



PME 3100 – Mecânica I

Cinemática da Partícula

Prof. Francisco J. Profito

fprofito@usp.br



Conteúdo

1. Motivação e Objetivos
2. Referenciais e Sistemas de Coordenadas
3. Fundamentos de Geometria Diferencial de Curvas
4. Posição, Velocidade e Aceleração

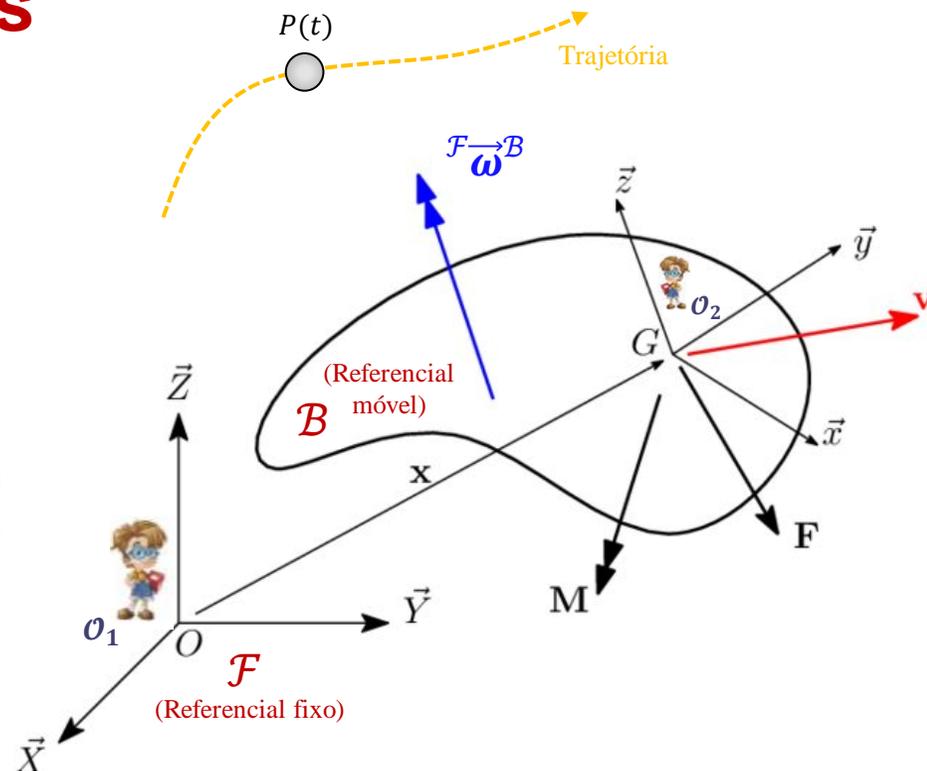


Conteúdo

1. Motivação e Objetivos
- 2. Referenciais e Sistemas de Coordenadas**
3. Fundamentos de Geometria Diferencial de Curvas
4. Posição, Velocidade e Aceleração

Referenciais e Sistemas de Coordenadas

- **Cinemática:** descrição **geométrica** do movimento e independente das causas do movimento.
- **Referencial:** objeto rígido a partir do qual eventos físicos (e.g. movimento de uma partícula no espaço) são observados, “percebidos” ou descritos. Notação: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, etc.
- **Sistema de Coordenadas:** ferramenta analítica utilizada para **representar a descrição** de eventos físicos (e.g. movimento de uma partícula no espaço) a partir de um dado referencial.
 - Um dado sistema de coordenadas é **fixo a um único** referencial
 - Definição de sistema de coordenadas:
 - Origem (e.g., G); ponto pertencente a um dado referencial;
 - Eixos coordenados (e.g., Gx, Gy, Gz);
 - Base de vetores alinhados aos eixos coordenados (e.g., $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$);
 - Notação: $\mathbb{B} = \{G; \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$
- Referencial \neq Sistema de coordenadas



- ${}^{\mathcal{F}}\vec{v}_P$ e ${}^{\mathcal{F}}\vec{a}_P$: velocidade e aceleração do ponto P em relação a \mathcal{F} , isto é, a velocidade e aceleração de P **medidas** por um observador **fixo** ao referencial \mathcal{F} .
- A velocidade e aceleração de um ponto em relação a um dado referencial pode ser **representada** (ou expressa) em um sistema de coordenadas fixo em **outro** referencial.



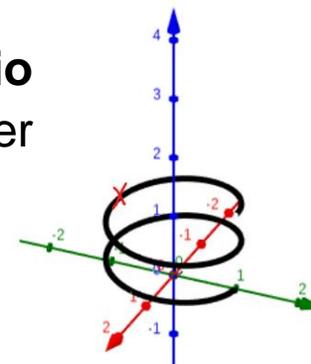
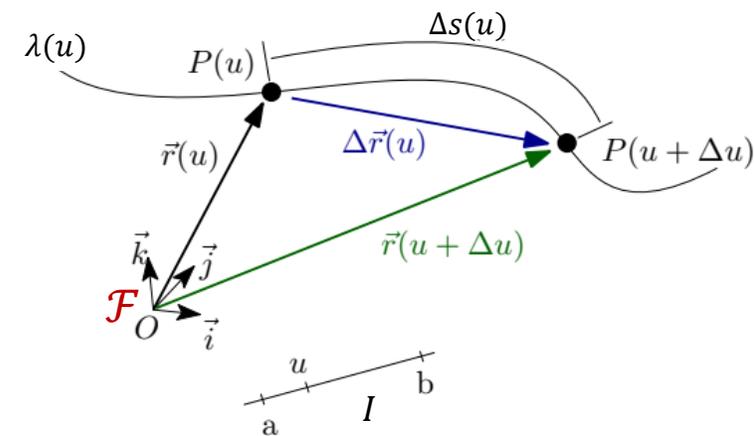
Conteúdo

1. Motivação e Objetivos
2. Referenciais e Sistemas de Coordenadas
- 3. Fundamentos de Geometria Diferencial de Curvas**
4. Posição, Velocidade e Aceleração

