



## **PME 3100 – Mecânica I**

# **Atrito por Deslizamento à Seco**

Prof. Francisco J. Profito

[fprofito@usp.br](mailto:fprofito@usp.br)



# Conteúdo

1. Motivação e Objetivos
2. Força de Atrito
3. Modelo de Atrito de Amontons-Coulomb
4. Referências



# Conteúdo

## 1. Motivação e Objetivos

2. Força de Atrito

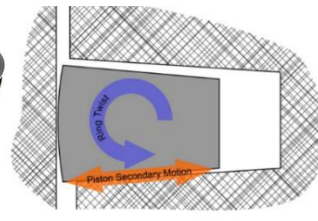
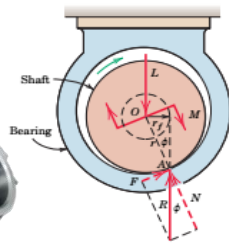
3. Modelo de Atrito de Amontons-Coulomb

4. Referências



## ❑ Motivação e Objetivos

- Introduzir os conceitos de **atrito por deslizamento à seco** e mostrar como problemas de equilíbrio estático sujeitos à ação desse tipo de força podem ser analisados.
- Apresentar o modelo de Amontons-Coulomb para o **atrito por deslizamento à seco** entre corpos em contato, bem como as hipóteses que delimitam sua aplicação.
- Distinguir atrito estático e atrito dinâmico.
- Aplicações:
  - Mancais, engrenagens, parafusos de transmissão de potência, partes móveis de motores, etc. Nesses casos, geralmente se deseja **minimizar** a força de atrito.
  - Freios, embreagens, correias de transmissão, etc. Nesses casos, geralmente se deseja **maximizar** a força de atrito.



Exemplos de aplicações em que geralmente se deseja minimizar a força de atrito. Mancais de biela (esquerda), anéis de pistão (meio) e engrenagens (direita)

Exemplos de aplicações em que geralmente se deseja maximizar a força de atrito. Contato roda-trilho (superior) e disco de freio (inferior). Fonte: [1,2]



# Conteúdo

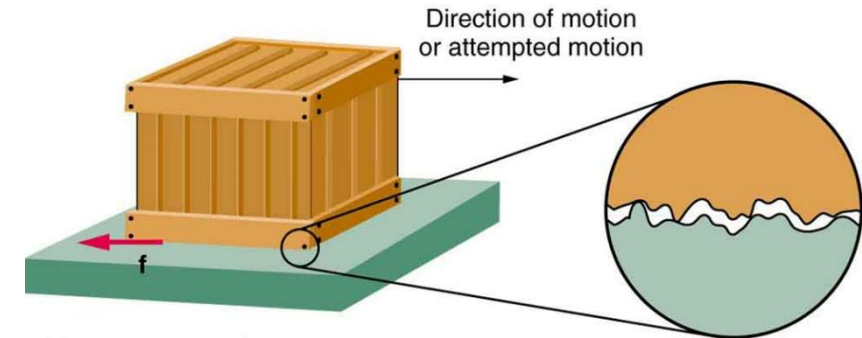
1. Motivação e Objetivos
- 2. Força de Atrito**
3. Modelo de Atrito de Amontons-Coulomb
4. Referências

## ❑ Força de Atrito

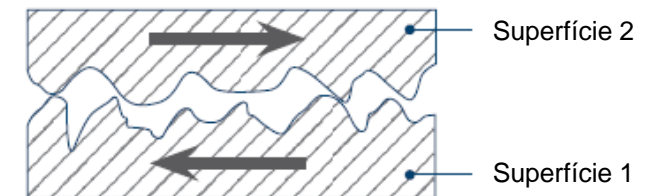
- **Força de atrito:** força tangencial **resistente** ao movimento relativo (dinâmica), ou à **tendência** de movimento relativo (estática), atuante na interface entre corpos em contato.
- Em sistemas mecânicos, geralmente ocorrem três tipos de atrito:

Tratado nesse curso

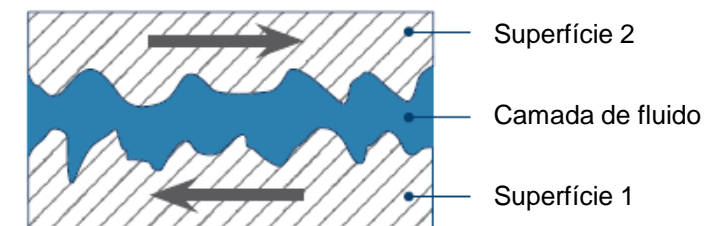
- **Atrito à seco:** ocorre quando as superfícies em contato **não** são lubrificadas. Também conhecido como atrito de Coulomb.
- **Atrito lubrificado:** ocorre quando uma camada de fluido (líquido ou gás) está presente na interface de contato. A força de atrito é gerada devido ao cisalhamento da camada de fluido, e sua magnitude depende da velocidade relativa entre as superfícies e da viscosidade do fluido. Tópico abordado em Mecânica dos Fluidos.
- **Atrito interno:** ocorre no interior de materiais sólidos sujeitos a carregamentos cíclicos. O mecanismo de atrito interno está associado às deformações internas de sólidos deformáveis. Tópico abordado em Ciências dos Materiais.



