_t$ , assim:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + ru_t = 0.$$

- (ii) Se houver uma força elástica transversal, temos um termo extra proporcional ( $k > 0$ ) ao deslocamento  $u$ , assim:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + ku = 0.$$

- (iii) Se houver uma força aplicada externamente, ela aparece como um termo extra, por isso:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x, t),$$

o que torna a equação não homogênea.

## A Equação das ondas na reta toda

**Proposição 1.** A solução geral da equação das ondas na reta toda

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

é

$$\boxed{u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)} \quad (1)$$

onde  $f$  e  $g$  são funções arbitrárias (duas vezes diferenciáveis) de uma variável real.

*Demonstração.* Primeiro, fatoramos a equação de onda da seguinte maneira:

$$(\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x)u = 0. \quad (2)$$

Se colocarmos  $v = u_t + cu_x$ , então  $v$  satisfaz a equação de transporte

$$v_t - cv_x = 0$$

e então,  $v(x, t) = h(x + ct)$ , com  $h$  uma função arbitrária (diferenciável) de uma única variável.



De (2) e da definição de  $v$ ,

$$u_t + cu_x = h(x + ct). \quad (3)$$

Já que essa equação é linear, sua solução geral é a soma de uma solução particular de (3) com a solução da equação homogênea  $u_t + cu_x = 0$  dada por  $g(x - ct)$ , com  $g$  uma função arbitrária (diferenciável) de uma única variável. É fácil verificar diretamente por derivação que uma solução particular de (3) é  $u(x, t) = f(x + ct)$ , onde  $f'(s) = h(s)/2c$ . Portanto,

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct),$$

como afirmado.

Um argumento diferente para demonstrar a Proposição 1 é pelas coordenadas características

$$\xi = x + ct \quad \eta = x - ct.$$

Pela regra da cadeia,

$$\partial_x = \partial_\xi + \partial_\eta \quad \text{e} \quad \partial_t = c\partial_\xi - c\partial_\eta.$$

Portanto,

$$0 = (\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x)u = -4c^2\partial_{\xi\eta}u = 0;$$

O que significa que  $u_{\xi\eta} = 0$ , pois  $c \neq 0$ . Integrando em  $\eta$ , temos  $u_\xi(\xi, \eta) = F(\xi)$ . Integrando em relação a  $\xi$ , temos

$$u = f(\xi) + g(\eta),$$

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct),$$

que concorda exatamente com a demonstração anterior.

A equação da onda na reta toda tem uma geometria simples. Existem duas famílias de curvas características,  $x \pm ct = \text{constante}$ , conforme indicado na Figura 3. A solução geral é a soma de duas funções. Uma,  $g(x - ct)$ , é uma onda de forma arbitrária viajando para a direita com velocidade  $c$ . A outra,  $f(x + ct)$ , é outra forma deslocando-se para a esquerda com velocidade  $c$ .

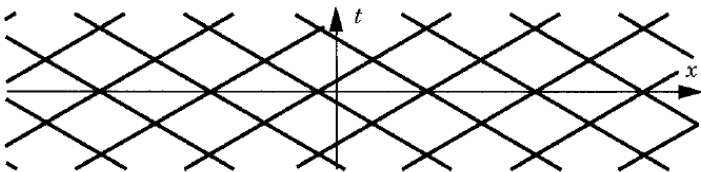


Figure: 3

# Problema de Valor Inicial

O problema de valor inicial para a equação das ondas na reta toda consiste em resolver a equação

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

sujeita às condições iniciais

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

**Teorema 1.** Se  $\phi \in C^2$  e  $\psi \in C^1$ , então a solução do problema de valor inicial é

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\phi(x + ct) + \phi(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds. \quad (4)$$

*Demonstração.* A solução geral da equação das ondas na reta é dada por (1). Fazendo  $t = 0$ , obtemos

$$\phi(x) = f(x) + g(x). \quad (5)$$

Derivando (1) e fazendo  $t = 0$ ,

$$\psi(x) = cf'(x) - cg'(x). \quad (6)$$

Derivando (5) e dividindo (6) por  $c$ , obtemos

$$\phi'(x) = f'(x) + g'(x) \quad \text{e} \quad \frac{1}{c}\psi(x) = f'(x) - g'(x).$$

Assim,

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left( \phi'(x) + \frac{\psi(x)}{c} \right) \quad \text{e} \quad g'(x) = \frac{1}{2} \left( \phi'(x) - \frac{\psi(x)}{c} \right)$$

Integrando, obtemos

$$f(x) = \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x \psi(s) ds + A$$
$$g(x) = \frac{1}{2}\phi(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x \psi(s) ds + B$$

onde  $A, B$  são constantes arbitrárias. Por (5),  $A + B = 0$ .  
Avaliando  $f$  em  $x + ct$  e  $g$  em  $x - ct$ , obtemos

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\phi(x+ct) + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} \psi(s) ds + \frac{1}{2}\phi(x-ct) - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} \psi(s) ds,$$

ou seja,

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\phi(x + ct) + \phi(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds$$

A fórmula (4) da solução do problema de valor inicial para a equação das ondas na reta toda devido a d'Alembert em 1746 e, por isso, é conhecida como **Fórmula de d'Alembert**.

Supondo que  $\phi$  tenha uma segunda derivada contínua ( $\phi \in C^2$ ) e  $\psi$  tenha uma primeira derivada contínua ( $\psi \in C^1$ ), vemos de (6) que  $u$  tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas em  $x$  e  $t$  ( $u \in C^2$ ). Então (6) é uma solução genuína do problema de valor inicial. Esta afirmação pode ser verificada diretamente por derivação e fazendo  $t = 0$ . Vice-versa, uma solução  $u$  de classe  $C^2$  no semiplano  $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$  deve ser por (6), justamente pelo raciocínio utilizado para chegar à fórmula. Portanto, a solução é única.

## Domínios de dependência e influência

Pela fórmula de d'Alembert, o valor de  $u$  no ponto  $(x, t)$  é determinado pelos valores de  $\psi$  no intervalo  $[x - ct, x + ct]$  e de  $\phi$  nos extremos  $x - ct$  e  $x + ct$ . Este intervalo é chamado **domínio de dependência** do ponto  $(x, t)$  (Figura 4 à esquerda).

De outro ponto de vista, os valores de  $\phi$  e  $\psi$  no ponto  $(z, 0)$  no eixo  $x$  afetam o valor de  $u$  nos pontos  $(x, t)$  do setor  $z - ct \leq x \leq z + ct$  que é chamado de **domínio de influência** de  $z$  (Figura 4 à direita). Do ponto de vista físico, isso significa que o sinal viaja com velocidade  $c$  ao longo das características de equação  $x - ct = z$  e  $x + ct = z$ : uma perturbação inicialmente localizado em  $z$  não é sentido no ponto  $x$  até o tempo

$$t = \frac{|x - z|}{c}$$



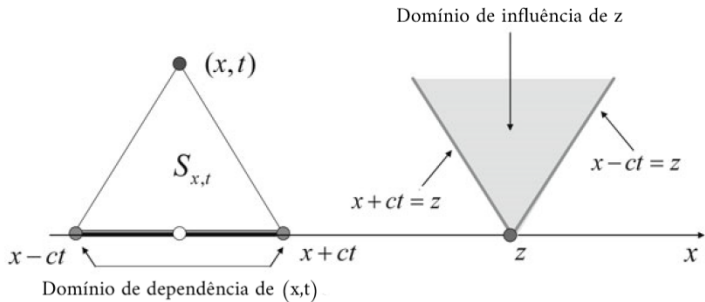


Figure: 4

**Exemplo 1.** Para  $\phi(x) = 0$  e  $\psi(x) = \cos x$ , a solução do problema de valor inicial é

$$u(x, t) = (1/2c)[\sin(x + ct) - \sin(x - ct)] = (1/c) \cos x \sin ct.$$

Portanto para cada  $t$  o gráfico de  $u(x, t)$  é um cossenoide de amplitude  $(1/c) \sin ct$ .