□ Fundamentos de Geometria Diferencial de Curvas

- Geometria diferencial é a “generalização” da geometria analítica baseada na aplicação dos conceitos de cálculo diferencial e integral para a análise de curvas, superfícies e volumes de formas geométricas genéricas descritas a partir de equações matemática no espaço Euclidiano tridimensional.
- Uma curva parametrizada é definida como $\lambda(u): I \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde I é um intervalo não vazio de números reais e \mathbb{R}^3 é o espaço Euclidiano tridimensional de pontos, tal que a cada valor de $u \in I$ associa-se um ponto $P(u) \in \mathbb{R}^3$.
- O lugar geométrico dos sucessivos pontos $P(u)$, quando u percorre I , é a **trajetória** (ou curva regular) parametrizada $\lambda(u)$. O parâmetro u também é denominado variável de parametrização da curva $\lambda(u)$.
- Dado um sistema de coordenadas cartesianas $\mathcal{S} = \{0; \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ **solidário** a um referencial \mathcal{F} , cada ponto $P(u)$ da curva parametrizada pode ser localizado pela **função vetorial**:

$$\vec{r}(u) = (P(u) - 0) = x(u)\hat{i} + y(u)\hat{j} + z(u)\hat{k} \quad (1)$$

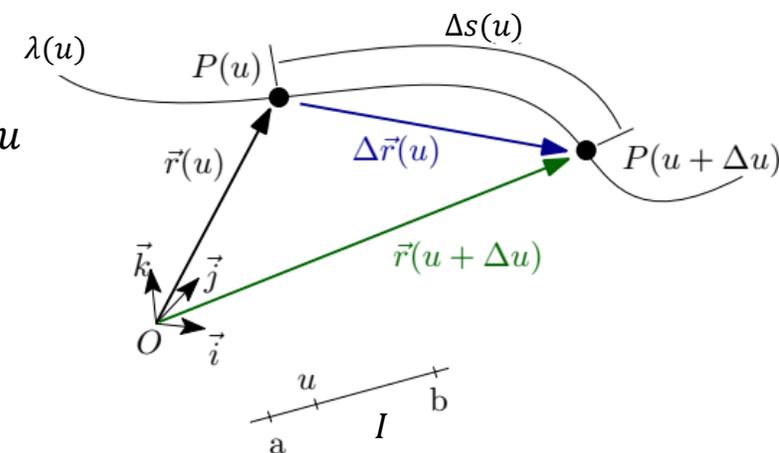


Trecho de uma montanha russa com trajetória horizontal helicoidal. Fonte [2].

❑ Fundamentos de Geometria Diferencial de Curvas

- **Comprimento de arco:** o comprimento de arco de uma curva parametrizada $\lambda(u)$ no intervalo $I = [a, b]$, é dado por:

$$\Delta u \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta s \rightarrow \|\Delta \vec{r}(u)\| \quad \text{No limite:} \begin{cases} ds = \|d\vec{r}(u)\| \\ \vec{r}'(u) = \frac{d\vec{r}(u)}{du} \Rightarrow \|d\vec{r}(u)\| = \|\vec{r}'(u)\| du \end{cases}$$



$$s \Big|_a^b = \int_a^b \|\vec{r}'(u)\| du \Rightarrow s(u) = \int_{u_0}^u \|\vec{r}'(v)\| dv \quad (2)$$

- Uma dada curva $\lambda(u)$ pode ser parametrizada em função do seu comprimento de arco $s(u)$, também denominado **abscissa curvilínea**. Neste caso, u é um parâmetro implícito da curva:

$$s = f(u) \rightarrow u = f^{-1}(s) \Rightarrow \vec{r}(u) = \vec{r}(f^{-1}(s)) \equiv \vec{r}(s) \quad (3)$$

❑ Fundamentos de Geometria Diferencial de Curvas

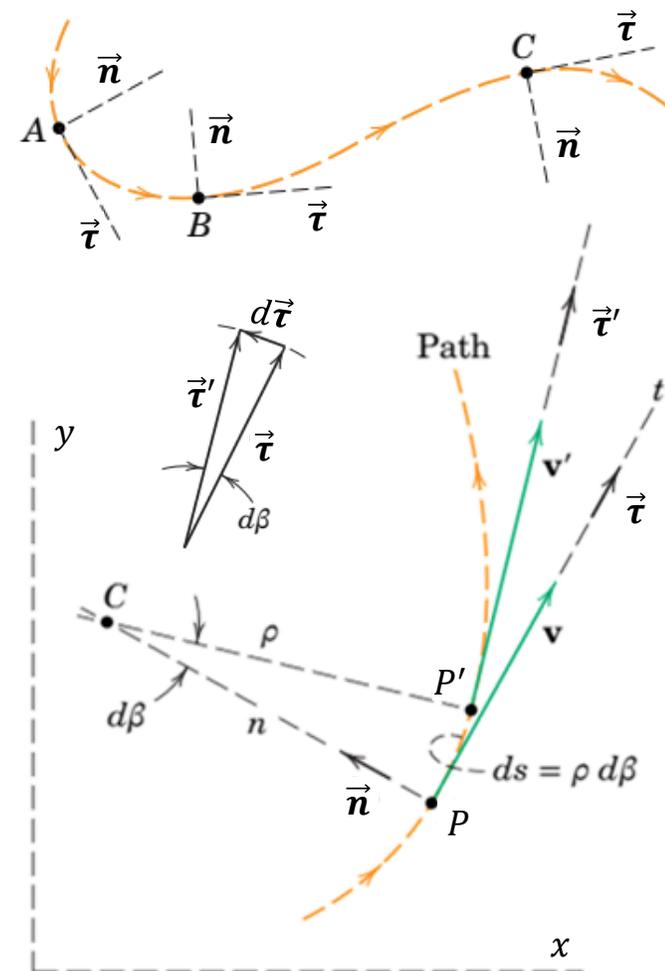
- **Triedro de Frenet-Serret:** base ortornormal positiva (dextrogira) solidária a cada ponto de uma curva parametrizada $\lambda(u)$.
- Base **intrínseca** (fixa) a $P(u)$ que determina como esse ponto percorre a curva parametrizada perante a variação de u .
- **Versor Tangente:** versor tangente à trajetória em $P(u)$, com sentido determinado pelo sentido de percurso de $P(u)$ ao longo da curva.

