

Potenciais dependentes do tempo: Representação de interações

Consideramos a hamiltoniana

$$H = H_0 + V(t)$$

onde H_0 não depende explicitamente do tempo mas $V(t)$ depende.

Suponha que as autofunções e autovalores de H_0 são conhecidos:

$$H_0 |m\rangle = E_m |m\rangle$$

Estamos interessados no caso em que inicialmente apenas um estado, $|i\rangle$, está populado.

Conforme o tempo passa, a perturbação $V(t)$ causa transições e outros estados se tornam populados.

O operador de evolução não é simplesmente $e^{-iHt/\hbar}$ quando H depende explicitamente de t .

Questão: Qual a probabilidade, em função do tempo, de encontrar o sistema em um estado $|m\rangle$ com $m \neq i$?

Precisamos saber como um estado qualquer evolui no tempo com a Hamiltoniana $H = H_0 + V(t)$.

Suponha que em $t=0$ temos

$$|\alpha\rangle = \sum_m c_m(0) |m\rangle$$

e queremos encontrar $c_m(t)$ tal que

$$|\alpha, t_0=0, t\rangle = \sum_m c_m(t) e^{-iE_m t/\hbar} |m\rangle$$

Onde $|\alpha, t_0=0, t>$ é o ket na rep. de Schrodinger em $t=t$ e cujo ket correspondente em $t=0$ é $|\alpha\rangle$.

A fase $e^{-iE_0 t/\hbar}$ é colocada porque a evolução temporal de $c_n(t)$ fica dependendo somente de $V(t)$. Tal fase existe mesmo quando $V=0$ e dar $c(t) = c(0)$.

Representações de Interações

Suponha que em $t=t_0$ tenhamos um estado $|\alpha\rangle$ e que em $t=t$ temos o estado, na rep. de Schrodinger, $|\alpha, t_0, t\rangle_S$.

Definimos

$$|\alpha, t_0, t\rangle_I \equiv e^{iH_0 t/\hbar} |\alpha, t_0, t\rangle_S \quad (*)$$

onde $|\mathcal{I}\rangle \equiv$ estado na rep. de interações (introduzida agora)

Para operadores definimos

$$A_I \equiv e^{iH_0 t/\hbar} A_S e^{-iH_0 t/\hbar} \quad (**)$$

e em particular

$$V_I \equiv e^{iH_0 t/\hbar} V(t) e^{-iH_0 t/\hbar}$$

↑ potencial dependente do tempo na rep. de Schrodinger

Os estados e operadores nas reps de Schrodinger e Heisenberg estão relacionados por

$$|\alpha\rangle_H = e^{iH t/\hbar} |\alpha, t_0=0, t\rangle_S$$

$$A_H = e^{iH t/\hbar} A_S e^{-iH t/\hbar}$$

A diferença de (*) e (**) é que temos agora H e não H_0 .

Vejamos a evolução temporal

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha, t_0, t\rangle_I &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (e^{iH_0 t/\hbar} |\alpha, t_0, t\rangle_S) \\
 &= -H_0 e^{iH_0 t/\hbar} |\alpha, t_0, t\rangle_S + e^{iH_0 t/\hbar} \overbrace{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha, t_0, t\rangle_S}^{(\text{da eq. de Schrödinger})} \\
 &= e^{iH_0 t/\hbar} V e^{-iH_0 t/\hbar} e^{iH_0 t/\hbar} |\alpha, t_0, t\rangle_S
 \end{aligned}$$

e daí

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha, t_0, t\rangle_I = V_I |\alpha, t_0, t\rangle_I \quad (5.5.11)$$

On seja V_I tome o lugar da Hamiltoniana na eq. de interação. Se a perturbação V_I é nula o ket $|\alpha, t_0, t\rangle_I$ é constante no tempo.

No caso de uma observável A

$$i\hbar \frac{\partial A_I}{\partial t} = -H_0 A_I + e^{iH_0 t/\hbar} \frac{\partial A_S}{\partial t} e^{-iH_0 t/\hbar} + A_I H_0$$

Se A_S não depende explicitamente do tempo

$$i\hbar \frac{\partial A_I}{\partial t} = [A_I, H_0] \quad (\text{para a eq. de Heisenberg com } H \text{ trocado por } H_0)$$

Portanto

	Rep. Heisenberg	Rep. Int.	Rep. Schrödinger
Estado	não evolui	evolui com V	evolui com H
Operador	evolui com H	evolui com H_0	não evolui

↑
 eq. intermediária
 entre a de Heisenberg
 e Schrödinger

Rep. de Interação também chamada de Rep. de Dirac

Do fato que (veja s.s.4)

$$|\alpha, t_0=0, t\rangle_S = \sum_n C_n(t) e^{-i E_n t/\hbar} |n\rangle$$

temos

$$\begin{aligned} |\alpha, t_0=0, t\rangle_I &= e^{i H_0 t/\hbar} |\alpha, t_0=0, t\rangle_S \\ &= \sum_n C_n(t) |n\rangle \quad (\text{pois } H_0 |n\rangle = E_n |n\rangle) \end{aligned}$$

Portanto na rep. de interações continuamos a usar os autoestados de H_0 (estacionários) como base.

De (S.S.11) (multiplicando por $\langle n|$)

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle n|\alpha, t_0, t\rangle_I &= \langle n|V_I|\alpha, t_0, t\rangle_I \\ &= \sum_m \langle n|V_I|m\rangle \langle m|\alpha, t_0, t\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle n|V_I|m\rangle &= \langle n|e^{i H_0 t/\hbar} V_S(t) e^{-i H_0 t/\hbar} |m\rangle \\ &= V_{nm}(t) e^{i(E_m - E_n)t/\hbar} \end{aligned}$$

onde $V_{nm}(t) = \langle n|V_S(t)|m\rangle$

Como $\langle m|m\rangle = \delta_{mm}$ temos

$$C_n(t) = \langle n|\alpha, t_0, t\rangle_I$$

e então

$$i\hbar \frac{\partial C_n(t)}{\partial t} = \sum_m V_{nm}(t) e^{i\omega_{nm}t} C_m(t)$$

~~isto é~~
~~isto é~~
~~isto é~~
~~isto é~~

onde $\omega_{mm} = -\omega_{mm} = \frac{E_m - E_m}{\hbar}$

$$i\hbar \begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} e^{i\omega_{12}t} \\ V_{21} e^{i\omega_{21}t} & V_{22} \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

O Problema de dois estados dependente do tempo

Definimos o problema por

$$H_0 = E_1 |1\rangle\langle 1| + E_2 |2\rangle\langle 2| \quad (E_2 > E_1)$$

$$V(t) = \gamma e^{i\omega t} |1\rangle\langle 2| + \gamma e^{-i\omega t} |2\rangle\langle 1| \quad (5.5.18)$$

$$(\hat{O}|m\rangle = \sum_n |n\rangle\langle n|\hat{O}|m\rangle \Rightarrow \hat{O} = \sum_{m,n} |m\rangle\langle n| O_{nm}, \quad O_{nm} = \langle n|\hat{O}|m\rangle)$$