Como  $\sin c(t + 2k\pi/c) = \sin ct$ , temos  $u(x, t + 2k\pi/c) = u(x, t)$  para cada  $x$  e para todo  $k \in \mathbb{Z}$ . Portanto o movimento da corda em qualquer intervalo de tempo  $[2k\pi/c, (2(k + 1)\pi/c]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , é o mesmo no intervalo  $[0, 2\pi/c]$ .

**Exemplo 2 (Corda dedilhada).** Vamos considerar o problema de valor inicial com velocidade inicial  $\psi \equiv 0$  e posição inicial  $\phi$  dada por

$$\phi(x) = \begin{cases} b - \frac{b|x|}{a} & |x| < a \\ 0 & |x| \geq a \end{cases}$$

Pela fórmula de d'Alembert (4), a solução do problema de valor inicial é

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\phi(x + ct) + \phi(x - ct))$$

A função  $u$  é contínua, pois  $\phi$  é contínua, mas não é continuamente diferenciável no plano porque a derivada de  $\phi$  é descontínua em  $x = \pm a$  e  $x = 0$  e portanto as derivadas parciais de  $u$  são descontínuas ao longo das características no plano  $xt$  passando pelos pontos  $(-a, 0)$ ,  $(a, 0)$  e  $(0, 0)$ .

Considerando as características no semiplano  $t \geq 0$  passando pelos pontos  $(-a, 0)$  e  $(a, 0)$ , elas dividem o semiplano  $t \geq 0$  em seis regiões.

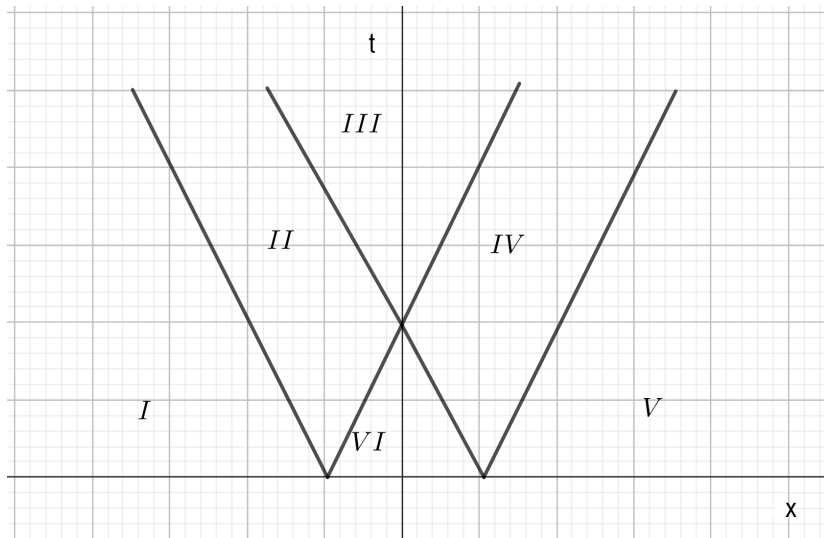


Figure: 5.

Nas regiões I, III e V,  $u(x, t) = 0$ , pois  $|x - ct| > a$  e  $|x + ct| > a$ .

Na região II,  $x - ct < -a$ , mas  $-a < x + ct < a$ . Logo

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\phi(x + ct).$$

Na região IV,  $x + ct > a$ , mas  $-a < x - ct < a$ . Logo

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\phi(x - ct).$$

Na região VI,  $|x - ct| < a$  e  $|x + ct| < a$ . Logo

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2}\phi(x + ct) + \phi(x - ct) \right].$$

## Gráfico de $u$ para $t = a/(2c)$

Se  $x < -3a/2$ , então  $(x, a/(2c)) \in I$ , logo  $u(x, a/(2c)) = 0$ .

Se  $-3a/2 < x < -a/2$ , então  $(x, a/(2c)) \in II$ , logo

$$u(x, a/(2c)) = \frac{1}{2}\phi(x + a/2) = \frac{3b}{4} + \frac{bx}{2a}.$$

Se  $-a/2 < x < a/2$ , então  $(x, a/(2c)) \in VI$ , logo

$$u(x, a/(2c)) = \frac{1}{2}[\phi(x + a/2) + \phi(x - a/2)] = \frac{b}{2}.$$

Se  $a/2 < x < 3a/2$ , então  $(x, a/(2c)) \in IV$ , logo

$$u(x, a/(2c)) = \frac{1}{2}\phi(x - a/2) = \frac{3b}{4} - \frac{bx}{2a}.$$

Se  $x > 3a/2$ , então  $(x, a/(2c)) \in V$ , logo  $u(x, a/(2c)) = 0$ .

## Gráfico de $u$ para $t = a/c$

Se  $x < -2a$ , então  $(x, a/c) \in I$ , logo  $u(x, a/c) = 0$ .

Se  $-2a < x < 0$ , então  $(x, a/c) \in II$ , logo

$$u(x, a/c) = \frac{1}{2}\phi(x + a) = \frac{1}{2} \left( b - \frac{b|x + a|}{a} \right).$$

Se  $0 < x < 2a$ , então  $(x, a/c) \in IV$ , logo

$$u(x, a/c) = \frac{1}{2}\phi(x - a) = \frac{1}{2} \left( b - \frac{b|x - a|}{a} \right).$$

Se  $x > 2a$ , então  $(x, a/c) \in V$ , logo  $u(x, a/c) = 0$ .

## Gráfico de $u$ para $t = 2a/c$

Se  $x < -3a$ , então  $(x, 2a/c) \in I$ , logo  $u(x, 2a/c) = 0$ .

Se  $-3a < x < -a$ , então  $(x, 2a/c) \in II$ , logo

$$u(x, 2a/c) = \frac{1}{2}\phi(x + 2a) = \frac{1}{2} \left( b - \frac{b|x + 2a|}{a} \right).$$

Se  $-a < x < a$ , então  $(x, 2a/c) \in III$ , logo  $u(x, 2a/c) = 0$ . Se

$a < x < 3a$ , então  $(x, 2a/c) \in IV$ , logo

$$u(x, 2a/c) = \frac{1}{2}\phi(x - 2a) = \frac{1}{2} \left( b - \frac{b|x - 2a|}{a} \right).$$

Se  $x > 3a$ , então  $(x, 2a/c) \in V$ , logo  $u(x, 2a/c) = 0$ .