$$\vec{\tau}(u) \triangleq \frac{\vec{r}'(u)}{\|\vec{r}'(u)\|} \Leftrightarrow \vec{\tau}(s) = \frac{d\vec{r}(s)}{ds} \quad (4)$$

- Como $\vec{\tau}$ é um versor, $\|\vec{\tau}(u)\|^2 = \vec{\tau}(u) \cdot \vec{\tau}(u) = 1$. Derivando em relação a u :

$$\vec{\tau}'(u) \cdot \vec{\tau}(u) + \vec{\tau}(u) \cdot \vec{\tau}'(u) = 0 \Rightarrow \vec{\tau}(u) \cdot \vec{\tau}'(u) = 0 \quad \therefore \boxed{\vec{\tau}'(u) \perp \vec{\tau}(u)} \quad (5)$$

- Um vetor de módulo constante, não necessariamente unitário, é sempre ortogonal à sua derivada.



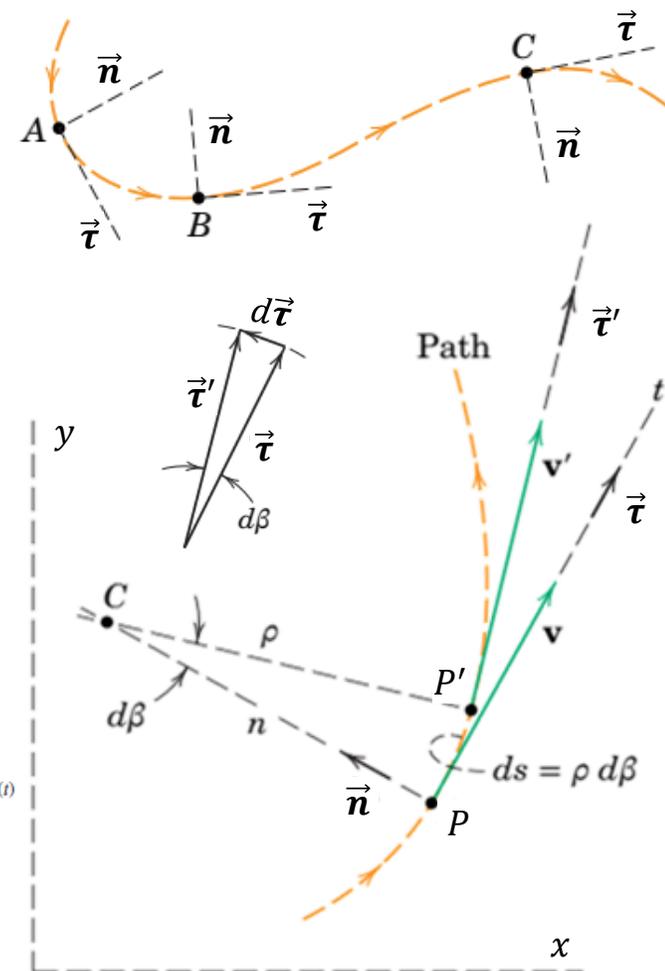
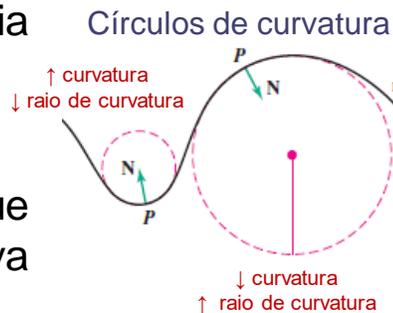
Versores tangente e normal do Triedro de Frenet-Serret. Fonte [1].

□ Fundamentos de Geometria Diferencial de Curvas

- **Triedro de Frenet-Serret**: base ortornormal positiva (dextrogira) solidária a cada ponto de uma curva parametrizada $\lambda(u)$.
- Base **intrínseca** (fixa) a $P(u)$ que determina como esse ponto percorre a curva parametrizada perante a variação de u .
- **Versor Normal**: versor normal à trajetória em $P(u)$, com sentido para o **interior da concavidade** da curva no ponto (centro de curvatura).

$$\vec{n}(u) \triangleq \frac{\vec{\tau}'(u)}{\|\vec{\tau}'(u)\|} \Leftrightarrow \vec{n}(s) = \rho \frac{d\vec{\tau}(s)}{ds} = \rho \frac{d^2\vec{r}(s)}{ds^2} \quad (6) \quad \vec{n}(u) \perp \vec{\tau}(u)$$

- \vec{n} é associado com a variação da orientação da trajetória em $P(u)$, que corresponde à variação de $\vec{\tau}$ nesse ponto;
- ρ é o **raio de curvatura** da trajetória em $P(u)$ [m];
- $\kappa = 1/\rho$ é a **curvatura** da trajetória em $P(u)$ [m⁻¹], que corresponde à rapidez com que a orientação da curva varia nesse ponto.



Versores tangente e normal do Triedro de Frenet-Serret. Fonte [1].