Portanto temos

$$V_{11} = V_{22} = 0 \quad V_{12} = V_{21}^* = \gamma e^{i\omega t}$$

Podemos encontrar a solução exata do problema. Se em $t=0$ somente o nível 1 é populado

$$c_1(0) = 1 \quad c_2(0) = 0$$

obtemos ψ (veja problema 30)

$$|c_2(t)|^2 = \frac{\gamma^2/\hbar^2}{\gamma^2/\hbar^2 + (\omega - \omega_{21})^2/4} \sin^2 \left\{ \left[\frac{\gamma^2}{\hbar^2} + \frac{(\omega - \omega_{21})^2}{4} \right]^{1/2} t \right\}$$

$$|c_1(t)|^2 = 1 - |c_2(t)|^2$$

$$\omega_{21} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$$

Esta é conhecida como a fórmula de Rabi

A probabilidade do estado 2 estar populado ~~em~~ oscila no tempo com uma ~~probabilidade~~ frequência

$$\Omega = \sqrt{\frac{\gamma^2}{\hbar^2} + \frac{(\omega - \omega_{21})^2}{4}}$$

$$i\hbar \frac{\partial c_1(t)}{\partial t} = V_{12} e^{i\omega_{12}t} \quad c_2(t) = \gamma e^{i(\omega - \omega_{21})t} \quad c_2(t)$$

$$i\hbar \frac{\partial c_2(t)}{\partial t} = V_{21} e^{i\omega_{21}t} \quad c_1(t) = \gamma e^{-i(\omega - \omega_{21})t} \quad c_1(t)$$

Now

$$i\hbar \frac{\partial^2 c_2}{\partial t^2} = \gamma e^{-i(\omega - \omega_{21})t} \frac{\partial c_1}{\partial t} - i\gamma(\omega - \omega_{21}) e^{-i(\omega - \omega_{21})t} c_1$$

$$= \frac{\gamma^2}{(i\hbar)^2} c_2 - i\gamma(\omega - \omega_{21}) i\hbar \frac{\partial c_2}{\partial t}$$

So

$$\frac{\partial^2 c_2}{\partial t^2} + i(\omega - \omega_{21}) \frac{\partial c_2}{\partial t} + \frac{\gamma^2}{\hbar^2} c_2 = 0$$

Try $c_2 = c_0 e^{i\alpha t}$

$$(i\alpha)^2 + i\alpha(\omega - \omega_{21}) + \frac{\gamma^2}{\hbar^2} = 0$$

$$\alpha^2 + (\omega - \omega_{21})\alpha - \frac{\gamma^2}{\hbar^2} = 0$$

$$\alpha = \frac{-(\omega - \omega_{21}) \pm \sqrt{(\omega - \omega_{21})^2 + 4\frac{\gamma^2}{\hbar^2}}}{2}$$

$$= -\left(\frac{\omega - \omega_{21}}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\omega - \omega_{21}}{2}\right)^2 + \frac{\gamma^2}{\hbar^2}} = \alpha_{\pm}$$

So :

$$c_2 = e^{-i(\omega - \omega_{21})t} (a e^{i\beta t} + b e^{-i\beta t})$$

with
$$\beta = \sqrt{\frac{\gamma^2}{t^2} + \frac{(\omega - \omega_{21})^2}{4}}$$

But

$$c_2(0) = 0 \rightarrow a = -b$$

$$c_2 = c_0 e^{-i(\omega - \omega_{21})t} \sin\left(\sqrt{\frac{\gamma^2}{t^2} + \frac{(\omega - \omega_{21})^2}{4}} t\right)$$

and

$$\frac{\partial c_2}{\partial t} = c_0 (-i) \frac{(\omega - \omega_{21})}{2} e^{-i(\omega - \omega_{21})t} \sin(\dots)$$

$$+ c_0 e^{i(\omega - \omega_{21})t} \sqrt{\frac{\gamma^2}{t^2} + \frac{(\omega - \omega_{21})^2}{4}} \cos(\dots)$$

$$= \frac{\gamma}{it} e^{-i(\omega - \omega_{21})t} c_1$$

So

$$c_1 = it \frac{c_0}{\gamma} e^{i(\omega - \omega_{21})t} \left[\sqrt{\frac{\gamma^2}{t^2} + \frac{(\omega - \omega_{21})^2}{4}} \cos(\dots) - i \frac{(\omega - \omega_{21})}{2} \sin(\dots) \right]$$

But

$$c_1(0) = 1 \rightarrow c_0 = \frac{(i) \gamma / t}{\sqrt{\frac{\gamma^2}{t^2} + \frac{(\omega - \omega_{21})^2}{4}}}$$

We also must have

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$$

Indeed, it is true

$$|c_1|^2 = \frac{\cancel{1}^2}{\frac{\delta^2}{t^2} + \frac{(\omega - \omega_0)^2}{4}} \left[\frac{\delta^2}{t^2} + \frac{(\omega - \omega_0)^2}{4} \cos^2(\theta) + \frac{(\omega - \omega_0)^2}{4} \sin^2(\theta) \right]$$

$$|c_2|^2 = \frac{\delta^2/t^2}{\frac{\delta^2}{t^2} + \frac{(\omega - \omega_0)^2}{4}} \sin^2(\theta)$$

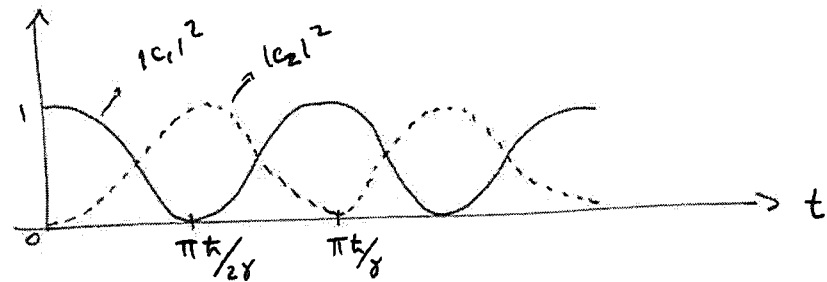
So $|c_1|^2 = 1 - |c_2|^2$

A amplitude tende a 1 (alta taxa de transições) quando

$\omega \sim \omega_{21} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$ Condição de ressonância

Isto ~~ocorre~~ quando a frequência da perturbação, (campo elétrico ou magnético) é próximo da frequência ω_{21} característica do sistema.