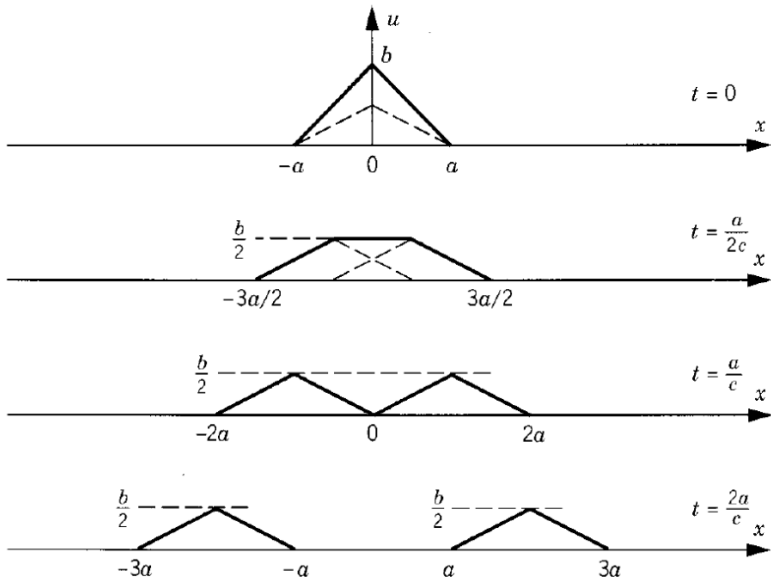


Figure: 6. Gráfico de  $u(x, t_0)$  para alguns valores de  $t_0$ .

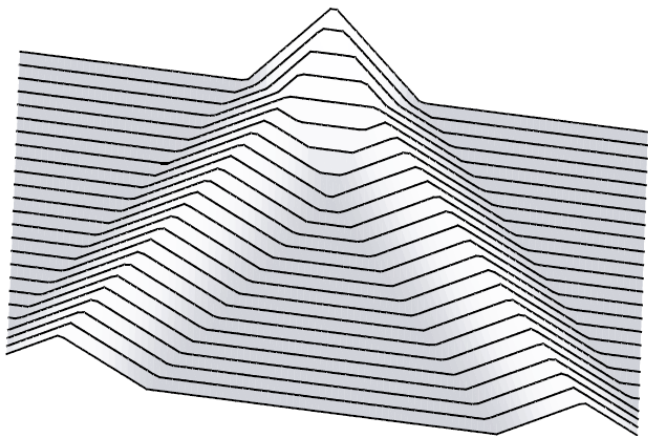


Figure: 7. O gráfico de  $u(x, t)$  ilustra a propagação de ondas da corda infinita dedilhada

## Energia

Considere a corda infinita com  $\rho$  e  $T$  constantes. Então

$$\rho u_{tt} = Tu_{xx}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Da física sabemos que a energia cinética é  $mv^2/2$ , que nesse caso assume a forma

$$E_C(t) = \frac{1}{2}\rho \int_{-\infty}^{\infty} u_t^2 dx.$$

Para ter certeza de que a integral converge, admitimos que  $\phi(x)$  e  $\psi(x)$  se anulam no complementar do intervalo  $\{|x| \leq R\}$ . Como mencionado acima,  $u(x, t)$  (e, portanto,  $u_t(x, t)$  e  $u_x(x, t)$ ) se anula para  $|x| > R + ct$ .

Sob a hipótese que  $u_{tt}$  é contínua, derivando a integral da energia cinética sob o sinal de integração, temos

$$\frac{dE_C}{dt}(t) = \rho \int_{-\infty}^{\infty} u_t u_{tt} dx = T \int_{-\infty}^{\infty} u_t u_{xx} dx.$$

Por integração por partes

$$\int u_t u_{xx} dx = T u_t u_x - T \int u_{tx} u_x dx$$

e usando o fato que  $u_t(x, t)$  e  $u_x(x, t)$  se anulam para  $|x| > R + ct$ , obtemos

$$\frac{dE_C}{dt}(t) = -T \int_{-\infty}^{\infty} u_{tx} u_x dx$$

Mas o termo final é uma derivada pura já que  $u_{tx} u_x = \frac{1}{2}(u_x^2)_t$ .  
Portanto,

$$\frac{dE_C}{dt}(t) = -\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} T u_x^2 dx.$$

Sejam

$$E_P(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} T u_x^2 dx \quad \text{e} \quad E(t) = E_C(t) + E_P(t).$$

Então,

$$\frac{dE_C}{dt}(t) = -\frac{dE_P}{dt}(t), \quad \text{ou seja} \quad \frac{dE}{dt}(t) = 0.$$

Assim,

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\rho u_t^2 + T u_x^2) dx \quad (7)$$

é uma constante independente de  $t$ . Esta é a **lei da conservação da energia**.

Nos cursos de física aprendemos que  $E_P$  tem a interpretação da energia potencial. A única coisa que precisamos matematicamente é a energia total  $E$ . A conservação de energia é um dos fatos mais básicos sobre a equação de onda.

# Difusão

Imaginemos um líquido imóvel que enche um tubo ou cano reto e uma substância química, digamos um corante, que se difunde através do líquido.

A difusão é caracterizada pela seguinte lei: o corante se move de regiões de maior concentração para regiões de menor concentração.

A taxa de movimento é proporcional ao gradiente de concentração (lei de difusão de Fick). Seja  $u(x, t)$  a concentração (massa por unidade de comprimento) do corante na posição  $x$  do tubo no instante  $t$ .

Considera a seção do tubo de  $x_0$  a  $x_1$  (Figura 8),

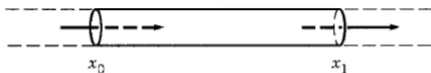


Figure: 8

A massa de corante nessa seção do tubo é

$$M(t) = \int_{x_0}^{x_1} u(x, t) dx,$$

Assim,

$$\frac{dM}{dt}(t) = \int_{x_0}^{x_1} u_t(x, t) dx.$$

Por outro lado, a massa do corante nesta seção muda apenas fluindo para dentro ou para fora pelas suas extremidades. Pela lei de Fick

$$\frac{dM}{dt}(t) = ku_x(x_1, t) - ku_x(x_0, t),$$

onde  $k$  é uma constante de proporcionalidade. Portanto, essas duas expressões são iguais:

$$\int_{x_0}^{x_1} u_t(x, t) dx = ku_x(x_1, t) - ku_x(x_0, t). \quad (8)$$

Derivando com relação a  $x_1$ , obtemos

$$u_t = ku_{xx}$$

Esta é a [equação da difusão](#).

Em dimensões 3, a equação (8) se escreve como

$$\iiint_D u_t \, dx dy dz = k \iint_{\partial D} \nabla u \cdot \vec{n} \, dS$$

onde  $D$  é qualquer domínio limitado em  $\mathbb{R}^3$  e  $\partial D$  é a superfície que limita  $D$ . Pelo teorema da divergência

$$\iint_{\partial D} \nabla u \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_D \operatorname{div}(\nabla u) \, dx dy dz = \iiint_D \Delta u \, dx dy dz.$$

Como  $D$  é arbitrário, segue que

$$u_t = k \Delta u.$$



Se houver uma fonte externa (ou um “sumidouro”) do corante e a taxa  $k$  de difusão é variável, obtemos a equação de difusão não homogênea mais geral

$$u_t = \operatorname{div}(k\nabla u) + f(x, y, z, t).$$

A mesma equação descreve a condução de calor, movimento browniano, modelos de difusão da dinâmica populacional e muitos outros fenômenos.

### Exemplo (Condução de Calor).

Sejam  $u(x, y, z, t)$  a temperatura e  $H(t)$  a quantidade de calor (em calorias) contidas em uma região  $D$ . Então

$$H(t) = \iiint_D c\rho u \, dx dy dz,$$

onde  $c$  é o calor específico<sup>1</sup> do material e  $\rho$  é sua densidade (massa por unidade de volume). A mudança de calor é

$$\frac{dH}{dt} = \iiint_D c\rho u_t \, dx dy dz, \quad (9)$$

---

<sup>1</sup>O calor específico de um material é a quantidade de calor necessária para elevar em 1°C a temperatura de um grama dessa substância.