□ Fundamentos de Geometria Diferencial de Curvas

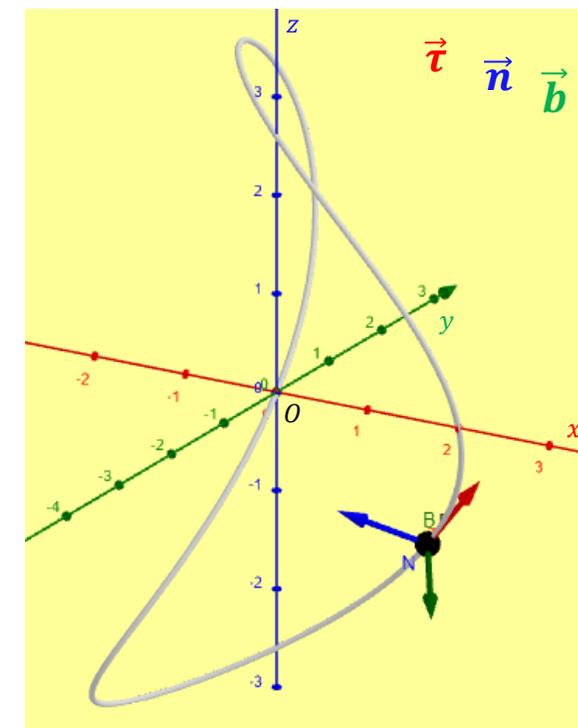
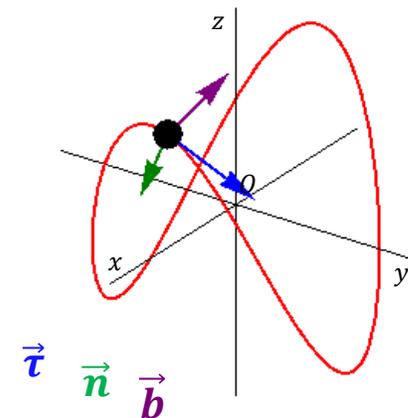
- **Triedro de Frenet-Serret**: base ortornormal positiva (dextrogira) solidária a cada ponto de uma curva parametrizada $\lambda(u)$.
- Base **intrínseca** (fixa) a $P(u)$ que determina como esse ponto percorre a curva parametrizada perante a variação de u .
- **Versor Binormal**: terceiro versor do triedro de Frenet-Serret em $P(u)$, definido por:

$$\vec{b} \triangleq \vec{\tau} \wedge \vec{n} \iff \vec{b}(u) = \frac{\vec{r}'(u) \wedge \vec{r}''(u)}{\|\vec{r}'(u) \wedge \vec{r}''(u)\|} \quad (7) \quad \vec{b}(u) \perp \vec{n}(u) \perp \vec{\tau}(u)$$

- **Torção da curva** (γ): medida da variação da orientação de \vec{b} em $P(u)$; mais precisamente, é a medida da variação do plano definido por \vec{b} e \vec{n} (plano osculador) em torno de $\vec{\tau}$.

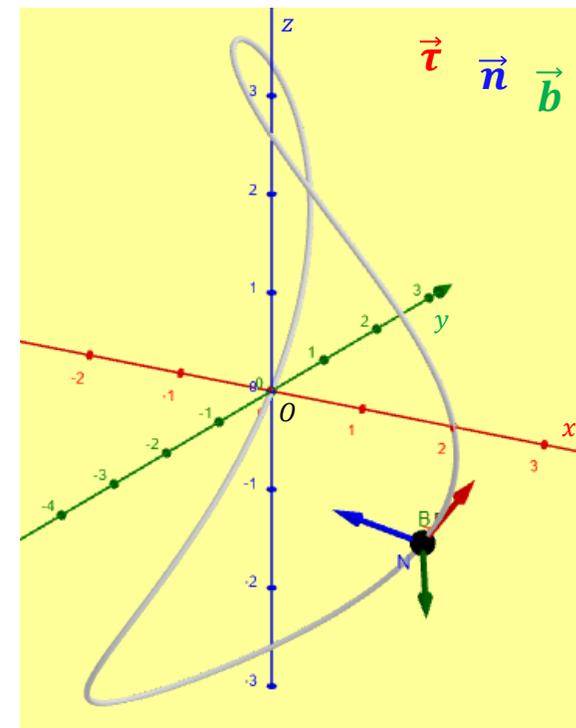
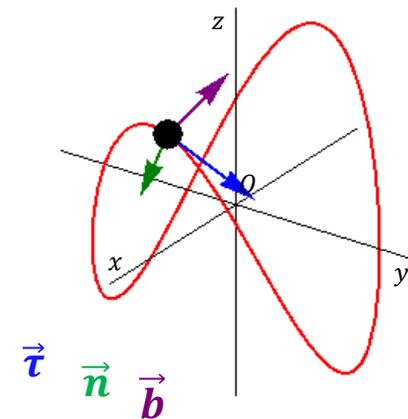
$$\gamma = -\frac{d\vec{b}(s)}{ds} \cdot \vec{n}(s) \iff \gamma = \frac{[\vec{r}'(u) \wedge \vec{r}''(u)] \cdot \vec{r}'''(u)}{\|\vec{r}'(u) \wedge \vec{r}''(u)\|^2}$$

- No caso particular de curvas planas, $\gamma = 0$.