No ponto $\omega = \omega_{21}$ $\Omega = \frac{\gamma}{\hbar}$ temos

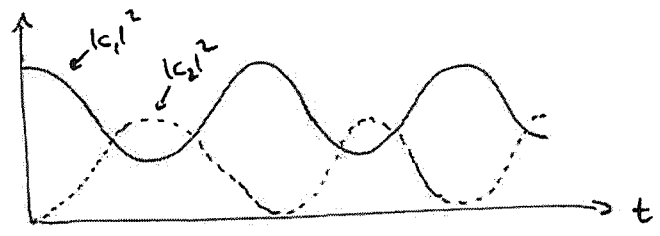


- em $t=0$ o sistema está no estado 1
 - em $t = \frac{\pi \tau}{2\gamma}$ " " " " " " " " 2
 - em $t = \frac{\pi \tau}{\gamma}$ " " " " " " " " 1
- nestes intervalos há absorção de energia
- nestes intervalos há emissão de energia
- movimento

Perturbação $V(t)$ não só fornece como recebe energia do sistema.

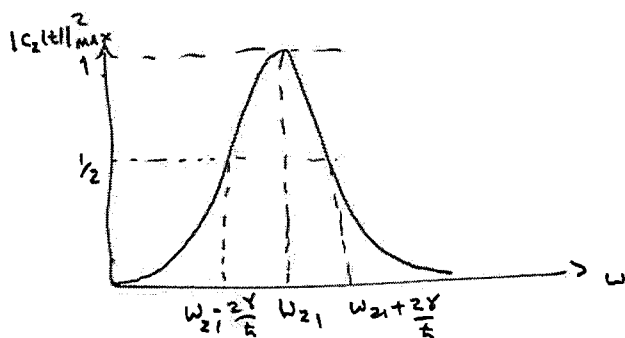
$V(t)$ provoca transições nos dois sentidos $1 \rightleftharpoons 2$.

Fora da ressonância teríamos



ou seja o estado 1 sempre terá uma população não nula. e o 2 não atingirá a população máxima.

O valor máximo de $c_2(t)$ em função de ω é



Vemos então que quanto mais fraco o potencial perturbativo ($\gamma \rightarrow 0$) mais estreito é o pico de ressonância

Ressonância Magnética de spin

Considere um sistema de spin $1/2$ (um elétron ligado a um átomo) submetido a um campo magnético uniforme e independente do tempo na direção z e um outro dependente do tempo girando no plano xy

$$\vec{B} = B_0 \hat{e}_z + B_1 (\cos \omega t \hat{e}_x + \sin \omega t \hat{e}_y)$$

B_0, B_1 constantes.

O efeito de B_0 tomamos como H_0 (Hamiltoniana não perturbada)
 " " " B_1 " " V

Como
$$\vec{\mu} = \frac{e \hbar}{m c} \vec{S} \quad E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

temos

$$H_0 = -\left(\frac{e \hbar B_0}{2 m c}\right) (|+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|)$$

$$V(t) = -\left(\frac{e \hbar B_1}{2 m c}\right) \left\{ \cos \omega t (|+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -|) + i \sin \omega t (|-\rangle\langle +| - |+\rangle\langle -|) \right\}$$

A razão disso é que a interação é dada por

$$H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\frac{e}{mc} \vec{S} \cdot \vec{B}$$

$$= -\frac{e B_0}{mc} \hat{S}_z - \frac{e B_1}{mc} \left\{ \hat{S}_x \cos \omega t + \hat{S}_y \sin \omega t \right\}$$

Como

$$S_{\pm} = S_x \pm i S_y$$

temos

$$\frac{S_+ + S_-}{2} = S_x \quad \frac{S_+ - S_-}{2i} = S_y$$

Além do mais

$$\langle \pm | S_z | \pm \rangle = \pm \frac{\hbar}{2} \quad \langle + | S_z | - \rangle = 0$$

$$\langle \pm | S_{\pm} | \pm \rangle = 0 \quad \langle + | S_+ | - \rangle = \hbar \quad \langle - | S_- | + \rangle = \hbar$$

Daí

$$H = -\frac{e B_0}{mc} \sum_{i,j} |i\rangle \langle i | \hat{S}_z | j \rangle \langle j| - \frac{e B_1}{mc} \sum_{i,j} \frac{\hbar}{2} \left\{ \cos \omega t |i\rangle \langle i | (S_+ + S_-) | j \rangle \langle j| + \sin \omega t |i\rangle \langle i | (S_+ - S_-) | j \rangle \langle j| \right\}$$

$$= -\frac{e \hbar B_0}{2mc} \left(|+\rangle \langle +| + |-\rangle \langle -| \right) - \frac{e B_1 \hbar}{2mc} \left\{ \cos \omega t (|-\rangle \langle +| + |+\rangle \langle -|) - i \sin \omega t (|+\rangle \langle -| - |-\rangle \langle +|) \right\}$$

Para $e < 0$ vemos que $E_+ > E_-$ e daí $|+\rangle$ — nível superior
 $|-\rangle$ — " inferior.

A diferença de energia é

$$E_+ - E_- = \frac{e \hbar B_0}{mc}$$

e daí a frequência característica do sistema

$$\omega_{21} = \frac{|e| B_0}{mc}$$

Revisão da precessão de spin

(5)

Se colocarmos $B_x = 0$ no caso anterior. Então a Hamiltoniana é

$$H_0 = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\frac{eB_0}{mc} S_z$$

é o operador de evolução temporal

$$\exp(-iH_0 t/\hbar) = \exp\left(i\frac{eB_0}{mc} \frac{S_z}{\hbar} t\right) = \exp\left(i\frac{\omega t}{\hbar} S_z\right)$$

onde $\omega = \frac{|e|B_0}{mc}$ ($e < 0$)

Em $t=0$, seja um estado $|\alpha\rangle$ dado por

$$|\alpha\rangle = c_+ |+\rangle + c_- |-\rangle \quad \text{onde} \quad c_{\pm} = \langle \pm | \alpha \rangle$$

Em $t=t$

$$\begin{aligned} |\alpha(t)\rangle &= e^{-iH_0 t/\hbar} |\alpha\rangle \\ &= c_+ e^{-iS_z \omega t/\hbar} |+\rangle + c_- e^{-i\omega t S_z/\hbar} |-\rangle \\ &= e^{-i\omega t/2} c_+ |+\rangle + e^{i\omega t/2} c_- |-\rangle \\ &\equiv c_+(t) |+\rangle + c_-(t) |-\rangle \end{aligned}$$

Portanto

$$|c_{\pm}(t)|^2 = |c_{\pm}(0)|^2$$

ou seja a probabilidade de encontrar o estado em um dado autoestado não muda no tempo.