Força de atrito e sua origem na interface de corpos em contato.  
Fonte: [1,2]



Atrito à seco. Fonte: adaptado de [4]

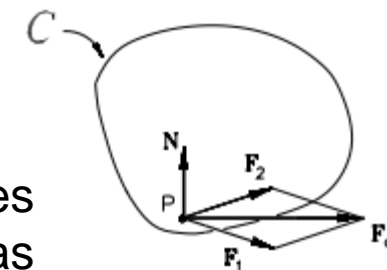
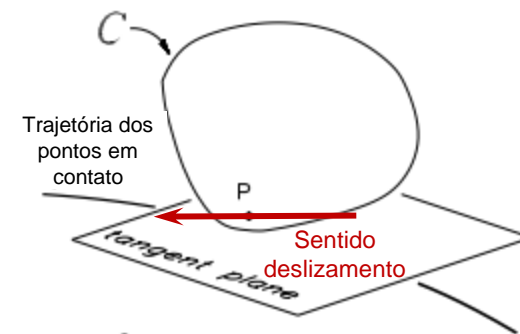


Atrito lubrificado. Fonte: adaptado de [4]

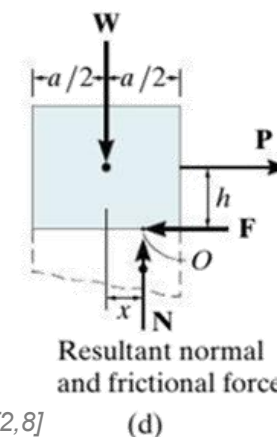
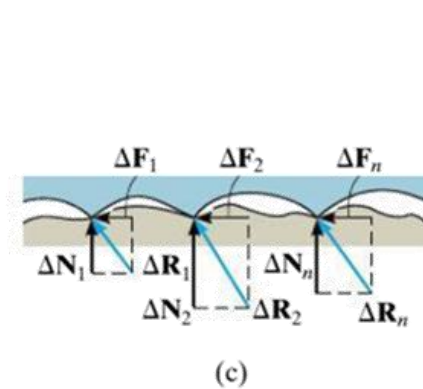
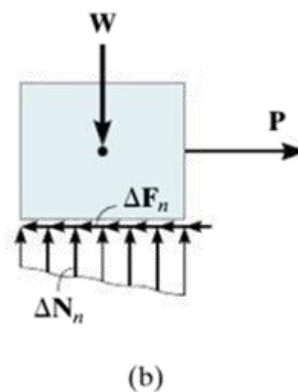
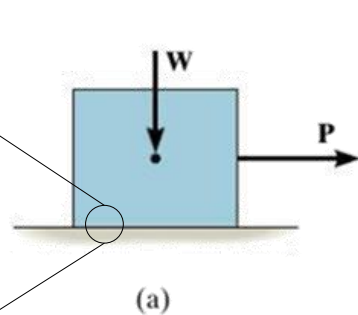
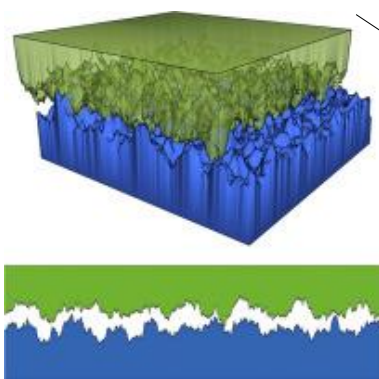


## □ Força de Atrito

- A força de **atrito à seco** é proveniente da interação entre as rugosidades das superfícies de corpos em contato (micro-geometria das superfícies).
- **Orientação da força de atrito:** direção **tangente** ao plano definido pelos pontos em contato, e sentido **oposto** ao movimento ou tendência de movimento **relativo** entre os corpos.
- **Magnitude da força de atrito:** associada com as tensões de cisalhamento atuantes em **cada** “micro-área” de contato que compõem a **área real** de contato entre as superfícies. Essas tensões de cisalhamento são geradas, predominantemente, pelos fenômenos de adesão e deformação plástica atuantes nessas “micro-áreas” de contato.