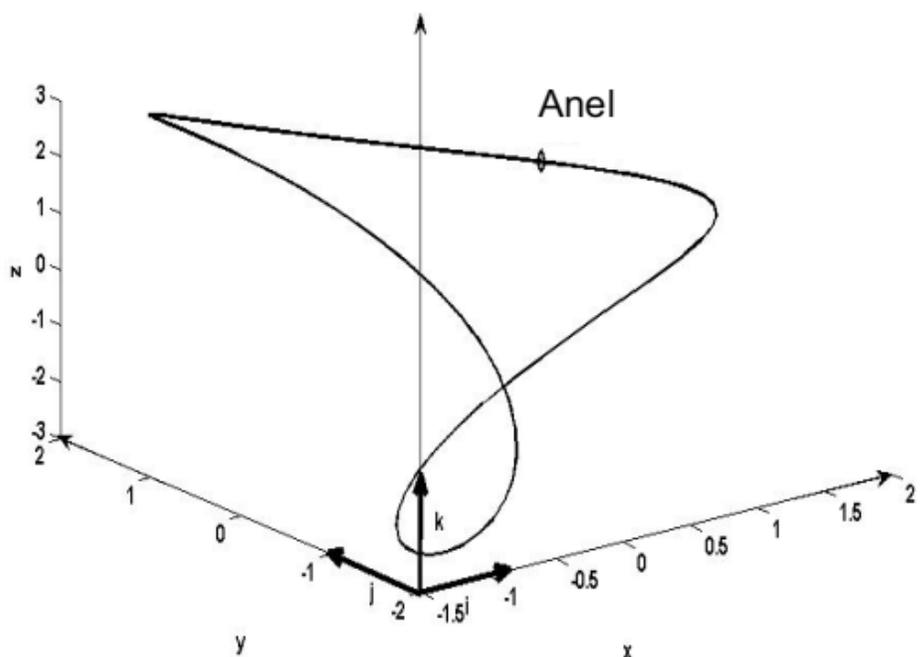


□ Fundamentos de Geometria Diferencial de Curvas

- A determinação do Triedro de Frenet-Serret pela definição é trabalhosa devido, principalmente, ao cálculo de $\vec{\tau}'(u)$.
- Dessa forma, dado a curva parametrizada $\lambda(u)$ expressa por $\vec{r}(u)$, pode-se adotar a seguinte estratégia para o cálculo dos versores do triedro:
 - 1) Obter $\vec{r}'(u)$ e $\|\vec{r}'(u)\|$ para calcular $\vec{\tau}(u)$ (Eq. 4.1);
 - 2) Obter $\vec{r}''(u)$, $\vec{r}'(u) \wedge \vec{r}''(u)$ e $\|\vec{r}'(u) \wedge \vec{r}''(u)\|$ para calcular $\vec{b}(u)$ (Eq. 7.2);
 - 3) Calcular $\vec{n} = \vec{b} \wedge \vec{\tau}$ (Eq. 7.1).



Exercício (P2-Q1-2016)



QUESTÃO 1 (2,5 pontos). Conforme ilustrado na figura, um pequeno anel move-se vinculado a um arame curvo descrito pela equação:

$$(P-O) = \vec{r}(u) = (\cos u + \cos 2u)\vec{i} + (\sin u - \sin 2u)\vec{j} + 3 \sin u \vec{k}$$

em que u é um parâmetro variável no tempo. O movimento do anel obedece à lei horária $u(t) = t/10$.

Para o instante $t = 10\pi$, pede-se:

(a) o versor tangente ao arame no ponto coincidente com o anel, descrito em coordenadas cartesianas (utilize a base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$).

(b) a velocidade do anel descrita em coordenadas intrínsecas;

(c) a aceleração do anel descrita em coordenadas intrínsecas.

Determine também os versores normal e binormal para o mesmo instante



□ Exercício (P2-Q1-2016)

a) O vetor tangente à curva, em qualquer ponto, é dado por:

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|} = \frac{\frac{dr_x}{du} \vec{i} + \frac{dr_y}{du} \vec{j} + \frac{dr_z}{du} \vec{k}}{\sqrt{\left(\frac{dr_x}{du}\right)^2 + \left(\frac{dr_y}{du}\right)^2 + \left(\frac{dr_z}{du}\right)^2}}$$

As componentes da derivada da função vetorial $\vec{r}(u)$ são dadas por:

$$\frac{dr_x}{du} = -\sin u - 2 \sin 2u$$

$$\frac{dr_y}{du} = \cos u - 2 \cos 2u$$

$$\frac{dr_z}{du} = \cos u$$

Para o instante $t = 10\pi$, tem-se $u(10\pi) = \pi$ e:

$$\frac{dr_x}{du}(t = 10\pi) = -\sin \pi - 2 \sin 2\pi = 0$$

$$\frac{dr_y}{du}(t = 10\pi) = \cos \pi - 2 \cos 2\pi = -3$$

$$\frac{dr_z}{du}(t = 10\pi) = 3 \cos 3\pi = -3$$

$$|\vec{r}'(t = 10\pi)| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$$

Portanto, o vetor tangente à curva, no ponto coincidente com a posição do anel no instante $t = 10\pi$, é:

$$\vec{\tau} = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-3\vec{j} - 3\vec{k}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k} \quad (1,0)$$



Conteúdo

1. Motivação e Objetivos
2. Referenciais e Sistemas de Coordenadas
3. Fundamentos de Geometria Diferencial de Curvas
- 4. Posição, Velocidade e Aceleração**

□ Posição, Velocidade e Aceleração

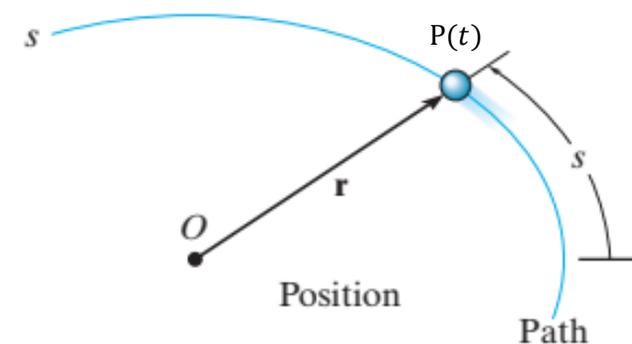
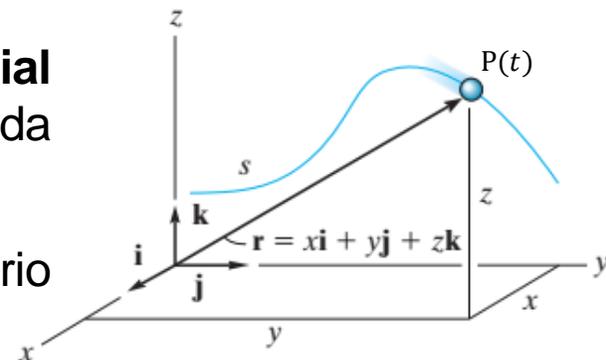
- Para as definições a seguir, considere o **movimento de uma partícula material** P que **percorre uma trajetória** $\lambda(u)$, em relação a um referencial \mathcal{F} , à medida que o tempo transcorre.
- Para que seja possível parametrizar as velocidades e acelerações, é necessário que u seja, ele próprio, função do tempo (**lei horária**), isto é: $u = u(t)$.
- Dessa forma, cada $u(t)$ corresponde a uma abscissa curvilínea $s(u(t)) = s(t)$ que é percorrida pela partícula P sobre a trajetória $\lambda(u)$.
- **Posição:** Dado um sistema de coordenadas cartesianas $\mathcal{S} = \{O; \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ **solidário** ao referencial \mathcal{F} , o vetor posição de uma partícula P é dado por:

$$\vec{r}(t) \equiv \vec{r}(u(t)) = x(u(t))\hat{i} + y(u(t))\hat{j} + z(u(t))\hat{k} \quad (8)$$

(coordenadas cartesianas)

$$\vec{r}(t) \equiv \vec{r}(s(t)) \quad (9)$$

(coordenada curvilínea)



Vetor posição de uma partícula representado em termos de coordenadas cartesianas e intrínsecas. Fonte [2].