No entanto o valor esperado de S_x e S_y dependem do tempo. Temos

$$\begin{aligned} \langle \alpha(t) | S_+ | \alpha(t) \rangle &= \hbar c_- e^{i\omega t/2} c_+^* e^{i\omega t/2} \\ &= \hbar c_+^* c_- e^{i\omega t} \end{aligned}$$

$$\langle \alpha(t) | S_- | \alpha(t) \rangle = \hbar c_+ e^{-i\omega t/2} c_-^* e^{-i\omega t/2} = \hbar c_+ c_-^* e^{-i\omega t}$$

Daí

$$\langle \alpha(t) | S_x | \alpha(t) \rangle = \frac{\hbar}{2} (c_+^* c_- e^{i\omega t} + c_+ c_-^* e^{-i\omega t})$$

$$= \frac{\hbar}{2} \left\{ \begin{aligned} & \frac{(c_+^* c_- + c_+ c_-^*)}{2} e^{i\omega t} - \frac{c_+ c_-^*}{2} e^{i\omega t} \\ & + \frac{(c_+^* c_- + c_+ c_-^*)}{2} e^{-i\omega t} - \frac{c_+^* c_-}{2} e^{-i\omega t} \\ & + \frac{(c_+^* c_- - c_+ c_-^*)}{2} e^{i\omega t} + \frac{c_+ c_-^*}{2} e^{i\omega t} \\ & + \frac{(c_+^* c_- - c_+ c_-^*)}{2} e^{-i\omega t} + \frac{c_+^* c_-}{2} e^{-i\omega t} \end{aligned} \right\}$$

$$\langle \alpha(t) | S_y | \alpha(t) \rangle = \frac{\hbar}{2i} (c_+^* c_- e^{i\omega t} - c_+ c_-^* e^{-i\omega t})$$

$$= \frac{\hbar}{4i} \left\{ \begin{aligned} & (c_+^* c_- - c_+ c_-^*) e^{i\omega t} + c_+ c_-^* e^{i\omega t} \\ & + (c_+^* c_- - c_+ c_-^*) e^{-i\omega t} - c_+^* c_- e^{-i\omega t} \\ & - (c_+^* c_- + c_+ c_-^*) e^{-i\omega t} + c_+^* c_- e^{-i\omega t} \\ & + (c_+^* c_- + c_+ c_-^*) e^{i\omega t} - c_+ c_-^* e^{i\omega t} \end{aligned} \right\}$$

Logo

$$\langle S_x \rangle_t = \langle S_x \rangle_0 \cos \omega t - \langle S_y \rangle_0 \sin \omega t$$

$$\langle S_y \rangle_t = \langle S_y \rangle_0 \cos \omega t + \langle S_x \rangle_0 \sin \omega t$$

Temos ainda que

$$\langle \alpha(t) | S_z | \alpha(t) \rangle = \frac{\hbar}{2} \{ |c_+|^2 - |c_-|^2 \} \equiv \langle S_z \rangle_0$$

Como vimos estas métricas "Revised" apesar do valor esperado de S_x e S_y ~~se~~ ~~no~~ ~~dependem~~ (dependem do tempo) os valores de $|c_+|^2$ e $|c_-|^2$ não dependem do tempo, quando $B_1 = 0$.

No caso $B_1 \neq 0$ $|c_+|^2$ e $|c_-|^2$ vão variar no tempo. Para ver isto vamos ~~se~~ identificar

$$\frac{-e \hbar B_1}{2 m c} \rightarrow \gamma \quad \omega \rightarrow \omega$$

e usar os resultados obtidos para o sistema de dois estados.

A interação pode ser escrita como

$$\begin{aligned} V(t) &= - \frac{e \hbar B_1}{2 m c} \left\{ e^{-i\omega t} |+\rangle \langle -| + e^{i\omega t} |-\rangle \langle +| \right\} \\ &= \gamma e^{i\omega t} |-\rangle \langle +| + \gamma e^{-i\omega t} |+\rangle \langle -| \end{aligned}$$

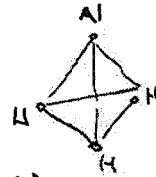
Identificando $|+\rangle \equiv 2$ e $|-\rangle \equiv 1$ obtemos o mesmo potencial de (5.5.18) (pag (54))

Portanto dos gráficos da pag (55) vemos que há uma sucessão de transições entre os estados $|+\rangle$ e $|-\rangle$ além é claro da sucessão do spin devido a B_0 .

~~É~~ É claro que a ressonância é atingida quando $\omega = \omega_{21}$.

Masers

Consideramos a molécula de amônia NH_3



Ela tem dois autoestados de paridade $|S\rangle$ e $|A\rangle$.

$|A\rangle$ tem uma energia um pouco maior que $|S\rangle$

Por questões de simetria esperamos que o momento de dipolo elétrico da molécula $\vec{\mu}_{el}$ seja proporcional ao vetor posição \vec{x} do átomo N.

Consideremos a interação dependente do tempo

$$V(t) = -\vec{\mu}_{el} \cdot \vec{E} = \text{onda} \quad \vec{E} = |E| \max \hat{z} \cos \omega t$$

A variação espacial de \vec{E} é desprezada pois em comprimento de onda λ grande em relação à molécula NH_3 ; pois a frequência ω é escolhida como sendo

$$\omega \approx \frac{E_A - E_S}{\hbar}$$

Por razão de paridade

$$\langle A | \mu_{x,z} | A \rangle = \langle S | \mu_{x,z} | S \rangle = 0$$

mas os elementos fora da diagonal não são nulos

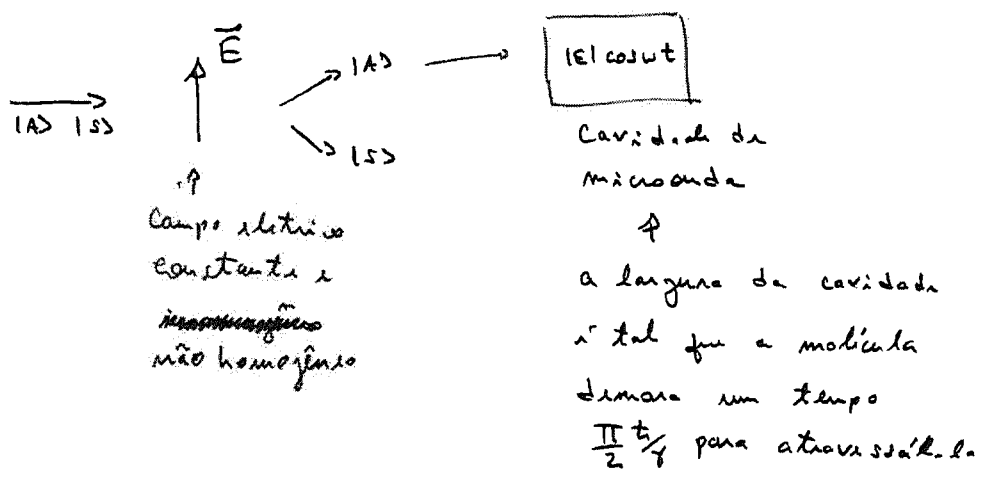
$$\langle A | \mu_{x,z} | S \rangle = \langle S | \mu_{x,z} | A \rangle \neq 0$$

Daí

$$V(t) = \gamma_1 |A\rangle \langle S| + \gamma_2 |S\rangle \langle A|$$

e o potencial conecta os dois estados e a dinâmica do sistema de dois estados se aplica aqui.

funcionamento do maser:



- Nobel Prizes
- 1944 - Rabi
molecular beam, NMR
 - 1952 - Bloch, Purcell
nuclea magnet. resonant.
 - 1964 - Townes, Basov
Prochorov
maser, laser
 - 1966 - Kastler
optical pumping

Portanto ao sair da cavidade as moléculas estarão no estado 1S3 e a energia foi perdida transformando-se em radiação da frequência ω ou seja $|E| \cos \omega t$. Obtemos então uma amplificação da intensidade da radiação. (Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation MASER)

Teoria de perturbação dependente do tempo

Série de Dyson

Nós vimos como usar a rep. de interação para tratar potenciais dependentes do tempo. Também resolvemos exatamente o problema de dois estados.