A lei de Fourier diz que o calor flui de regiões quentes para regiões frias proporcionalmente ao gradiente de temperatura. Mas o calor não pode ser perdido de  $D$ , exceto deixando-o através da fronteira. Portanto, a mudança de energia térmica em  $D$  também é igual ao fluxo de calor através da fronteira,

$$\frac{dH}{dt} = \iint_{\partial D} k \nabla u \cdot \vec{n} dS = \iiint_D \operatorname{div}(k \nabla u) dx dy dz, \quad (10)$$

onde  $k$  é um fator de proporcionalidade (condutividade térmica) e na última igualdade foi usada teorema da divergência.

De (9)–(10), temos

$$\iiint_D c\rho u_t \, dx dy dz = \iiint_D \operatorname{div}(k\nabla u) \, dx dy dz$$

e como  $D$  é arbitrário, obtemos a equação do calor

$$c\rho u_t = \operatorname{div}(k\nabla u).$$

Se  $c$ ,  $\rho$ , and  $k$  são constantes, essa equação é exatamente a mesma que a equação da difusão

$$u_t = K\Delta u$$

onde  $K = k/(c\rho)$  é a difusividade térmica.

# A Equação da Difusão

Nesta aula vamos iniciar o estudo da equação de difusão em dimensão 1

$$u_t = ku_{xx}. \quad (11)$$

Difusões são muito diferentes de ondas, e isso se reflete nas propriedades matemáticas das equações. Como (11) é mais difícil de resolver do que a equação das ondas, iniciamos com uma discussão geral de algumas das propriedades da equação de difusão. A primeira delas é o princípio do máximo, a partir do qual deduziremos a unicidade de um problema de valor inicial e de fronteira.

### Teorema (Princípio Máximo).

Se  $u \in C^2((0, l) \times (0, T)) \cap C([0, l] \times [0, T])$  satisfaz a equação de difusão

$$u_t = ku_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T,$$

então o valor máximo de  $u$  no retângulo  $[0, l] \times [0, T]$  é assumido inicialmente ( $t = 0$ ) ou nas laterais ( $x = 0$  ou  $x = l$ ) (ver Figura 9).

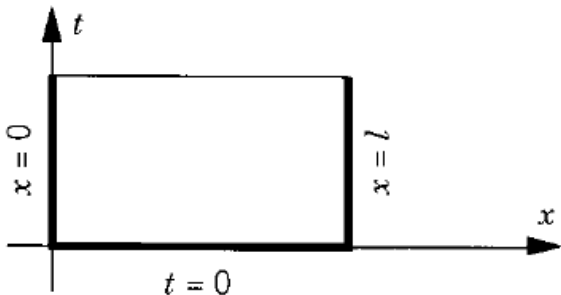


Figure: 9.

**Observação 1.** O valor mínimo tem a mesma propriedade; o valor mínimo de  $u$  no retângulo  $[0, l] \times [0, T]$  é assumido inicialmente ( $t = 0$ ) ou nas laterais ( $x = 0$  ou  $x = l$ ). Para provar isso, basta aplicar o princípio do máximo a  $-u(x, t)$ .

**Observação 2.** Existe uma versão mais forte do princípio do máximo que afirma que o máximo da solução não pode ser assumido no interior do retângulo, a menos que ela seja constante.

Esses princípios têm uma interpretação natural em termos de difusão ou fluxo de calor. Dada uma haste sem fonte interna de calor, o ponto mais quente e o ponto mais frio podem ocorrer apenas inicialmente ou em uma das duas extremidades da haste. Assim, um ponto quente no tempo zero esfriará, a menos que o calor seja alimentado na haste em uma extremidade.

Da mesma forma, dada uma substância se difundindo ao longo de um tubo, sua maior concentração pode ocorrer apenas inicialmente ou em uma das extremidades do tubo.

Se desenharmos um “filme” da solução, o máximo diminui enquanto o mínimo aumenta. Assim, a equação diferencial tende a suavizar a solução. (Isto é muito diferente do comportamento da equação de onda!)



**Demonstração do Princípio Máximo.** Denote

$$R = [0, l] \times [0, T], \quad R_T = [0, l] \times \{T\}, \quad \Gamma_T = \partial R \setminus R_T$$

e

$$M = \max_{(x,t) \in \Gamma_T} u(x, t).$$

Queremos mostrar que

$$u(x, t) \leq M, \quad \forall (x, t) \in R.$$

Seja  $(x_0, t_0)$  um ponto onde o máximo de  $u$  em  $R$  é atingido. Se  $(x_0, t_0)$  pertencer ao interior de  $R$ , então  $u_x(x_0, t_0) = 0$ ,  $u_t(x_0, t_0) = 0$  e  $u_{xx}(x_0, t_0) \leq 0$ . Se  $u_{xx}(x_0, t_0) < 0$ , então teríamos  $u_t \neq ku_{xx}$ . Esta contradição mostra que o máximo de  $u$  sobre  $R$  pode ser atingido somente sobre a fronteira de  $R$ . No entanto, como  $u_{xx}(x_0, t_0)$  pode ser igual a zero, precisamos de um artifício matemático para fazer o argumento funcionar.

Defina

$$v(x, t) = u(x, t) + \epsilon x^2,$$

onde  $\epsilon$  é uma constante positiva. Nosso objetivo é mostrar que

$$v(x, t) \leq M + \epsilon l^2 \quad \forall (x, t) \in R.$$

Uma vez que isso seja feito, teremos

$$u(x, t) \leq M + \epsilon(l^2 - x^2), \quad \forall (x, t) \in R.$$

Como esta conclusão é válida para todo  $\epsilon > 0$ , resulta

$$u(x, t) \leq M \quad \forall (x, t) \in R,$$

que é o que queremos mostrar.

Pela definição de  $v$  e de  $M$ ,

$$v(x, t) \leq M + \epsilon l^2, \quad \forall (x, t) \in \Gamma_T.$$

A função  $v$  satisfaz

$$v_t - kv_{xx} = -2\epsilon k < 0, \quad (12)$$

Suponha que  $v$  atinge seu máximo em um ponto interior  $(x_0, t_0)$ . Assim,  $v_t = 0$  e  $v_{xx} \leq 0$  em  $(x_0, t_0)$ , contradizendo (12). Portanto, não pode haver um máximo de  $v$  no interior de  $R$ . Suponha agora que  $v$  tem um máximo em um ponto na aresta superior  $(0, l) \times \{t_0 = T\}$ . Então  $v_x(x_0, t_0) = 0$  e  $v_{xx}(x_0, t_0) \leq 0$ , como antes. Além disso, como  $v(x_0, t_0)$  é maior que  $v(x_0, t_0 - \delta)$ , temos

$$v_t(x_0, t_0) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{v(x_0, t_0) - v(x_0, t_0 - \delta)}{\delta} \geq 0,$$

o que novamente contradiz (12). Mas,  $v$  atinge o máximo em algum lugar no retângulo fechado  $R = [0, l] \times [0, T]$ . Este máximo deve estar na base ou nas laterais de  $R$ . Logo,  $v(x, t) \leq M + \epsilon l^2$  para todo  $(x, t) \in R$ . Isso prova o princípio do máximo.