□ Posição, Velocidade e Aceleração

➤ **Velocidade:** o vetor velocidade instantânea de P é dado por:

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) \triangleq \frac{d\vec{r}(u(t))}{dt} = \frac{d\vec{r}(u)}{du} \frac{du}{dt} = \vec{r}'(u)\dot{u}(t) \quad (10)$$

Atenção para regra da cadeia: se $u(t) = t \rightarrow \begin{cases} \dot{u}(t) = 1 \\ \vec{r}'(u) = \dot{\vec{r}}(t) \end{cases}$

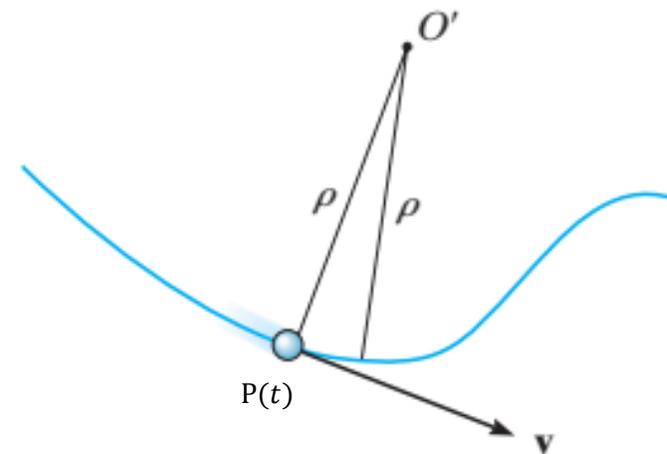
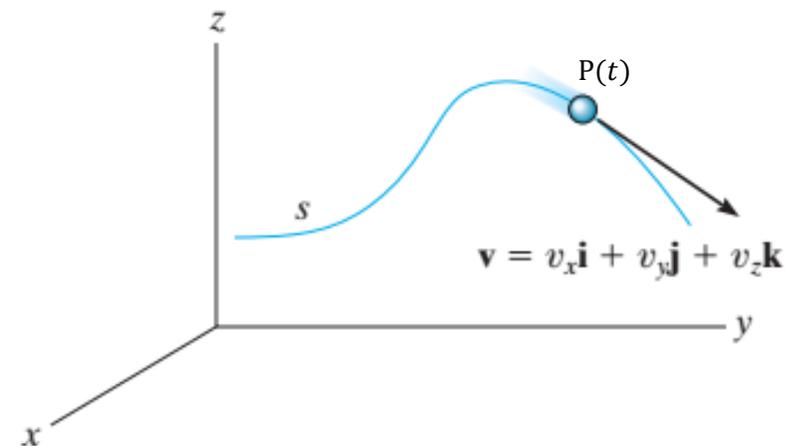
$$\vec{v}(t) = [x'(u)\hat{i} + y'(u)\hat{j} + z'(u)\hat{k}]\dot{u}(t) \quad (11)$$

(base cartesiana, fixa)

$$\vec{v}(t) = \dot{s}(t)\vec{\tau} = v(t)\vec{\tau} \Rightarrow \|\vec{v}(t)\| = v(t) \quad (12)$$

(base intrínseca, móvel)

- $\dot{s}(t) = v(t)$ é a velocidade escalar instantânea da partícula [m/s];
- o vetor velocidade instantânea da partícula é sempre **tangente** à trajetória.



Vetor velocidade instantânea de uma partícula representado nos sistemas de coordenadas cartesianas e intrínsecas. Fonte [2].

❑ Posição, Velocidade e Aceleração

➤ **Aceleração**: o vetor aceleração instantânea de P é dado por:

$$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) \triangleq \frac{d\vec{v}(u(t))}{dt} = \frac{d\vec{v}(u)}{du} \frac{du}{dt} = \vec{v}'(u)\dot{u}(t) \quad (13)$$

Atenção para regra da cadeia: se $u(t) = t \rightarrow \begin{cases} \dot{u}(t) = 1 \\ \vec{v}'(u) = \dot{\vec{v}}(t) \end{cases}$

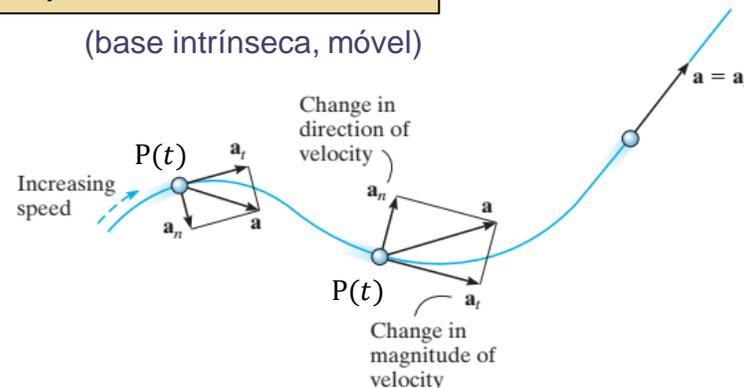
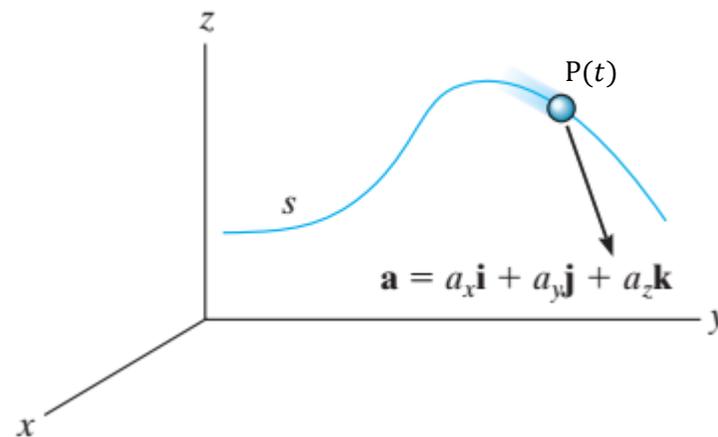
$$\vec{a}(t) = [x''(u)\hat{i} + y''(u)\hat{j} + z''(u)\hat{k}]\dot{u}^2(t) \quad (14)$$

(base cartesiana, fixa)

$$\vec{a}(t) = \dot{v}(t)\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n} = a_t\vec{\tau} + a_n\vec{n} \quad (15)$$

(base intrínseca, móvel)

- $a_t = \dot{v}(t)$ é a aceleração tangencial da partícula [m²/s], responsável pela **variação da magnitude** da velocidade instantânea. $a_t = \vec{a}(t) \cdot \vec{\tau}$
- $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ é a aceleração normal (ou centrípeta) da partícula [m²/s], responsável pela **variação da orientação** da velocidade instantânea. $a_n = \vec{a}(t) \cdot \vec{n}$



Vetor aceleração instantânea de uma partícula representado nos sistemas de coordenadas cartesianas e intrínsecas. Fonte [2].