No entanto muitos problemas não podem ser resolvidos exatamente. Fazemos então uma expansão perturbativa.

Como o problema se resume em resolver a eq. (5.5.15) para encontrar os coeficientes $c_n(t)$ fazemos a expansão

$$c_n(t) = c_n^{(0)} + c_n^{(1)} + c_n^{(2)} + \dots$$

onde os n entre parênteses denotam a ordem da perturbação.

~~Substituindo em (5.5.15) o estado i este populado~~

Substituindo em (5.5.15)

$$i\hbar \frac{d}{dt} c_m = \sum_n V_{nm} e^{i\omega_{nm}t} c_n$$

temos

$$i\hbar \frac{d}{dt} (c_m^{(0)} + c_m^{(1)} + \dots) = \sum_n V_{nm} e^{i\omega_{nm}t} (c_m^{(0)} + c_m^{(1)} + \dots)$$

e daí

$$\frac{d}{dt} c_m^{(0)} = 0$$

~~Substituindo~~

$$i\hbar \frac{d}{dt} c_m^{(1)} = \sum_n V_{nm} e^{i\omega_{nm}t} c_m^{(0)}$$

⋮

$$i\hbar \frac{d}{dt} c_m^{(R)} = \sum_n V_{nm} e^{i\omega_{nm}t} c_m^{(R-1)}$$

Onde seja $c_m^{(0)}$ independente do tempo e $c_m^{(R)}$ determinado a partir de $c_m^{(R-1)}$

Se inicialmente somente o estado i está populado fazemos

$$c_m^{(0)} = \delta_{mi} \text{ e daí}$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} c_m^{(1)} = V_{mi} e^{i\omega_{mi}t} \Rightarrow c_m^{(1)} = \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' V_{mi} e^{i\omega_{mi}t'}$$

onde a constante de integração é tal que $c_m^{(1)}(t_0) = 0$

Desta maneira integramos as eqs (5.5.15) e encontramos $c_m^{(R)}$ iterativamente. Esta é a maneira que Dirac ~~resolve~~ resolve o problema em 1927.

Um método mais moderno é o de Dyson utilizando o operador de evolução temporal na rep. de interações. Ele pode também ser utilizado em teorias relativísticas.

Definimos o operador de evoluçao temporal na mp. de interaçao como

$$|\alpha, t_0, t\rangle_I = U_I(t, t_0) |\alpha, t_0, t_0\rangle_I$$

Como

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha, t_0, t\rangle_I = V_I |\alpha, t_0, t\rangle_I$$

temo

$$i\hbar \frac{d}{dt} U_I(t, t_0) = V_I U_I(t, t_0) \tag{5.6.3}$$

A condicao inicial para esta equacao e dada

$$U_I(t_0, t_0) = 1 \tag{5.6.4}$$

(5.6.3) e (5.6.4) sao equivalentes a

$$U_I(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_I(t') U_I(t', t_0) dt'$$

Obtemos entao uma expansao

$$\begin{aligned}
U_I(t, t_0) &= 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' V_I(t') \left[1 - \int_{t_0}^{t'} dt'' V_I(t'') U_I(t'', t_0) \right] = \\
&= 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' V_I(t') + \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' V_I(t') V_I(t'') + \dots \\
&\dots \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \dots \int_{t_0}^{t^{(n-1)}} dt^{(n)} V_I(t') V_I(t'') \dots V_I(t^{(n)}) + \dots
\end{aligned}$$

Esta e a chamada serie de Dyson. que foi aplicada primeiramente a QED covariante

~~Probabilidade de transição~~

Probabilidade de transição

Verjamos a relação entre $U_I(t, t_0)$ e $U_S(t, t_0)$ (na eq. de Schrödinger)
Temos

$$\begin{aligned}
|\alpha, t_0, t\rangle_I &= e^{iH_0 t/\hbar} |\alpha, t, t_0\rangle_S \\
&= e^{iH_0 t/\hbar} U_S(t, t_0) |\alpha, t_0, t_0\rangle_S \\
&= e^{iH_0 t/\hbar} U_S(t, t_0) e^{-iH_0 t_0/\hbar} |\alpha, t_0, t_0\rangle_I
\end{aligned}$$

e daí

$$U_I(t, t_0) = e^{iH_0 t/\hbar} U_S(t, t_0) e^{-iH_0 t_0/\hbar}$$

Note que se em $t=0$ o sistema está no estado $|i\rangle$ que é o auto estado de H_0 temos que no tempo t estará no estado

$$\begin{aligned}
|i, t_0=0, t\rangle_I &= U_I(t, 0) |i\rangle_I = U_I(t, 0) e^{+iH_0 0/\hbar} |i\rangle_S \\
&= U_I(t, 0) |i\rangle_S \\
&= \sum_n |n\rangle \langle n| U_I(t, 0) |i\rangle
\end{aligned}$$

Portanto $\langle n| U_I(t, 0) |i\rangle$ nada mais é que o coeficiente $c_n(t)$ definido anteriormente. Temos então

$$\langle n| U_I(t, t_0) |i\rangle = e^{i(E_n t - E_i t_0)/\hbar} \langle n| U(t, t_0) |i\rangle$$

E $\langle n| U(t, t_0) |i\rangle$ é a amplitude de transição entre os estados i e n . Logo $\langle n| U_I |i\rangle$ não é a amplitude de transição, mas é a probabilidade de transição

$$|\langle n| U_I(t, t_0) |i\rangle|^2 = |\langle n| U(t, t_0) |i\rangle|^2$$

No que a probabilidade de transições entre autoestados de operadores que comutam com H_0 não é dada por $|\langle a | U_I | b \rangle|^2$, pois

$$\begin{aligned} \langle a | U_I | b \rangle &= \langle a | e^{iH_0 t/\hbar} U_S e^{-iH_0 t_0/\hbar} | b \rangle \\ &= \sum_{a', s'} \psi_{a'}^* \gamma_{s'} \langle a' | U | s' \rangle \end{aligned}$$

$$\text{onde } e^{-iH_0 t/\hbar} | a \rangle = \sum_{a'} x_{a'} | a' \rangle$$

$$e^{-iH_0 t_0/\hbar} | b \rangle = \sum_{b'} \gamma_{b'} | b' \rangle$$

Nestes casos precisamos expandir $|a\rangle$ e $|b\rangle$ em termos de autoestados de H_0 .

Caso típico.