# Unicidade

O princípio do máximo pode ser usado para provar a unicidade de solução para o Problema de Dirichlet para a equação de difusão.

**Teorema.** Existe no máximo uma solução do problema

$$(P) \quad \begin{cases} u_t - ku_{xx} = f(x, t), & 0 < x < l, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), & 0 < x < l \\ u(0, t) = g(t), \quad u(l, t) = h(t) & t > 0 \end{cases}$$

para quatro funções dadas  $f$ ,  $\phi$ ,  $g$  e  $h$ .

*Demonstração.* Sejam  $u$  e  $u_2$  duas soluções de  $(P)$ . Defina  $w = u_1 - u_2$ . Então  $w_t - kw_{xx} = 0$ ,  $w(x, 0) = 0$  para  $0 < x < l$ ,  $w(0, t) = 0$  e  $w(l, t) = 0$  para  $t > 0$ . Seja  $T > 0$  qualquer. Pelo princípio do máximo,  $w(x, t)$  tem seu máximo para o retângulo  $[0, l] \times [0, T]$  na parte inferior ou nas laterais - exatamente onde  $w$  se anula. Então  $w(x, t) \leq 0$ . O mesmo tipo de argumento para o mínimo mostra que  $w(x, t) \geq 0$ . Portanto,  $w(x, t) \equiv 0$ , de modo que  $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$  para todo  $t \geq 0$  e  $0 \leq x \leq l$ .

# Estabilidade

O princípio do máximo também pode ser usado para provar a dependência contínua dos dados iniciais do Problema de Dirichlet para a equação de difusão.

**Teorema.** Sejam  $u_i$ ,  $i = 1, 2$ , as respectivas soluções dos problemas

$$(P) \quad \begin{cases} u_t - ku_{xx} = f(x, t), & 0 < x < l, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \phi_i(x), & 0 < x < l \\ u(0, t) = g(t), \quad u(l, t) = h(t) & t > 0 \end{cases}$$

Então,

$$\max_{0 \leq x \leq l} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \max_{0 \leq x \leq l} |\phi_1(x) - \phi_2(x)| \quad (13)$$

para todo  $t > 0$ .

*Demonstração.* Defina  $w \equiv u_1 - u_2$ . Então  $w$  é solução da equação de difusão  $w_t - kw_{xx} = 0$ , com dados inicial  $w(x, 0) = \phi_1(x) - \phi_2(x)$  e de contorno  $w(0, t) = w(l, t) = 0$ . O princípio do máximo afirma que

$$u_1(x, t) - u_2(x, t) \leq \max_{0 \leq x \leq l} |\phi_1(x) - \phi_2(x)|.$$

O princípio do mínimo diz que

$$u_1(x, t) - u_2(x, t) \geq - \max_{0 \leq x \leq l} |\phi_1(x) - \phi_2(x)|.$$

Portanto,

$$\max_{0 \leq x \leq l} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \max_{0 \leq x \leq l} |\phi_1(x) - \phi_2(x)|$$

para todo  $t > 0$ .

A desigualdade (13) é uma estimativa de estabilidade, útil em muitas situações concretas. De fato, se

$$\max_{0 \leq x \leq l} |\phi_1(x) - \phi_2(x)| \leq \epsilon,$$

então

$$\max_{0 \leq x \leq l} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \epsilon.$$

para todo  $t > 0$ .



## Difusão na reta infinita

O objetivo agora é resolver o problema

$$u_t = ku_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, t > 0 \quad (14)$$

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad -\infty < x < \infty \quad (15)$$

Como a solução de (14) não é fácil de encontrar, primeiro preparamos o cenário fazendo alguns comentários gerais. Nosso método é resolvê-lo para um  $\Phi(x)$  particular e, em seguida, construir o geral solução deste particular. Usaremos cinco propriedades básicas de invariância da equação de difusão (14).

- (a) A translação  $u(x - y, t)$  de qualquer solução  $u(x, t)$  de (14) também solução de (14), para qualquer  $y$  fixo.
- (b) Qualquer derivada ( $u_x$  ou  $u_t$  ou  $u_{xx}$ , etc.) de uma solução de (14) também é uma solução de (14).
- (c) Uma combinação linear de soluções de (14) é novamente uma solução de (14).
- (d) Uma integral de soluções (14) é uma solução de (14). Assim, se  $S(x, t)$  é uma solução de (14), então  $S(x - y, t)$  também é e

$$v(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x - y, t)g(y) dy$$

também é uma solução, para qualquer função  $g(y)$  desde que esta integral imprópria seja convergente.

- (e) Se  $u(x, t)$  é uma solução de (14), a função dilatada  $u(\sqrt{ax}, at)$  também é, para qualquer  $a > 0$ .

De fato, seja  $v(x, t) = u(\sqrt{ax}, at)$ . Pela regra da cadeia,  $v_t = au_t$ ,  $v_x = \sqrt{a}u_x$  e  $v_{xx} = \sqrt{a}\sqrt{a}u_{xx} = au_{xx}$ . Logo,

$$v_t - kv_{xx} = au_t - kau_{xx} = a(u_t - ku_{xx}) = 0.$$

Nosso objetivo é encontrar uma solução particular de (14) e então construir todas as outras soluções usando a propriedade (d). A solução particular que procuraremos é aquela, denotada por  $Q(x, t)$ , que satisfaz a condição inicial especial

$$Q(x, 0) = 1 \text{ para } x > 0, \quad Q(x, 0) = 0 \text{ para } x < 0. \quad (16)$$

A razão para esta escolha é que esta condição inicial não muda sob dilatação. Encontraremos  $Q$  em três etapas:

## Etapa 1

Procuraremos  $Q(x, t)$  da forma especial

$$Q(x, t) = g(p) \quad \text{onde } p = \frac{x}{\sqrt{4kt}} \quad (17)$$

onde  $g$  é uma função de apenas uma variável (a ser determinada).  
O fator  $\sqrt{4k}$  é incluído apenas para simplificar uma fórmula posterior.

## Etapa 2

Usando (17), convertemos (14) em uma EDO para  $g$  usando a regra da cadeia:

$$Q_t = \frac{dg}{dp} \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{2t} \frac{x}{\sqrt{4kt}} g'(p)$$

$$Q_x = \frac{dg}{dp} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{4kt}} g'(p)$$

$$Q_{xx} = \frac{dQ_x}{dp} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{4kt} g''(p)$$

Impondo que  $Q$  é solução de (14), temos

$$0 = Q_t - kQ_{xx} = \frac{1}{t} \left[ -\frac{1}{2}pg'(p) - \frac{1}{4}g''(p) \right]$$

Assim,

$$g''(p) + 2pg'(p) = 0.$$

Resolvendo esta EDO pelo método do fator integrante, obtemos  $g'(p) = c_1 \exp(-p^2)$  e

$$Q(x, t) = g(p) = c_1 \int_0^{x/\sqrt{4kt}} e^{-p^2} dp + c_2.$$

## Etapa 3

Usando (16) expresso como um limite como segue:

Se  $x > 0$ ,

$$1 = \lim_{t \rightarrow 0^+} Q(x, t) = c_1 \int_0^{\infty} e^{-p^2} dp + c_2 = c_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} + c_2.$$

Se  $x < 0$ ,

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} Q(x, t) = c_1 \int_0^{-\infty} e^{-p^2} dp + c_2 = -c_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} + c_2.$$

Logo,  $c_1 = 1/\sqrt{\pi}$  e  $c_2 = 1/2$ . Portanto,

$$Q(x, t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/\sqrt{4kt}} e^{-p^2} dp \quad (18)$$

para  $t > 0$ . Observe que de fato  $Q$  satisfaz (14), (16) e (17).