□ Posição, Velocidade e Aceleração

➤ Determinação do raio de curvatura e do Triedro de Frenet-Serret da trajetória a partir de \vec{v} e \vec{a} :

1) Calcular a velocidade e aceleração instantâneas na base cartesiana: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ e $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

2) Obter a velocidade escalar: $v = \|\vec{v}\|$

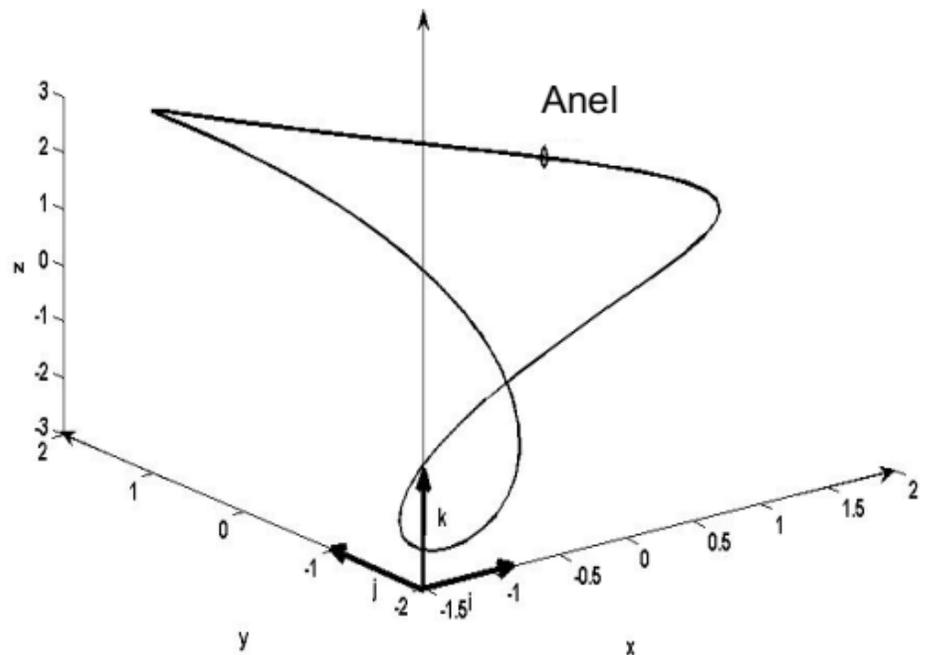
3) Calcular o raio de curvatura: $\rho = \frac{v^3}{\|\vec{v} \wedge \vec{a}\|}$

4) Calcular o versor tangente: $\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{\vec{v}}{v}$

5) Calcular o versor binormal: $\vec{b} = \frac{\vec{v} \wedge \vec{a}}{\|\vec{v} \wedge \vec{a}\|} = \left(\frac{\rho}{v^3}\right) \vec{v} \wedge \vec{a}$

6) Calcular o versor normal: $\vec{n} = \vec{b} \wedge \vec{\tau}$

Exercício (P2-Q1-2016)



QUESTÃO 1 (2,5 pontos). Conforme ilustrado na figura, um pequeno anel move-se vinculado a um arame curvo descrito pela equação:

$$(P-O) = \vec{r}(u) = (\cos u + \cos 2u)\vec{i} + (\sin u - \sin 2u)\vec{j} + 3 \sin u \vec{k}$$

em que u é um parâmetro variável no tempo. O movimento do anel obedece à lei horária $u(t) = t/10$.

Para o instante $t = 10\pi$, pede-se:

(a) o versor tangente ao arame no ponto coincidente com o anel, descrito em coordenadas cartesianas (utilize a base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$).

(b) a velocidade do anel descrita em coordenadas intrínsecas;

(c) a aceleração do anel descrita em coordenadas intrínsecas.



□ Exercício (P2-Q1-2016)

b) A velocidade do anel é dada por:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{du} \frac{du}{dt} = (-\sin u - 2 \sin 2u) \frac{1}{10} \vec{i} + (\cos u - 2 \cos 2u) \frac{1}{10} \vec{j} + 3 \cos u \frac{1}{10} \vec{k}$$

No instante considerado, tem-se:

$$\vec{v}(u(t = 10\pi)) = (-\sin \pi - 2 \sin 2\pi) \frac{1}{10} \vec{i} + (\cos \pi - 2 \cos 2\pi) \frac{1}{10} \vec{j} + 3 \cos \pi \frac{1}{10} \vec{k} = -\frac{1}{10} (3\vec{j} + 3\vec{k})$$

A velocidade escalar do anel, nesse instante, é, portanto:

$$v(t = 10\pi) = \frac{1}{10} \sqrt{9+9} = \frac{3\sqrt{2}}{10}$$

e a expressão intrínseca de sua velocidade, é:

$$\vec{v}(t = 10\pi) = \frac{3\sqrt{2}}{10} \vec{\tau} \quad (0,5)$$



□ Exercício (P2-Q1-2016)

c) A aceleração do anel, descrita em coordenadas cartesianas, é dada por:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{du} \frac{du}{dt} = \left[(-\cos u - 4 \cos 2u) \frac{1}{10} \vec{i} + (-\sin u + 4 \sin 2u) \frac{1}{10} \vec{j} - 3 \sin u \frac{1}{10} \vec{k} \right] \frac{1}{10}$$