Consideremos o caso em que em $t = t_0$ o sistema está no estado $|i\rangle$ que é autoestado de H_0 . A menos de uma fase $|i, t_0, t_0\rangle_S$ e $|i\rangle$ a menos de uma fase

Escolhamos

$$|i, t_0, t_0\rangle_S = e^{-iE_i t_0/\hbar} |i\rangle$$

e daí

$$|i, t_0, t_0\rangle_I = |i\rangle$$

No tempo t

$$|i, t_0, t\rangle_I = U_I(t, t_0) |i\rangle$$

Comparando com a definição de $C_m(t)$

$$|i, t_0, t\rangle_I = \sum_m C_m(t) |m\rangle$$

Vemos que

$$C_m(t) = \langle m | U_I(t, t_0) | i \rangle$$

Usando a série de Dyson para $U_I(t, t_0)$ obtemos uma expansão para $C_m(t) = C_m^{(0)} + C_m^{(1)} + C_m^{(2)} \dots$ onde $C_m^{(k)}$ é de ordem k no potencial perturbador

$$C_m(t) = \langle m | U_I(t, t_0) | i \rangle = \langle m | i \rangle - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \langle m | V_I(t') | i \rangle +$$

$$+ \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \langle m | V_I(t') V_I(t'') | i \rangle + \dots$$

e então

$$C_m^{(0)} = \langle m | i \rangle = \delta_{mi}$$

$$C_m^{(1)} = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \langle m | V_I(t') | i \rangle = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' e^{i(E_m - E_i)t'/\hbar} \langle m | V_I(t') | i \rangle$$

$$= -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' e^{i\omega_{mi}t'} V_{mi}(t') \quad \omega_{mi} = \frac{E_m - E_i}{\hbar} \quad (5.6.17)$$

$$V_{mi} = \langle m | V_I(t') | i \rangle$$

$$C_m^{(2)} = \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \sum_n \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' e^{i\omega_{mn}t'} e^{i\omega_{ni}t''} V_{nm}(t') V_{ni}(t'')$$

A transição de probabilidade é

$$P(i \rightarrow m) = |\langle m | U_I(t_0, t_0) | i \rangle|^2 = |C_m(t)|^2$$

$$= |C_m^{(0)} + C_m^{(1)} + \dots|^2$$

$$= |C_m^{(0)}|^2 + [C_m^{(0)} C_m^{(1)*} + C_m^{(0)*} C_m^{(1)}] +$$

$$+ [|C_m^{(1)}|^2 + C_m^{(0)} C_m^{(2)*} + C_m^{(0)*} C_m^{(2)}]$$

$$\equiv P^{(0)} + P^{(1)} + P^{(2)} + \dots$$

Como $C_m^{(0)} = \delta_{mi}$

$$P_0^{(0)} = \delta_{mi} \quad P_m^{(1)} = \delta_{mi} (2 \operatorname{Re} C_m^{(1)}) \quad P_m^{(2)} = |C_m^{(1)}|^2 + \delta_{mi} 2 \operatorname{Re} C_m^{(2)}$$

Perturbação por um potencial constante

$$V(t) = \begin{cases} 0 & \text{p/ } t < 0 \\ V(\text{ind. de } t) & \text{p/ } t \geq 0 \end{cases}$$

Se em $t=0$ estamos no estado i temos

$$C_m^{(0)} = \delta_{mi}$$

$$C_m^{(1)} = -\frac{i}{\hbar} V_{mi} \int_0^t e^{i\omega_{mi}t'} dt' = -\frac{i}{\hbar} V_{mi} \left. \frac{e^{i\omega_{mi}t'}}{i\omega_{mi}} \right|_{t=0}^t$$

$$= \frac{V_{mi}}{E_m - E_i} (1 - e^{i\omega_{mi}t})$$

e daí

$$|C_m^{(1)}|^2 = \frac{|V_{mi}|^2}{|E_m - E_i|^2} (1 - e^{i\omega_{mi}t})(1 - e^{-i\omega_{mi}t})$$

$$= \frac{|V_{mi}|^2}{|E_m - E_i|^2} (2 - 2\cos\omega_{mi}t)$$

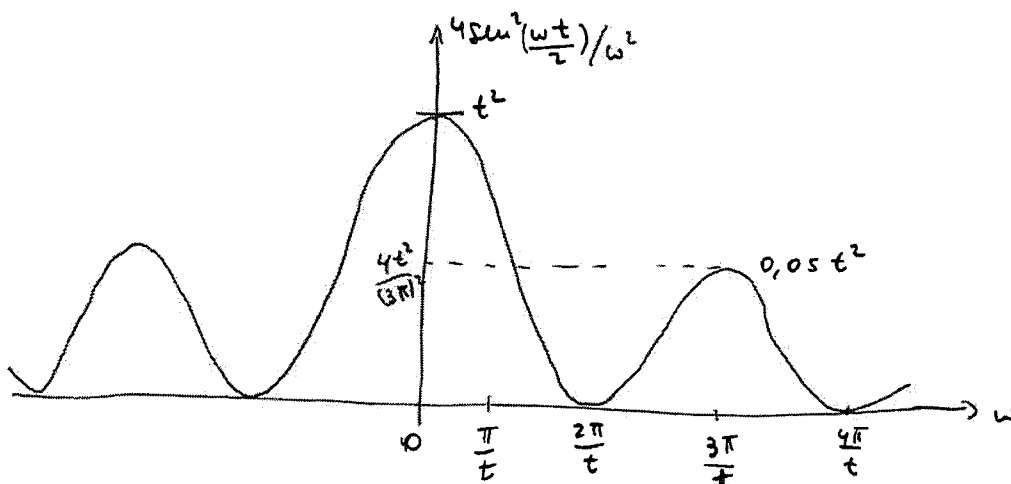
$$\left[\begin{aligned} \cos x - \cos y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y-x}{2} \\ x &= 0 \quad y = \omega_{mi}t \end{aligned} \right]$$

$$1 - \cos y = 2 \sin^2 \frac{y}{2}$$

$$= 4 \frac{|V_{mi}|^2}{|E_m - E_i|^2} \sin^2 \left(\frac{E_m - E_i}{2\hbar} t \right)$$

~~Para~~ • Ou seja $|C_m^{(1)}|^2$ depende de $|V_{mi}|^2$, $|E_m - E_i|$.

Fazendo o gráfico de $4 \sin^2(\frac{\omega t}{2}) / \omega^2$ contra ω para t fixo ($\omega = \frac{E_m - E_i}{\hbar}$)



$$\omega' = \frac{\omega t}{2} \quad \omega^2 = \frac{4}{t^2} \omega'^2$$

Portanto a altura em $\omega=0$ e t^2 e a largura de pico é proporcional a $1/t$. Para t grande somente as frequências menores que $\frac{2\pi}{t}$ contribuíam para $|c_n^{(1)}|^2$. Ou seja, para as energias que satisficam

$$t \sim \frac{2\pi}{|\omega|} = \frac{2\pi E}{|E_n - E_i|}$$

Portanto para um intervalo de tempo $\Delta t \sim t$ desde que a perturbação foi ligada a transição só pode acontecer se

$$\Delta E \Delta t \sim \pi \hbar$$

ΔE - energia envolvida na transição $\Delta E = E_n - E_i$

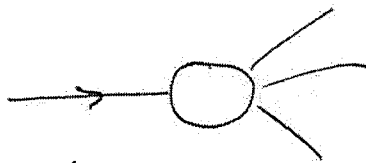
Portanto para Δt pequeno podemos ~~ter~~ tolerar uma não conservação da energia ΔE maior. Conforme Δt cresce esta não conservação diminui.

