Em CGS temos:

$$\tau = \frac{2}{\alpha^5}\frac{\hbar}{m} = 1,24 \times 10^{-10} \text{ sec} \qquad (5.8.b)$$

Em equações o mesmo procedimento é feito. Ou seja, multiplicamos cada fator por potências de $\hbar$ e c de tal forma que todos os termos tenham as mesmas dimensões do sistema CGS. Por exemplo

$E \propto k$ em unidades naturais

fica

$$E \propto \hbar c k \quad \text{ou} \quad \frac{E}{c} \propto \hbar c \qquad (5.9)$$

<u>Representação de interação</u> (revisão)

Na representação de Schroedinger a evolução temporal do sistema ~~é dada por~~ está contida nos estados e é governada pela eq. de Schroedinger:

$$i\hbar \frac{d}{dt}|A,t\rangle_S = H|A,t\rangle_S \qquad (5.10)$$

onde H é a Hamiltoniana.

Os operadores das observáveis nesta representação não evoluem no tempo, a menos que tenham uma dependência temporal explícita. (Por exemplo: operador que dá uma perturbação dependente do tempo)

Se temos
$$i\hbar \frac{d}{dt}|A,t\rangle_S = H|A,t\rangle_S$$

e H depende do tempo então

$$|A,t\rangle_S = \left(1 + \frac{1}{i\hbar}\int_{t_i}^{t} dt'\, H(t') + \frac{1}{(i\hbar)^2}\int_{t_i}^{t} dt' \int_{t_i}^{t'} dt''\, H(t')H(t'') + \dots\right)|A,t_i\rangle_S$$

Pois

$$\frac{d|A,t\rangle_S}{dt} = \left(\frac{H(t)}{i\hbar} + \frac{H(t)}{i\hbar}\frac{1}{i\hbar}\int_{t_i}^{t} dt'\, H(t') + \dots\right)|A,t_i\rangle_S$$

$$= \frac{H(t)}{i\hbar}\left(1 + \frac{1}{i\hbar}\int_{t_i}^{t} dt'\, H(t') + \dots\right)|A,t_i\rangle_S$$

$$= \frac{H(t)}{i\hbar}|A,t\rangle_S$$

Ou seja

$$|A,t\rangle_S = U\,|A,t_i\rangle_S$$

Com

$$U = 1 + \frac{1}{i\hbar}\int_{t_i}^{t} dt'\, H(t') + \frac{1}{(i\hbar)^2}\int_{t_i}^{t} dt' \int_{t_i}^{t'} dt''\, H(t')H(t'') \dots$$

Nota que em geral

$$[H(t'), H(t'')] \neq 0$$

e daí

$$[U, H(t)] \neq 0$$

A eq. (5.10) pode ser resolvida em termos do estado do sistema em um tempo arbitrário t_0 como:

$$|A, t\rangle_S = U\,|A, t_0\rangle_S \tag{5.11}$$

onde U é um operador unitário ($UU^{+}=1$) e quando a Hamiltoniana é independente do tempo é dado por:

$$U = e^{-iH(t-t_0)/\hbar} \tag{5.12}$$

Utilizando U podemos fazer uma transformação unitária e definir estados e operadores na chamada representação de Heisenberg:

$$|A,t\rangle_H = U^{+}|A,t\rangle_S = U^{+}U\,|A,t_0\rangle_S$$
$$= |A,t_0\rangle_S \tag{5.13}$$

e ainda

$$O^H(t) = U^{+}(t-t_0)\; O^S\; U(t-t_0) \tag{5.14}$$

Em $t=t_0$ os estados e operadores ~~são~~ são os mesmos nas duas representações. No entanto na rep. de Heisenberg os estados não evoluem no tempo, enquanto que os operadores sim (mesmo que não tenham dependência explícita no tempo).