No instante considerado, tem-se:

$$\vec{a}(t = 10\pi) = \vec{a}(u = \pi) = (-\cos \pi - 4 \cos 2\pi) \frac{1}{100} \vec{i} + (-\sin \pi + 4 \sin 2\pi) \frac{1}{100} \vec{j} - 3 \sin \pi \frac{1}{10} \vec{k} = -\frac{3}{100} \vec{i}$$

A componente tangencial da aceleração, é dada por:

$$a_t(t = 10\pi) = -\frac{3}{100} \vec{i} \cdot \vec{v}(t = 10\pi) = -\frac{3}{100} \vec{i} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} - \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{k} \right) = 0$$

Portanto, no instante $t = 10\pi$ o módulo da aceleração do anel vale

$$\vec{a}(t = 10\pi) = \frac{3}{100}$$

a aceleração do anel coincide com sua componente normal, ou seja:

$$\vec{a}(t = 10\pi) = \frac{3}{100} \vec{n}$$

(1,0)



Q3 – P2 – 2015Reof

3ª Questão (2,0 pontos)

Um ponto M percorre a curva descrita por

$$\begin{cases} x = a(1 + \cos \theta) \cdot \cos \theta \\ y = a(1 + \cos \theta) \cdot \sin \theta \\ z = \theta \end{cases}$$

de acordo com a lei horária $\theta = \frac{t}{2}$. Pede-se determinar, no instante $t = \frac{\pi}{2}$:

- (a) a velocidade de M ;
- (b) a aceleração de M ;
- (c) os versores $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$ do triedro de Frenet em M .



P1-2022-Q3

3ª Questão (3,0 pontos). O ponto P move-se com lei horária $\theta(t) = \pi t/2$ ao longo da curva plana descrita pela equação paramétrica:

$$\begin{cases} x(\theta) = R\theta - R\sin\theta \\ y(\theta) = -R + R\cos\theta \end{cases}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Determinar, para o instante $t = 1\text{s}$:

- A velocidade de P descrita em coordenadas cartesianas.
- A aceleração de P descrita em coordenadas cartesianas.
- O versor tangente do triedro de Frenet.
- A velocidade de P descrita em coordenadas intrínsecas.
- A aceleração de P descrita em coordenadas intrínsecas.



P1-2022-Q3

RESOLUÇÃO

a) Velocidade de P em coordenadas cartesianas:

$$\vec{v}_P = \frac{dx}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \vec{j} = (R - R \cos \theta) \frac{\pi}{2} \vec{i} - R \sin \theta \frac{\pi}{2} \vec{j}$$

Para o instante $t = 1\text{ s}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad, de modo que:

$$\vec{v}_P(t = 1\text{ s}) = \left(R - R \cos \frac{\pi}{2} \right) \frac{\pi}{2} \vec{i} - R \sin \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \vec{j} = \frac{\pi R}{2} (\vec{i} - \vec{j}) \quad \text{(0,5 ponto)}$$

b) Aceleração de P em coordenadas cartesianas:

$$\vec{a}_P = \frac{dv_x}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \vec{j} = R \sin \theta \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \vec{i} - R \cos \theta \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \vec{j} = \frac{\pi^2 R}{4} (\sin \theta \vec{i} - \cos \theta \vec{j})$$

Para o instante $t = 1\text{ s}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad, de modo que:

$$\vec{a}_P(t = 1\text{ s}) = \frac{\pi^2 R}{4} \vec{i} \quad \text{(0,5 ponto)}$$

c) Versor tangente: $\vec{\tau} = \frac{\vec{v}_P}{|\vec{v}_P|}$. No instante $t = 1\text{ s}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad, de modo que:

$$\vec{\tau} = \frac{R \frac{\pi}{2} (\vec{i} - \vec{j})}{\left| R \frac{\pi}{2} (\vec{i} - \vec{j}) \right|} = \frac{R \frac{\pi}{2} (\vec{i} - \vec{j})}{R \frac{\pi}{2} \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{i} - \vec{j}) \quad \text{(0,5 ponto)}$$

d) Velocidade de P em coordenadas intrínsecas:

Para o instante $t = 1\text{ s}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad e $\vec{v}_P(t = 1\text{ s}) = |\vec{v}_P(t = 1\text{ s})| \vec{\tau}(t = 1\text{ s}) = \frac{\pi R}{2} \sqrt{2} \vec{\tau}(t = 1\text{ s}) \quad \text{(0,5 ponto)}$

e) Aceleração de P em coordenadas intrínsecas:

A componente tangencial da aceleração de P no instante $t = 1\text{ s}$ é:

$$a_\tau(t = 1\text{ s}) = \vec{a}_P(t = 1\text{ s}) \cdot \vec{\tau}(t = 1\text{ s}) = \frac{\pi^2 R}{4} \vec{i} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{i} - \vec{j}) = \frac{\sqrt{2} \pi^2 R}{8}$$

Logo, a aceleração normal de P no instante $t = 1\text{ s}$ é:

$$\vec{a}_n(t = 1\text{ s}) = \vec{a}_P(t = 1\text{ s}) - a_\tau(t = 1\text{ s}) \vec{\tau}(t = 1\text{ s}) = \frac{\pi^2 R}{4} \vec{i} - \frac{\sqrt{2} \pi^2 R \sqrt{2}}{8} \frac{(\vec{i} - \vec{j})}{2} = \frac{\pi^2 R}{8} (\vec{i} + \vec{j})$$

Assim, a componente normal da aceleração de P no instante $t = 1\text{ s}$ é:

$$a_n(t = 1\text{ s}) = |\vec{a}_n(t = 1\text{ s})| = \frac{\sqrt{2} \pi^2 R}{8} \quad \text{(1,0 ponto)}$$



□ Referências

- [1] Merian J.L., Kraige L.G., Bolton, J.N. **Engineering Mechanics – Vol. 1 Dynamics**, 9th edition, John Wiley & Sons, Inc. 2018.
- [2] Hibbeler R.C. **Engineering Mechanics – Vol. 2 Dynamics**, 14th edition in SI units, Pearson Education, Inc. 2016.