Direção e sentido da força de atrito. Fonte: [5]



Esforços atuantes nas “micro-áreas” de contato definidas pela interação entre as asperezas de duas superfícies rugosas em contato. Fonte: [2,8]



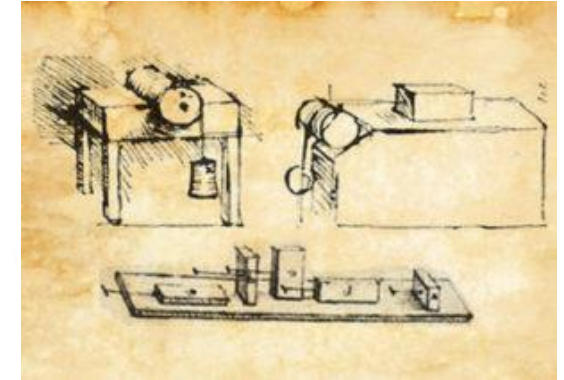
# Conteúdo

1. Motivação e Objetivos
2. Força de Atrito
- 3. Modelo de Atrito de Amontons-Coulomb**
4. Referências

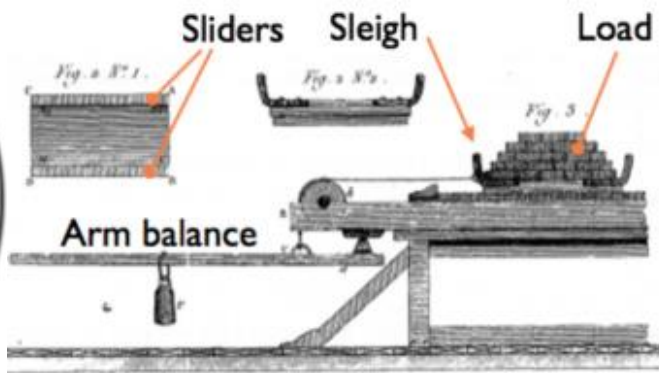


## ❑ Modelo de Atrito de Amontons-Coulomb

- Possivelmente, Leonardo da Vinci foi o primeiro estudioso a realizar estudos experimentais sistemáticos sobre o atrito entre corpos em contato, por volta de 1490.
- Enfoque no estudo do atrito em eixos de rodas, polias e roscas de parafusos.



Leonardo da Vinci e os primeiros estudos experimentais sobre o atrito. Fonte [6]



Charles-Augustin de Coulomb e um dos seus aparatos experimentais utilizado para o estudo do atrito. Fonte [9]

- Posteriormente, Guillaume Amontons e Charles-Augustin de Coulomb estenderam e consolidaram os conceitos fundamentais do **atrito por deslizamento à seco** entre corpos em contato (atrito de rolamento não será abordado nesse curso), por volta de 1770.
- O modelo de atrito de Amontons-Coulomb é compatível com resultados empíricos.
- O modelo de Amontons-Coulomb é melhor descrito considerando a distinção entre **atrito estático** e **dinâmico**.

## ❑ Modelo de Atrito de Amontons-Coulomb

➤ **Atrito estático**: ausência de deslizamento entre as superfícies em contato, impedindo assim o movimento relativo entre os corpos.

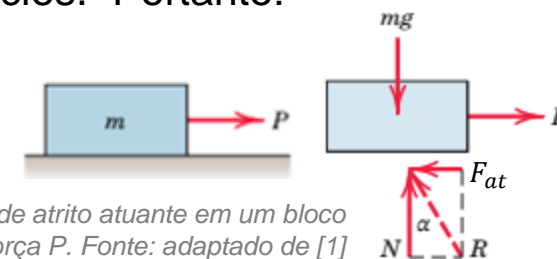
- O **módulo** da força de atrito **depende dos carregamentos externos** que causariam o deslizamento caso o atrito não estivesse presente.
- O valor **máximo** do módulo da força de atrito é proporcional à força normal aplicada entre os corpos em contato. A partir desse valor, passa a ocorrer o movimento relativo entre as superfícies. Portanto:

$$|F_{at}| \leq \mu_e |N|$$

$F_{at}$  = força de atrito **estático** [N]

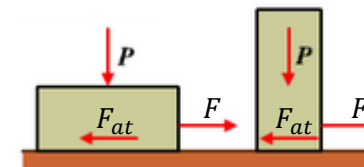
$N$  = força normal [N]

$\mu_e$  = coeficiente de atrito **estático** [-]



DCL com a força de atrito atuante em um bloco sendo puxado pela força  $P$ . Fonte: adaptado de [1]

- A força de atrito **independe da área aparente de contato** (atenção para a diferença entre área aparente e área real de contato).
- O coeficiente de atrito estático,  $\mu_e$ , depende da natureza das superfícies em contato (material, rugosidade, tribofilme, etc.).