## Etapa 4

Tendo encontrado  $Q$ , definimos agora  $S = \partial Q / \partial x$ .

Pela propriedade (b),  $S$  também é uma solução de (14). Dada qualquer função  $\phi$ , definimos

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x - y)\phi(y) dy \quad \text{para } t > 0. \quad (19)$$

Pela propriedade (d),  $u$  é solução de (14). Afirmamos que  $u$  é solução de (14), (15). Para verificar a validade de (15), escrevemos

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial Q}{\partial x}(x - y, t)\phi(y) dy \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y}[Q(x - y, t)]\phi(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} Q(x - y, t)\phi'(y) dy - Q(x - y, t)\phi(y) \Big|_{y=-\infty}^{y=\infty}, \end{aligned}$$

após integração por partes.



Assumimos que esses limites se anulam. Em particular, vamos assumir temporariamente que  $\phi(y)$  é igual a zero para  $|y|$  grande. Portanto,

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(x - y, t)\phi'(y) dy.$$

Além disso, fazendo  $t \rightarrow 0^+$ , temos

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(x - y, 0)\phi'(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^x \phi'(y) dy = \phi(y) \Big|_{-\infty}^x = \phi(x) \end{aligned}$$

por causa da condição inicial para  $Q$  e a suposição de que  $\phi(-\infty) = 0$ . Esta é a condição inicial (15).

Concluimos que (19) é a fórmula da solução, onde

$$S(x, t) = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} e^{-x^2/4kt}, \quad \text{para } t > 0. \quad (20)$$

Isto é

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/4kt} \phi(y) dy, \quad t > 0 \quad (21)$$

$S(x, t)$  dada por (20) é conhecida como função fonte, função de Green, solução fundamental, gaussiana, ou propagadora da equação de difusão, ou simplesmente núcleo da difusão. Ela fornece a solução de (14), (15) com qualquer dado inicial  $\phi$  por meio da fórmula (16), a qual é válida somente para  $t > 0$ .

A função fonte  $S(x, t)$  é definida para todo  $x$  real e para todo  $t > 0$ .  $S(x, t)$  é positiva e é par em  $x$ . A Figura 10 mostra o gráfico de  $S(x, t)$  para diferentes valores de  $t$ . Para  $t$  grande, o gráfico é espalhado. Para  $t$  pequeno, o gráfico é pontiagudo (uma “função delta”) de altura  $(4\pi kt)^{-1/2}$ . A área sob o gráfico  $S(x, t)$  para cada  $t$  é

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(x, t) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-q^2} dq = 1. \quad (22)$$

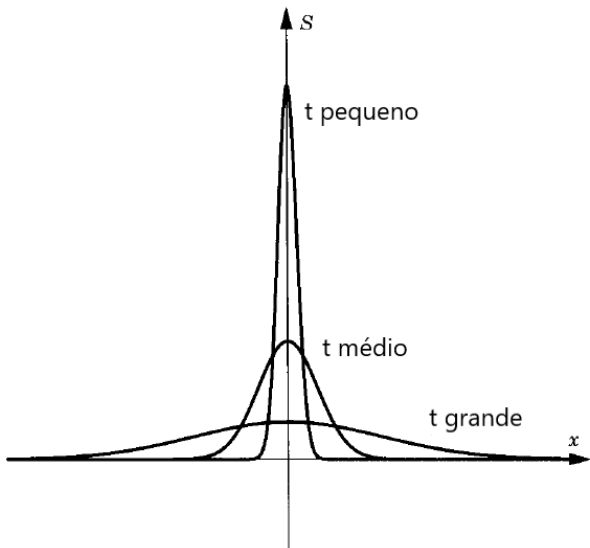


Figure: 10.

Observe que o valor da solução  $u(x, t)$  dado pela fórmula (19) é uma espécie de média ponderada dos valores iniciais em torno do ponto  $x$ . De fato, podemos escrever

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x - y, t)\phi(y)dy \approx \sum_i S(x - y_i, t)\phi(y_i)\Delta y_i$$

Esta é a média das soluções  $S(x - y_i, t)$  com os pesos  $\phi(y_i)$ . Para  $t$  muito pequeno, a função fonte é um pico de modo que a fórmula exagera os valores de  $\phi$  perto de  $x$ . Para qualquer  $t > 0$  a solução é uma versão espalhada dos valores iniciais em  $t = 0$ .

## Interpretação física:

a) No caso da difusão:  $S(x - y, t)$  representa o resultado de uma unidade de massa (digamos, 1 grama) de substância localizada no tempo zero exatamente na posição  $y$  que está se difundindo (espalhando) conforme o tempo avança. Para qualquer distribuição inicial de concentração, a quantidade de substância inicialmente no intervalo  $\Delta y$  se espalha no tempo e contribui aproximadamente com o termo  $S(x - y_i, t)\phi(y_i)\Delta y_i$ . Todas essas contribuições são somadas para obter toda a distribuição da matéria.

b) Para o fluxo de calor:  $S(x - y, t)$  representa o resultado de um “ponto quente” em  $y$  no tempo 0. O ponto quente está esfriando e espalhando seu calor ao longo da haste.

Geralmente é impossível avaliar a integral (21) completamente em termos de funções elementares. O próximo exemplo é um caso particular em que a integral que pode ser dada em termos de funções elementares.

**Exemplo.** Resolva a equação de difusão com a condição inicial  $u(x, 0) = e^{-x}$ .

Pela fórmula (eq21), a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/4kt} e^{-y} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2-2xy+y^2+4kty)/4kt} dy \end{aligned}$$

Completando o quadrado na variável  $y$ ,

$$-\frac{x^2 - 2xy + y^2 + 4kty}{4kt} = -\frac{(y + 2kt - x)^2}{4kt} + kt - x$$

Seja  $p = (y + 2kt - x)/\sqrt{4kt}$ . Então

$$u(x, t) = \frac{e^{kt-x}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-p^2} dp = e^{kt-x}.$$

## Existência de solução

A obtenção da fórmula (21) da solução do problema (14)-(15) é heurística e precisamos garantir que as coisas funcionam de fato. Em particular, deve ser assegurado que, sob condições razoáveis no dado inicial  $\phi$ , a função  $u$  dada em (21) seja efetivamente a única solução de Problema (14)-(15).

Por exemplo, vemos que se  $\phi(x)$  cresce muito para  $x \rightarrow \pm\infty$ , por exemplo mais de uma exponencial do tipo  $e^{ax^2}$ ,  $a > 0$ , a rápida convergência da função Gaussiana para zero não é suficiente a integral em (21) convergir. Mais delicada ainda é a unicidade de solução, como veremos adiante.



O teorema a seguir garante que (21) é de fato uma solução do problema (14)-(15) sob hipóteses bastante naturais sobre o dado inicial, verificadas nos casos importantes para as aplicações. A prova é bastante técnica e preferimos omiti-la. Contudo, no caso  $\phi$  contínuo e limitada a prova é consideravelmente mais simples.