Nota que

$$H^H = U^{+}H^S U = H^S \equiv H \quad \text{pois} \quad [U, H] = 0 \tag{5.15}$$

Como a transformação é unitária os elementos de matriz não mudam de representação para representação:

$$ {}_H\langle B,t|\, O^H(t)\, |A,t\rangle_H = {}_S\langle B,t|\, U\, U^+\, O^S\, U\, U^+ |A,t\rangle_S $$

$$ = {}_S\langle B,t|\, O^S\, |A,t\rangle_S \qquad (5.16) $$

Além do mais se dois operadores O^S e P^S satisfazem:

$$ [O^S, P^S] = cte \qquad (5.17) $$

Então

$$ U^+[O^S, P^S]U = U^+ \, cte \, U = cte $$

$$ = [U^+O^SU, U^+P^SU] $$

$$ = [O^H, P^H] $$

ou seja

$$ [O^H, P^H] = cte \qquad (5.18) $$

A evolução temporal dos operadores na rep. de Heisenberg é dada pela eq. de Heisenberg. De (5.14) temos:

$$ \frac{dO^H}{dt} = \frac{dU^+}{dt} O^S U + U^+ \frac{dO^S}{dt} U + U^+ O^S \frac{dU}{dt} $$

$$ \cancel{= U^+\left[\frac{dO^S}{dt} + U\frac{dU^+}{dt} U O^H + O^H U^+ \frac{dU^+}{dt}\right]} $$

$$ = \frac{dU^+}{dt} U O^H + U^+ \frac{\partial O^S}{\partial t} U + O^H U^+ \frac{dU}{dt} $$

Mas como

$$U^{+} U = 1$$

temos

$$\frac{d(U^{+}U)}{dt} = 0 = \frac{dU^{+}}{dt} U + U^{+} \frac{dU}{dt} \Rightarrow U^{+} \frac{dU}{dt} = -\frac{dU^{+}}{dt} U \tag{5.19}$$

e ainda de (5.12)

$$U^{+} \frac{dU}{dt} = -\frac{i}{\hbar} H \tag{5.20}$$

Portanto

$$i\hbar \frac{dO^{H}}{dt} = \left(\frac{\partial O}{\partial t}\right)^{H} + [O^{H}, H] \tag{5.21}$$

A representação de interação surge quando dividimos a Hamiltoniana em duas partes:

$$H = H_0 + H_I \tag{5.22}$$

Na teoria quântica de campos H_I descreve a interação entre campos e H_0 a Hamiltoniana de campos livres. Definimos o operador unitário

$$U_0 = U_0(t, t_0) = e^{-iH_0(t-t_0)/\hbar} \tag{5.23}$$

e definimos os estados e operadores na representação de interação:

$$|A,t\rangle_I = U_0^+ |A,t\rangle_S \qquad (5.24)$$

e

$$O^I(t) = U_0^+ O^S U_0 \qquad (5.25)$$

Note que estas definições são parecidas com aquelas da rep. de Heisenberg, mas envolvem somente H_0.

Como

$$[U_0, H_0] = 0$$

então

$$H_0^I = H_0^S \equiv H \qquad (5.26)$$

Da (5.25) temos

$$\frac{dO^I}{dt} = [O^I, H_0]$$

Da (5.24)

$$\frac{d}{dt}|A,t\rangle_I = \frac{dU_0^+}{dt}|A,t\rangle_S + U_0^+ \frac{d}{dt}|A,t\rangle_S$$

$$= \frac{i}{\hbar} H_0 U_0^+ |A,t\rangle_S + \frac{U_0^+}{i\hbar}(H_0^S + H_I^S)|A,t\rangle_S$$

$$= \frac{1}{i\hbar}\left\{ -\cancel{H_0} + \cancel{U_0^+ H_0^S U_0} + U_0^+ H_I^S U_0 \right\} |A,t\rangle_I$$

e daí

$$i\hbar \frac{d}{dt} |A,t\rangle_I = H_I^I |A,t\rangle_I \tag{5.27}$$

onde

$$H_I^I = U_0^+ H_I^S U_0 \tag{5.28}$$

A expansão da Matriz-S

Nós vamos estudar agora a interação dos elétrons e pósitrons com os fótons. A teoria que descreve esta interação é a Eletrodinâmica Quântica (QED - Quantum Electrodynamics)

A Lagrangiana da QED é

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I \tag{5.29}$$

onde a parte livre é dada por

$$\mathcal{L}_0 = :\bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu)(\partial^\nu A^\mu): \tag{5.30.a}$$

e a parte descrevendo a interação por

$$\mathcal{L}_I = :-j^\mu A_\mu: = :e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu: \equiv :e\bar{\psi}\not{A}\psi: \tag{5.30.b}$$

~~Densa correspondente a esta Lagrangiana~~

A Hamiltoniana correspondente é:

$$H = H_0 + H_I \tag{5.31}$$