Independência da força de atrito com a área aparente de contato. Fonte: adaptado de [7]

## ❑ Modelo de Atrito de Amontons-Coulomb

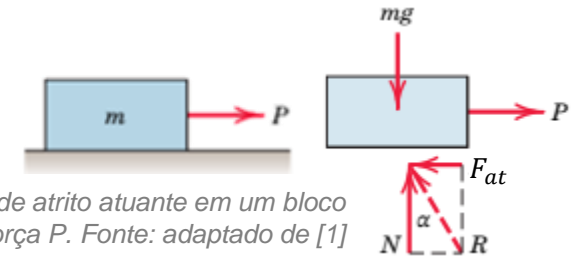
- **Atrito dinâmico**: ocorre quando existe deslizamento relativo entre as superfícies em contato.
  - O **módulo** da força de atrito é proporcional à força normal aplicada entre os corpos em contato:

$$|F_{at}| = \mu_d |N|$$

$F_{at}$  = força de atrito **dinâmico** [N]

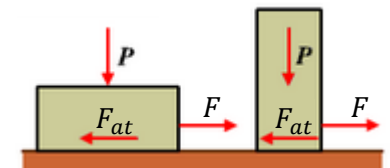
$N$  = força normal [N]

$\mu_d$  = coeficiente de atrito **dinâmico** [-]



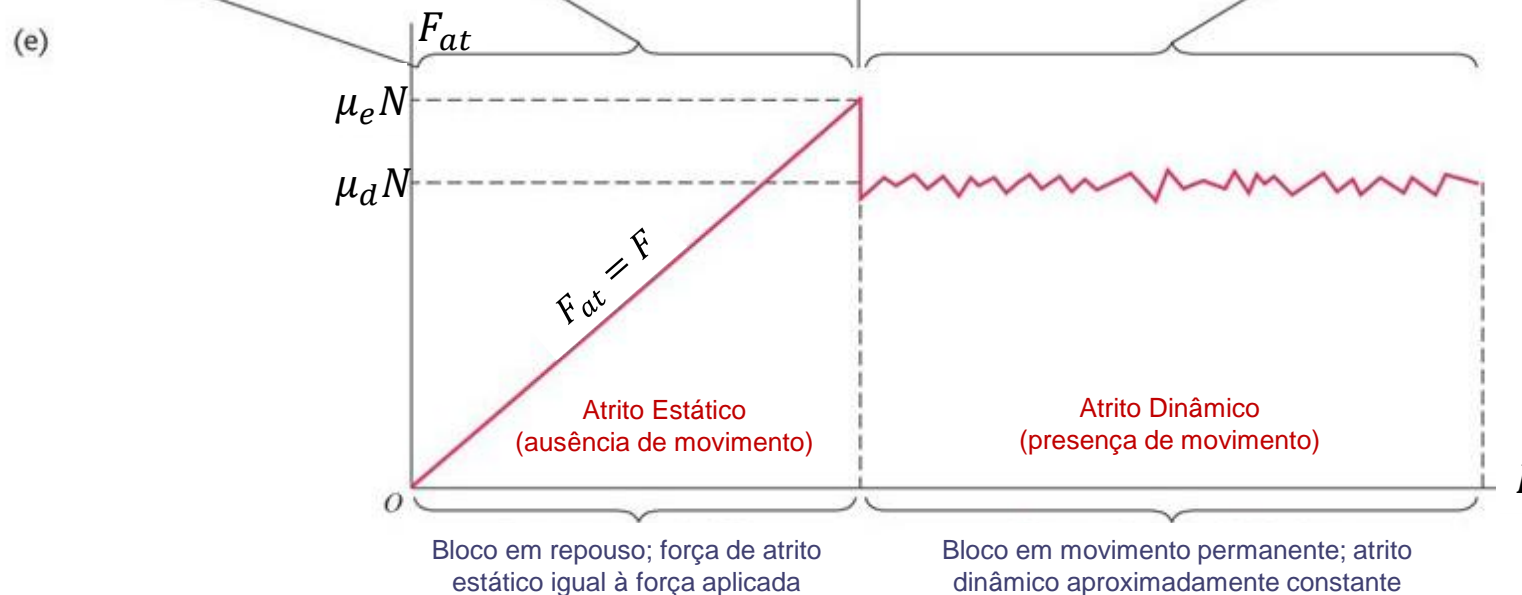
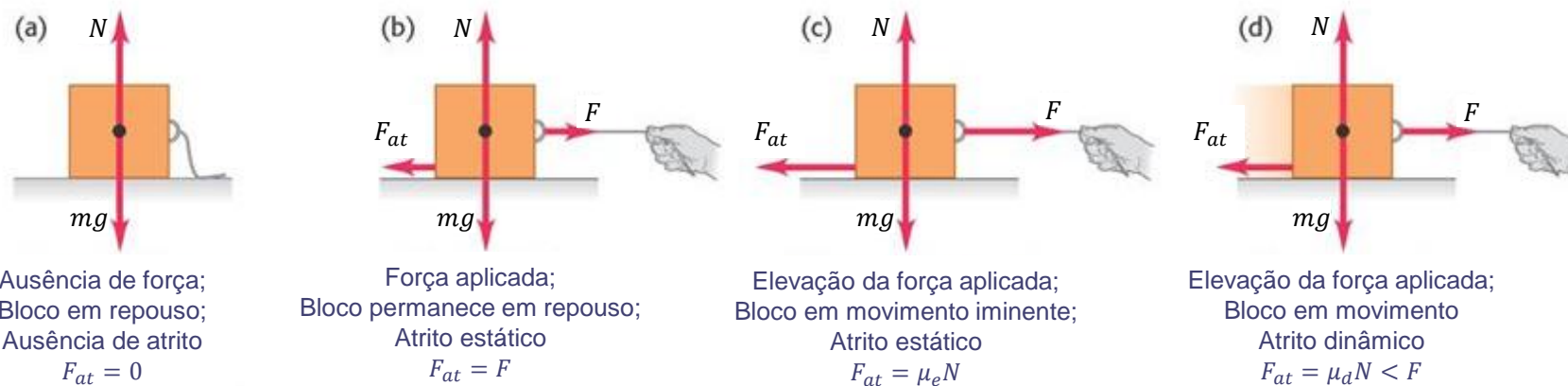
DCL com a força de atrito atuante em um bloco sendo puxado pela força  $P$ . Fonte: adaptado de [1]