No caso $E_n = E_i$ ($\omega=0$) temos $(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1)$

$$|c_n^{(1)}|^2 = \frac{|V_{ni}|^2 t^2}{t^2}$$

Dois exemplos onde $E_n = E_i$ são

i) Espalhamento elástico



a partícula muda de direção (momento) mas não de energia

ii) átomo de He - $|i\rangle \equiv (Zs)^2$ dois elétrons excitados

$|f\rangle \equiv (1s)^1 + \text{elétron livre}$

a energia de $|i\rangle$ e $|f\rangle$ é a mesma pois não há emissão de radiação.

Quando temos vários estados finais com energia E_n próximos de E_i estamos interessados na probabilidade do sistema ir para qualquer um dos estados finais, i.e.

$$\sum_{n, E_n \sim E_i} |c_n^{(t)}|^2$$

Definimos a densidade de estados finais como

$$\rho(E) dE = \text{nr de estados com energia entre } E \text{ e } E+dE$$

Dai

$$\begin{aligned} \sum_{n, E_n \sim E_i} |c_n^{(t)}|^2 &\Rightarrow \int dE_n \rho(E) |c_n^{(t)}|^2 = \\ &= 4 \int \text{sen}^2 \left[\frac{(E_n - E_i)t}{2\hbar} \right] \frac{|V_{ni}|^2}{|E_n - E_i|^2} \rho(E_n) dE_n \end{aligned}$$

Usando

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\text{sen}^2 \alpha x}{\alpha x^2} = \delta(x)$$

temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{|E_n - E_i|^2} \text{sen}^2 \left[\frac{(E_n - E_i)t}{2\hbar} \right] = \frac{\pi t}{2\hbar} \delta(E_n - E_i)$$

Dai

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int dE_n \rho(E_n) |c_n^{(t)}|^2 = \frac{2\pi}{\hbar} \overline{|V_{ni}|^2} \rho(E_n) t \Big|_{E_n \sim E_i}$$

Portanto a probabilidade de transição total é proporcional a t para t grande. Isto é decorrência do fato de se ser proporcional a área sob o pico que tem altura t^2 e largura $1/t$.

O significado de $\overline{|V_{ni}|^2}$ é o seguinte: apesar das energias serem as mesmas para os estados i e n , os estados n podem (e são) diferentes. Desta forma V_{ni} também não é o mesmo p/ todo n . Por este razão tomamos a média.

A probabilidade de transição por unidade de tempo, chamada de regra de transição é definida por

$$W_{i \rightarrow m} = \frac{d}{dt} \left(\sum_n |c_n^{(1)}|^2 \right)$$

Das resultados acima vemos que ela é constante em $t \rightarrow t \rightarrow \infty$.

$$W_{i \rightarrow m} = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{mi}|^2 \rho(E_m)_{E_m \sim E_i}$$

Esta é a chamada regra de ouro de Fermi (apesar da teoria ter sido desenvolvida por Dirac)

É comum denotar

$$W_{i \rightarrow m} = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{mi}|^2 \delta(E_m - E_i)$$

que deve ser entendido como integrado em $\int dE_m \rho(E_m)$

A contribuição da 2ª ordem p/ potencial constante

Temos

$$\begin{aligned} c_m^{(2)} &= \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \sum_n V_{nm} V_{ni} \int_0^t dt' e^{i\omega_{nm}t'} \int_0^{t'} dt'' e^{i\omega_{ni}t''} \\ &= \frac{i}{\hbar} \sum_n \frac{V_{nm} V_{ni}}{E_m - E_i} \int_0^t dt' e^{i\omega_{nm}t'} \underbrace{(e^{i\omega_{ni}t'} - 1)}_{e^{i\omega_{ni}t'} - e^{i\omega_{nm}t'}} \end{aligned}$$

O 1º termo no r.h.s. tem a mesma dependência temporal que $c_n^{(1)}$, pois

$$c_n^{(1)} = \frac{V_{ni}}{E_n - E_i} (1 - e^{i\omega_{ni}t})$$

Se essa fosse o único termo usaríamos os mesmos argumentos para concluir que quando $t \rightarrow \infty$ a contribuição só vem de $E_m \sim E_i$.

De fato, quando E_m difere de E_m e E_i o segundo termo oscila rapidamente e não contribui p/ a transição.

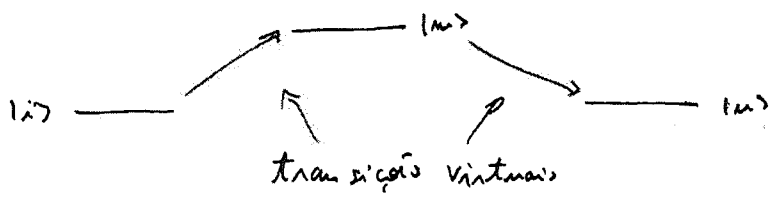
§ Com a contribuição de $C_m^{(1)}$ e $C_m^{(2)}$ temos

$$W_{i \rightarrow (m)} = \frac{2\pi}{t} \left| V_{mi} + \sum_n \frac{V_{mn} V_{ni}}{E_i - E_m} \right|^2 \rho(E_m) \Big|_{E_m \sim E_i}$$

Interpretação:

$V_{mi} \rightarrow$ transição direta $|i\rangle \rightarrow |m\rangle$

$V_{im} V_{mi} \rightarrow$ existe como transição virtual no meio que viola a conservação de energia



Quando $V_{mn} V_{ni} \neq 0$ e $E_m \sim E_i$ a fórmula precisa de um tratamento especial que veremos no problema 31 e seção 5.8.

Temos que trocar

$$E_m - E_i \text{ por } E_m - E_i + i\epsilon.$$

Perturbação Harmônica

Considere um potencial da forma

$$V(t) = V e^{i\omega t} + V^\dagger e^{-i\omega t} \tag{5.6.39}$$

onde V é um operador que pode depender de \hat{x}, \hat{p} etc.