**Teorema (existência local).** Seja  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua tal que

$$|\phi(x)| \leq Ce^{ax^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (23)$$

onde  $a$  e  $C$  são constantes positivas. Então:

- (a) A função  $u$  dada por (21) está bem definida e é diferenciável em qualquer ordem na faixa  $\mathbb{R} \times (0, T)$ , com  $T < 1/(4ka)$  e nesta faixa

$$u_t - ku_{xx} = 0.$$

- (b) Para qualquer  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,

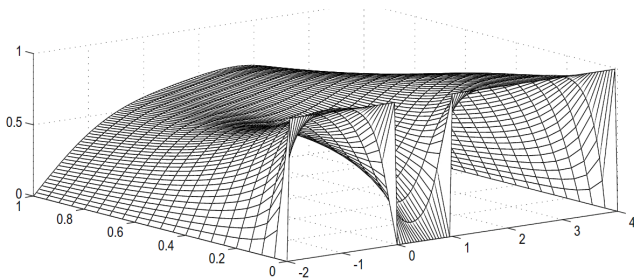
$$u(x, t) \rightarrow \phi(x_0) \quad \text{para } (x, t) \rightarrow (x_0, 0), \quad t > 0.$$

# Observações

1. O teorema indica que, se admitirmos um dado inicial com um crescimento máximo exponencial como o indicado, (21) é uma solução de (14)-(15) que existe pelo menos em um intervalo de tempo limitado. Veremos mais adiante que, nas hipóteses indicadas, também é a única solução.
2. Em muitas aplicações, os dados iniciais têm crescimento máximo do tipo polinomial, para o qual a desigualdade (23) é satisfeita para qualquer  $a > 0$ . Isso implica que, na realidade, não há restrição no intervalo de tempo de existência desta solução.

3. A propriedade (a) afirma um fato bastante interessante: mesmo que o dado inicial seja descontínuo em um ponto, imediatamente a seguir a solução torna-se contínua (em verdade de classe  $C^\infty$ ). A difusão é, portanto, um processo regularizador, que tende a suavizar as irregularidades, em nítido contraste com a equação das ondas. A figura abaixo ilustra o para o dado inicial

$$\phi(x) = \xi_{(-2,0)}(x) + \xi_{(1,4)}(x).$$



**Figure:** Efeito de regularização da equação do calor (Fonte: S. Salsa, Equazioni a derivate parziali: Metodi, modelli e applicazioni, 2a ed. Milano: Springer-Verlag , 2010)

## Demonstração do Teorema (existência local) para o caso em que $\phi$ é contínua e limitada.

a) A prova que  $\mathbb{R} \times (0, T)$  está bem definida na faixa  $\mathbb{R} \times (0, T)$ , com  $T < 1/(4ka)$ , é o Exercício 5 da Lista 4.

Para mostrar a diferenciabilidade nesta faixa  $\mathbb{R} \times (0, T)$ , como a função  $S(x, t)$  é  $C^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ , com derivadas de todas as ordens uniformemente limitadas em  $\mathbb{R} \times [\delta, T)$  para cada  $\delta > 0$ , temos  $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))$ . Além disso, derivando sobre o sinal de integração em (19), temos

$$u_t(x, t) - ku_{xx}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{(S_t - kS_{xx})(x - y, t)}_{=0} \phi(y) dy = 0,$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \in (0, T)$ .

b) Dados  $x_0 \in \mathbb{R}$  e  $\epsilon > 0$ , tome  $\delta > 0$  tal que

$$|y - x_0| < \delta \Rightarrow |\phi(y) - \phi(x_0)| < \epsilon.$$

Se  $|x - x_0| < \delta/2$ , usando (22), temos

$$\begin{aligned} |u(x, t) - \phi(x_0)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} S(x - y, t)(\phi(y) - \phi(x_0)) dy \right| \\ &\leq \left[ \int_{|y-x_0| < \delta} + \int_{|y-x_0| \geq \delta} \right] S(x - y, t) |\phi(y) - \phi(x_0)| dy \\ &:= I + J. \end{aligned}$$

Agora

$$I \leq \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} S(x - y, t) dy = \epsilon.$$

Como  $\phi$  é limitada, existe  $M > 0$  tal que  $|\phi(x)| \leq M$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Assim,

$$J \leq 2M \int_{|y-x_0| \geq \delta} S(x-y, t) dy = \frac{2M}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{|y-x_0| \geq \delta} e^{-(x-y)^2/4kt} dy.$$

Usando que  $|x - x_0| < \delta/2$  e  $|y - x_0| \geq \delta$ , temos

$$|x - y| \geq \frac{1}{2}|y - x_0|,$$

pois

$$|y - x_0| \leq |y - x| + |x - x_0| \leq |y - x| + \frac{\delta}{2} \leq |y - x| + \frac{1}{2}|y - x_0|,$$

implicando

$$\frac{1}{2}|y - x_0| \leq |x - y|.$$

Usando isso, temos

$$\begin{aligned} J &\leq \frac{2M}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{|y-x_0| \geq \delta} e^{-(x-y)^2/4kt} dy \\ &\leq \frac{2M}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{|y-x_0| \geq \delta} e^{-(y-x_0)^2/16kt} dy \quad (y - x_0 = z\sqrt{4\pi kt}) \\ &= 2M \int_{\frac{\delta}{\sqrt{4\pi kt}}}^{\infty} e^{-\pi z^2/4} dz \quad \left( p = \frac{\sqrt{\pi}z}{2} \right) \\ &= \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\delta}{4\sqrt{\pi kt}}}^{\infty} e^{-p^2} dp \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow 0^+ \end{aligned}$$

Assim, se  $|x - x_0| < \delta/2$  e  $t > 0$  é suficientemente pequeno,

$$|u(x, t) - \phi(x_0)| < 2\epsilon.$$



# Unicidade

A questão da unicidade da solução do problema (14)-(15) permanece em aberto. O seguinte contra-exemplo de Tychonoff mostra que não há unicidade, em geral.

Seja

$$h(t) = \begin{cases} e^{(-t^{-2})} & \text{para } t > 0 \\ 0 & \text{para } t \leq 0. \end{cases}$$

A função

$$T(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(t)}{(2n)!} x^{2n}$$

é uma solução da equação  $u_t - u_{xx} = 0$  com dado inicial nulo.<sup>2</sup> Como também  $u(x, t) \equiv 0$  é uma solução do mesmo problema, deduzimos que, em geral, o problema de (14)-(15) não tem solução única e, portanto, não é bem posto.

---

<sup>2</sup>A verificação não é fácil. Veja página 171 do livro [F. John. Partial Differential Equations. IV ed., Springer-Verlag, New York, 1982].

O que acontece com  $T$  é que essa função cresce demais para tempos pequenos. De fato, a melhor estimativa de crescimento para  $T$  é a seguinte:

$$|T(x, t)| \leq Ce^{x^2/(\theta t)}$$

para  $C$  e  $\theta$  constantes positivas, que piora rapidamente quando  $t \rightarrow 0^+$  por causa do fator  $1/\theta t$  como expoente.

Se em vez de  $1/\theta t$  fosse uma constante, então as coisas mudam. De fato, na classe de soluções de crescimento controlado de uma exponencial do tipo  $Ce^{ax^2}$ , a solução do problema (14)-(15) é única. Isto é uma consequência do seguinte princípio máximo.