- A força de atrito **não** depende da velocidade relativa entre os corpos em contato.
- A força de atrito **independe da área aparente de contato** (atenção para a diferença entre área aparente e área real de contato).
- O coeficiente de atrito dinâmico  $\mu_d$  depende da natureza das superfícies em contato (material, rugosidade, tribofilme, etc.).
- Geralmente  $\mu_d < \mu_e$ .
- A força de atrito dinâmico **dificulta** o movimento, possui valor conhecido e é **dissipativa**.



Independência da força de atrito com a área aparente de contato. Fonte: adaptado de [7]

# Modelo de Atrito de Amontons-Coulomb

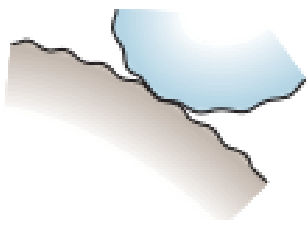


## ❑ Modelo de Atrito de Amontons-Coulomb

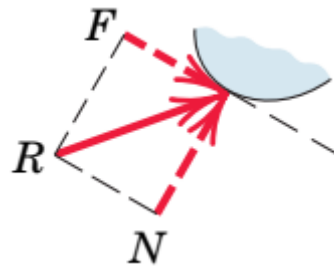
- Em problemas de **equilíbrio estático**, a região de contato com atrito pode ser admitida como sendo um vínculo cinemático.

### Problemas 2D

- Restringe 2 GLs (translação) do ponto vinculado;
- Impõe *duas componentes* de força de reação no ponto vinculado (direção normal de compressão e direção tangencial do vínculo);
- Adiciona *duas incógnita* ao problema (componentes de força de reação).



Origem da força de reação.

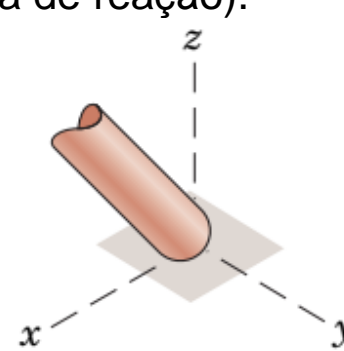


Ação no corpo isolado.

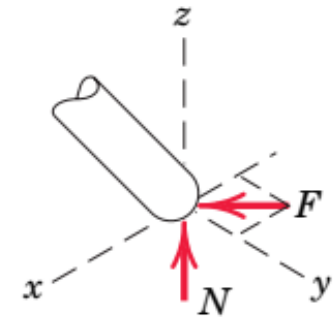
Representação de apoio simples em problemas 2D. Fonte: [1]

### Problemas 3D

- Restringe 2 GLs (translação) do ponto vinculado;
- Impõe *duas componentes* de força de reação no ponto vinculado (direção normal de compressão e direção tangencial do vínculo);
- Adiciona *duas incógnita* ao problema (componentes de força de reação).



Origem da força de reação.



Ação no corpo isolado.