Como
$$C_n^{(1)}(t) = \frac{-i}{\hbar} \int_{t_0}^t e^{i\omega_n t'} V_{ni}(t') dt' \tag{veja 5.6.14}$$

temos ($t_0=0$)

$$\begin{aligned} C_n^{(1)}(t) &= \frac{-i}{\hbar} \int_0^t [V_{ni} e^{i\omega t'} + V_{ni}^\dagger e^{-i\omega t'}] e^{i\omega_n t'} dt' \\ &= \frac{1}{\hbar} \left\{ \frac{1 - e^{i(\omega + \omega_n)t}}{\omega + \omega_n} V_{ni} + \frac{1 - e^{i(\omega_n - \omega)t}}{\omega_n - \omega} V_{ni}^\dagger \right\} \end{aligned}$$

Esta fórmula é bastante parecida com o caso do potencial constante, Basta fazer

$$\omega_n \rightarrow \omega_n \pm \omega$$

e vemos que cada termo é igual ao potencial constante. Na verdade

$$\begin{aligned} |C_n^{(1)}(t)|^2 &= \frac{1}{\hbar^2} \left\{ \frac{(1 - e^{i(\omega + \omega_n)t})(1 - e^{-i(\omega + \omega_n)t})}{(\omega + \omega_n)^2} |V_{ni}|^2 + \right. \\ &+ \frac{(1 - e^{i(\omega_n - \omega)t})(1 - e^{-i(\omega_n - \omega)t})}{(\omega_n - \omega)^2} |V_{ni}^\dagger|^2 + \\ &+ \frac{(1 - e^{i(\omega + \omega_n)t})(1 - e^{-i(\omega_n - \omega)t})}{(\omega + \omega_n)(\omega_n - \omega)} (V_{ni})^\dagger (V_{ni})^\dagger + \\ &\left. + \frac{(1 - e^{i(\omega_n - \omega)t})(1 - e^{-i(\omega + \omega_n)t})}{(\omega_n - \omega)(\omega + \omega_n)} V_{ni}^\dagger (V_{ni})^\dagger \right\} \end{aligned}$$

Usando $\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y-x}{2}$ temos:

$$\begin{aligned}
 |C_m^{(1)}(t)|^2 &= \frac{|V_{m_i}|^2}{\hbar^2} \left[\frac{2 - 2 \cos(\omega_{m_i} + \omega)t}{(\omega + \omega_{m_i})^2} \right] + \\
 &+ \frac{|V_{m_i}^+|^2}{\hbar^2} \left[\frac{2 - 2 \cos(\omega_{m_i} - \omega)t}{(\omega_{m_i} - \omega)^2} \right] + \\
 &+ \frac{V_{m_i} [V_{m_i}^+]^+}{\hbar^2 V_{i_m}} \left[\frac{1 + e^{2i\omega t} - e^{i(\omega + \omega_{m_i})t} - e^{-i(\omega_{m_i} - \omega)t}}{(\omega + \omega_{m_i})(\omega_{m_i} - \omega)} \right] + \\
 &+ \frac{(V_{m_i}^+)(V_{m_i})}{\hbar^2} \left[\frac{1 + e^{-2i\omega t} - e^{-i(\omega + \omega_{m_i})t} - e^{i(\omega_{m_i} - \omega)t}}{(\omega + \omega_{m_i})(\omega_{m_i} - \omega)} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 4 \frac{|V_{m_i}|^2}{\hbar^2} \frac{\sin^2 \frac{(\omega_{m_i} + \omega)t}{2}}{(\omega + \omega_{m_i})^2} + 4 \frac{|V_{m_i}^+|^2}{\hbar^2} \frac{\sin^2 \frac{(\omega_{m_i} - \omega)t}{2}}{(\omega_{m_i} - \omega)^2} + \\
 &+ \frac{V_{m_i} V_{i_m}}{\hbar^2} e^{i\omega t} \left\{ \frac{2 \cos \omega t - 2 \cos \omega_{m_i} t}{(\omega + \omega_{m_i})(\omega_{m_i} - \omega)} \right\} + \\
 &+ \frac{V_{i_m}^+ V_{m_i}^+}{\hbar^2} e^{-i\omega t} \left\{ \frac{2 \cos \omega t - 2 \cos \omega_{m_i} t}{(\omega + \omega_{m_i})(\omega_{m_i} - \omega)} \right\}
 \end{aligned}$$

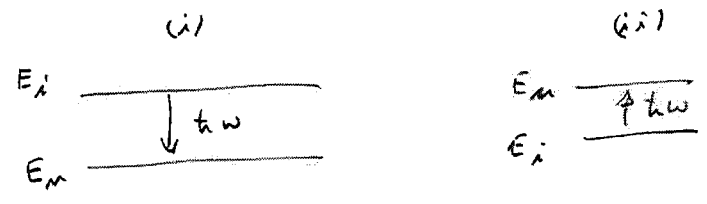
$$\begin{aligned}
 &= 4 \frac{|V_{m_i}|^2}{\hbar^2} \frac{\sin^2 \frac{(\omega_{m_i} + \omega)t}{2}}{(\omega + \omega_{m_i})^2} + 4 \frac{|V_{m_i}^+|^2}{\hbar^2} \frac{\sin^2 \frac{(\omega_{m_i} - \omega)t}{2}}{(\omega_{m_i} - \omega)^2} + \\
 &+ \frac{4}{\hbar^2} \frac{\sin \frac{(\omega_{m_i} + \omega)t}{2} \sin \frac{(\omega_{m_i} - \omega)t}{2}}{(\omega + \omega_{m_i})(\omega_{m_i} - \omega)} \quad 2 \operatorname{Re} \{ V_{m_i} V_{i_m} e^{i\omega t} \}
 \end{aligned}$$

Conforme $t \rightarrow \infty$, $|c_m^{(1)}|^2$ tem um valor razoável para

$$W_{m_i + \omega} \approx 0 \quad \text{ou} \quad E_m \sim E_i - \hbar\omega \quad (i)$$

$$^{\wedge} \quad W_{m_i - \omega} \approx 0 \quad \text{ou} \quad E_m \sim E_i + \hbar\omega \quad (ii)$$

No primeiro caso temos emissão estimulada de radiação e no segundo absorção



Em analogia com o caso do potencial constante

$$W_{i \rightarrow m} = \frac{2\pi}{\hbar} \overline{|V_{mi}|^2} \rho(E_m) \Big|_{E_m \sim E_i - \hbar\omega} \quad (*)$$

$$W_{i \rightarrow m} = \frac{2\pi}{\hbar} \overline{|V_{mi}^+|^2} \rho(E_m) \Big|_{E_m \sim E_i + \hbar\omega} \quad (**)$$

Onde seja $|V_{mi}|^2$ mede a probabilidade de emissão e $|V_{mi}^+|^2$ mede a absorção.

Como $|V_{mi}|^2 = |V_{im}^+|^2$ sempre que for $V_{im}^+ = \langle i | V^+ | m \rangle = \langle m | V | i \rangle^*$ temos ~~o~~ entos da (*) e (**)

$$\frac{\text{taxa de emissão para } i \rightarrow m}{\text{densidade de estados finais } E_m} = \frac{\text{taxa de absorção para } m \rightarrow i}{\text{densidade de estados finais } E_i}$$

onde no segundo caso (ii) é o estado final.

Portanto a probabilidade de transição é máxima no caso

- potencial constante p/ $E_m \sim E_i$
- o harmônico p/ $E_m \sim E_i \pm \hbar\omega$