# Princípio do Máximo Global

**Teorema (Princípio do Máximo Global).** Se  $u$  é contínua em  $\mathbb{R} \times [0, T]$ , com derivadas  $u_x$ ,  $u_{xx}$ ,  $u_t$  contínuas em  $\mathbb{R} \times (0, T)$ , tal que

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, 0 < t < T \\ u(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

e

$$u(x, t) \leq Ce^{ax^2} \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T] \quad [\text{resp. } u(x, t) \geq -Ce^{ax^2}]$$

Então

$$\sup_{(x,t) \in \mathbb{R} \times [0, T]} u(x, t) = \sup_{x \in \mathbb{R}} g(x) \quad [\text{resp. } \inf_{(x,t) \in \mathbb{R} \times [0, T]} u(x, t) = \inf_{x \in \mathbb{R}} g(x)]$$

*Demonstração.* Suponha que  $T < \frac{1}{4a}$ . Seja  $\epsilon > 0$  tal que  $T + \epsilon < \frac{1}{4a}$ . Fixados  $y \in \mathbb{R}$  e  $\mu > 0$ , defina

$$v(x, t) = u(x, t) - \frac{\mu}{(T + \epsilon - t)^{1/2}} e^{|x-y|^2/4(T+\epsilon-t)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Um cálculo direto mostra que (exercício)

$$v_t - v_{xx} = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T].$$

Fixe  $r > 0$  e os conjuntos

$$\begin{aligned} U &= (y - r, y + r), \\ U_T &= (y - r, y + r) \times (0, T] \\ \Gamma_T &= \overline{U_T} \setminus U_T \end{aligned}$$

Pelo Princípio do Máximo,

$$\max_{\overline{U_T}} v = \max_{\Gamma_T} v \quad (24)$$

Agora se  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$v(x, 0) = u(x, 0) - \frac{\mu}{(T + \epsilon)^{1/2}} e^{|x-y|^2/4(T+\epsilon)} \leq u(x, 0) = g(x),$$

e se  $|x - y| = r$ ,  $0 \leq t \leq T$ , então

$$\begin{aligned} v(x, t) &= u(x, t) - \frac{\mu}{(T + \epsilon - t)^{1/2}} e^{r^2/4(T+\epsilon-t)} \\ &\leq Ce^{ax^2} - \frac{\mu}{(T + \epsilon - t)^{1/2}} e^{r^2/4(T+\epsilon-t)} \\ &\leq Ce^{a(|y|+r)^2} - \frac{\mu}{(T + \epsilon - t)^{1/2}} e^{r^2/4(T+\epsilon-t)}. \end{aligned} \quad (25)$$

Como  $T < \frac{1}{4a}$ , existe  $\gamma > 0$  tal que  $\frac{1}{T+\epsilon} = a + \gamma$ . Assim, (25) pode ser reescrito como

$$v(x, t) \leq Ce^{a(|y|+r)^2} - \mu(4(a + \gamma))^{1/2} e^{(a+\gamma)r^2} \leq \sup_{\mathbb{R}} g, \quad (26)$$

desde que  $r > 0$  seja escolhido suficientemente grande. Assim (24)-(26) implicam

$$v(y, t) \leq \sup_{\mathbb{R}} g, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

desde que  $T < \frac{1}{4a}$ . Por fim, tomando  $\mu \rightarrow 0$  na definição de  $v$ , obtemos  $\sup_{\mathbb{R} \times [0, T]} u \leq \sup_{\mathbb{R}} g$ .

Se  $T > \frac{1}{4a}$ , dividimos o intervalo  $[0, T]$  em  $n$  subintervalos de comprimento menor que  $\frac{1}{4a}$  e repetimos o argumento acima em cada subintervalo. Isto conclui a demonstração do princípio do máximo.

**Corolário.** Sejam  $\phi$  contínua em  $\mathbb{R}$  e  $f$  é contínua  $\mathbb{R} \times [0, T)$ . Então existe no máximo uma solução do problema

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = f(x, t), & x \in \mathbb{R}, 0 < t < T \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

satisfazendo a condição

$$|u(x, t)| \leq Ce^{ax^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq T$$

para constantes positivas  $C$  e  $a$ .

*Demonstração.* Se  $u_1$  e  $u_2$  satisfazem essas hipóteses, então  $u_1 - u_2$  satisfazem

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, 0 < t < T \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

e

$$-2Ce^{ax^2} \leq (u_1 - u_2)(x, t) \leq 2Ce^{ax^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq T.$$

Pelo Princípio do Máximo Global,

$$0 = \inf_{x \in \mathbb{R}} 0 = \inf_{(x,t) \in \mathbb{R} \times [0, T]} (u_1 - u_2) \leq \sup_{(x,t) \in \mathbb{R} \times [0, T]} (u_1 - u_2) = \sup_{x \in \mathbb{R}} 0 = 0,$$

ou seja,  $u_1 \equiv u_2$ .



# Comparação de Ondas e Difusões

Vimos que a propriedade básica das ondas é que a informação é transportada em ambas as direções com uma velocidade finita. A propriedade básica das difusões é que a perturbação inicial se espalha de forma suave e gradualmente desaparece. As propriedades fundamentais dessas duas equações podem ser resumidos na tabela a seguir.

Propriedade	Ondas	Difusões
(i) Velocidade de propagação?	Finita	Infinita
(ii) Singularidades para $t > 0$ ?	Transportada ao longo das	Perdida imediatamente
(iii) Bem posto para $t > 0$ ?	Sim	Sim (pelo menos para soluções limitadas)
(iv) Bem posto para $t < 0$ ?	Sim	Não
(v) Princípio do Máximo?	Não	Sim
(vi) Comportamento quando $t \rightarrow \infty$ ?	Energia é constante	Decai para zero (se $\phi$ é integrável)
(vii) Informação?	Transportada	Perdida gradualmente

Que não há princípio máximo para a equações das ondas, veremos no estudo da corda finita que as soluções são periódicas e os máximos são atingidos infinitas vezes também em pontos interiores.

Para a equação de difusão discutimos a propriedade (ii), que as singularidades são imediatamente perdidas, na seção sobre dados iniciais contínuos por partes. A solução é diferenciável para todas as ordens, mesmo que os dados iniciais não sejam.

As propriedades (iii), (v) e (vi) já foram mostradas. O fato de que a informação é gradualmente perdida [propriedade (vii)] fica claro no gráfico de uma solução típica, por exemplo, de  $S(x, t)$ .

Quanto à propriedade (i) para a equação de difusão, observe na fórmula (21) que o valor de  $u(x, t)$  depende dos valores do dado inicial  $\phi(y)$  para todo  $y$ , onde  $-\infty < y < \infty$ . Por outro lado, o valor de  $\phi$  em um ponto  $x_0$  tem um efeito imediato em todos os lugares (para  $t > 0$ ), embora a maior parte de seu efeito seja apenas por um curto período próximo a  $x_0$ . Portanto, a velocidade de propagação é infinita.

Quanto a (iv), vejamos uma situação em a equação de difusão não está bem colocada para  $t < 0$  (“para trás no tempo”). Seja

$$u_n(x, t) = \frac{1}{n} \sin nx e^{-n^2 kt}.$$

Podemos verificar que  $u_n$  satisfaz a equação de difusão para todo  $x, t$ . Além disso,  $u_n(x, 0) = n^{-1} \sin nx \rightarrow 0$  uniformemente quando  $n \rightarrow \infty$ . Mas considere qualquer  $t < 0$ , digamos  $t = -1$ . Então  $u_n(x, -1) = n^{-1} \sin nx e^{+kn^2} \rightarrow \pm\infty$  uniformemente quando  $n \rightarrow \infty$  exceto por alguns  $x$ . Assim,  $u_n$  está próximo da solução nula no tempo  $t = 0$ , mas não no tempo  $t = -1$ . Isso viola a estabilidade, pelo menos no sentido uniforme.