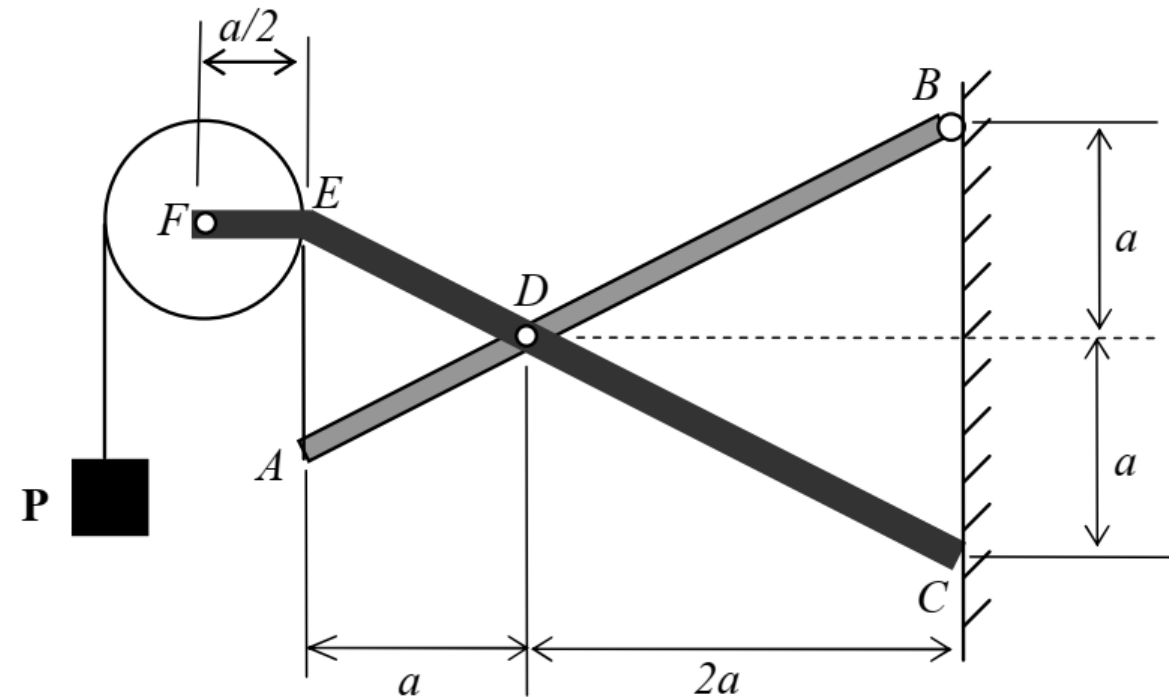
Representação de apoio simples em problemas 3D. Fonte: [1]



## Exercício: 2011–P1–Q3

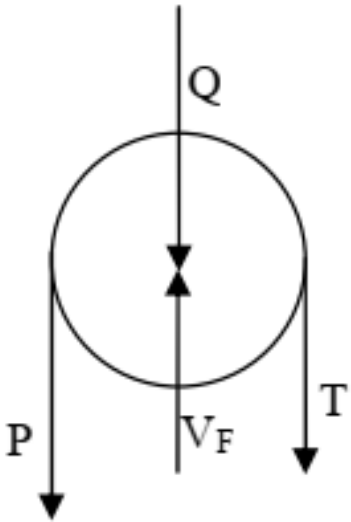
**QUESTÃO 3 (4,0 pontos).** Na figura ao lado, a polia tem peso  $Q$ , as barras têm peso desprezível e a carga suportada pela extremidade do cabo é  $P$ . As barras  $ADB$  e  $CDEF$  são contínuas através do pino  $D$  que as mantém unidas. A barra  $ADB$  está articulada em  $B$  e a  $CDEF$  apóia-se na parede rugosa  $BC$ . Sendo  $\mu$  o coeficiente de atrito entre a parede e a barra  $CDEF$ , pede-se:

- o diagrama de corpo livre da polia, a reação em  $F$  e a força no cabo; **(0,5)**
- os diagramas de corpo livre das barras  $ADB$  e  $CDEF$ ; **(1,0)**
- as forças atuantes na barra  $CDEF$ ; **(1,5)**
- o valor mínimo de  $\mu$  para que o sistema se mantenha em equilíbrio. **(1,0)**



## □ Exercício: 2011–P1–Q3

O diagrama de corpo livre da polia é apresentado na figura abaixo.



Aplicando-se as equações de equilíbrio à polia, obtêm-se:

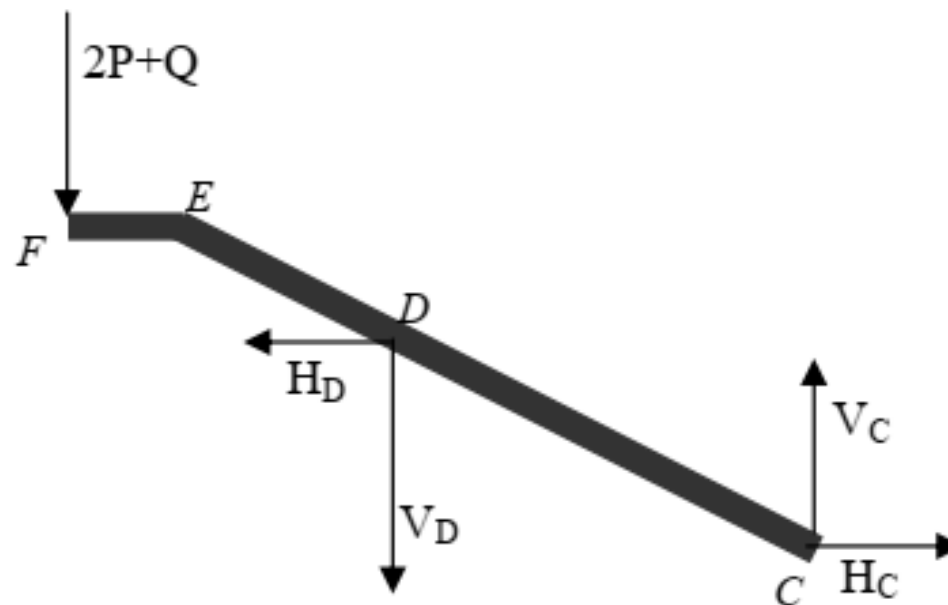
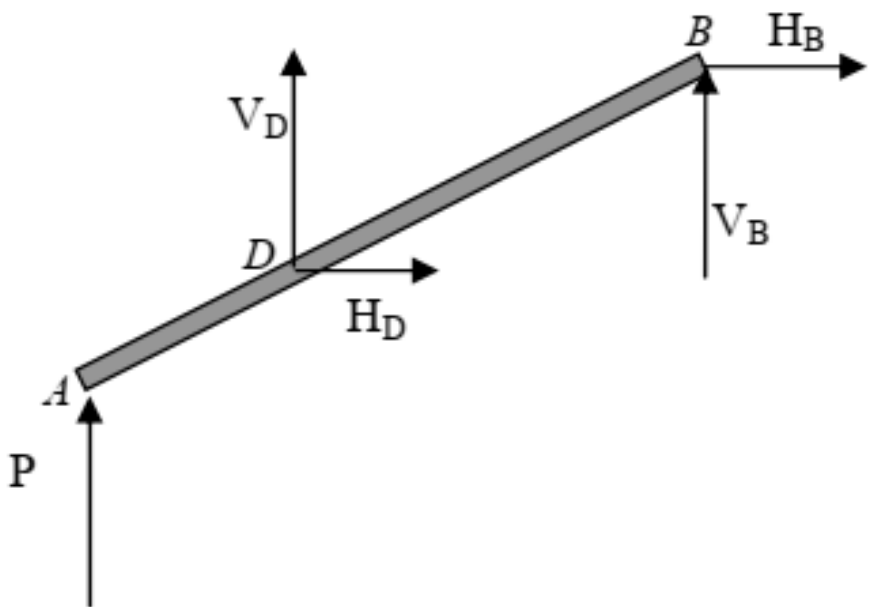
$$M_F = P \cdot \frac{a}{2} - T \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow T = P$$

$$V_F - P - T - Q = 0 \Rightarrow V_F = 2P + Q$$



## Exercício: 2011-P1-Q3

Os diagramas de corpo livre das barras  $ADB$  e  $CDEF$  são apresentados abaixo.





## □ Exercício: 2011–P1–Q3

Aplicando-se as equações de equilíbrio aos sistemas de forças atuantes nas barras  $ADB$  e  $CDEF$ , obtêm-se:

$$H_D + H_B = 0 \quad (1)$$

$$P + V_D + V_B = 0 \quad (2)$$

$$M_{Bz} = 0 \Rightarrow -P \cdot 3a - V_D \cdot 2a + H_D \cdot a = 0$$

$$\therefore H_D - 2V_D - 3P = 0 \quad (3)$$

$$-(2P + Q) - V_D + V_C = 0 \quad (4)$$

$$-H_D + H_C = 0 \quad (5)$$

$$M_{Cz} = 0 \Rightarrow (2P + Q) \frac{7a}{2} + V_D 2a + H_D a = 0$$

$$\therefore 2H_D + 4V_D + 14P + 7Q = 0 \quad (6)$$

Resolvendo-se o sistema de equações (1)-(6), obtêm-se:

$$H_B = \frac{8P + 7Q}{4}, \quad V_B = \frac{12P + 7Q}{8}$$

$$H_D = -\frac{8P + 7Q}{4}, \quad V_D = -\frac{20P + 7Q}{8}$$

$$H_C = -\frac{8P + 7Q}{4}, \quad V_C = \frac{-4P + Q}{8}$$



## □ Exercício: 2011–P1–Q3

Como a componente  $V_C$  é devida à força de atrito, o sistema se mantém em equilíbrio desde que:

$$V_C \leq \mu H_C$$

É necessário analisar os seguintes casos:

(a) Se  $Q > 4P \Rightarrow \mu > \frac{Q-4P}{16P+14Q}$ , ou seja, a força de atrito impede o deslizamento vertical para baixo do ponto de contacto  $C$ .

(b) Se  $Q < 4P \Rightarrow \mu > \frac{4P-Q}{16P+14Q}$ , ou seja, a força de atrito impede o deslizamento vertical para cima do ponto de contacto  $C$ .

(c) No caso limite em que  $Q = 4P$ , notamos que  $V_C = 0$ , de modo que o sistema se mantém em equilíbrio independentemente de existir ou não atrito no ponto de contacto  $C$  da parede com a barra  $CDEF$ .

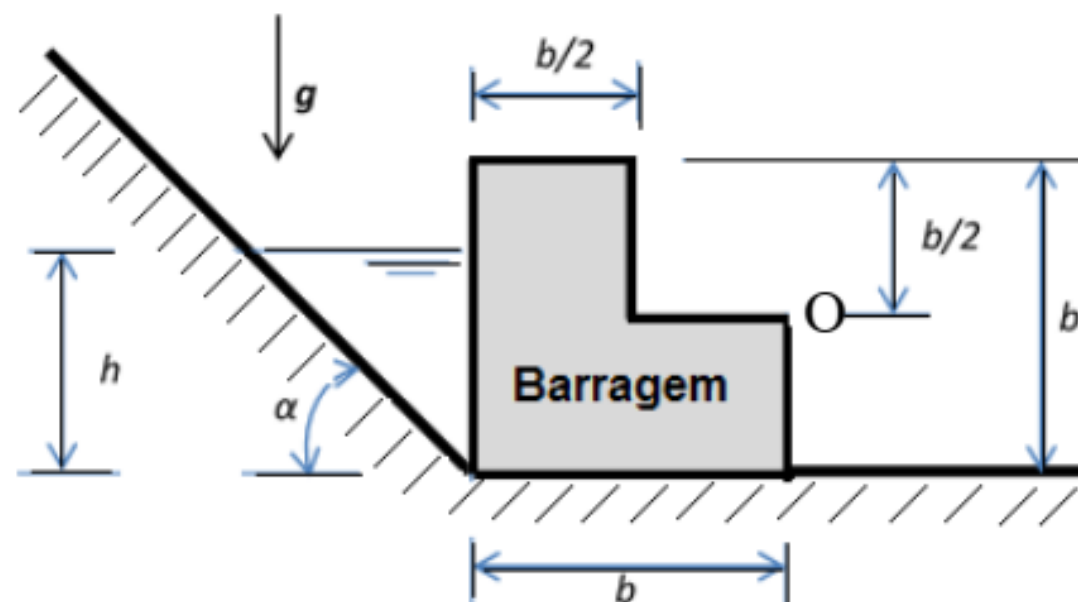
Portanto, excluindo-se o caso (c), concluímos que o valor mínimo de  $\mu$  para que o sistema se mantenha em equilíbrio, é:

$$\mu = \left| \frac{4P-Q}{16P+14Q} \right|$$

## Exercício: 2015–P1–Q3

**Questão 3** (3,5 pontos) A figura mostra uma barragem de concreto (homogênea, de densidade  $\rho_B$  e largura  $L$ ) que represa a água (densidade  $\rho_A$ ) acumulada junto a uma encosta. Admitindo que não ocorra infiltração de água sob a barragem e que o coeficiente de atrito estático entre a barragem e o terreno seja  $\mu$ , pede-se:

- Calcular o peso da barragem e a força que a água represada aplica sobre ela;
- Fazer o diagrama de corpo livre da barragem;
- Calcular, em função dos demais parâmetros, a máxima altura  $h$  da água que pode ser acumulada sem afetar o equilíbrio estático da barragem.





## Exercício: 2015–P1–Q3

**Resposta**

a) Peso da barragem:

$$P = \rho_B \cdot \frac{b}{2} \cdot b \cdot l \cdot g + \rho_B \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot l \cdot g = \frac{3}{4} \rho_B b^2 l g \quad (0,5)$$

Resultante das forças de pressão de água:

$$R = \frac{1}{2} \rho_A \cdot g \cdot h^2 \cdot l \quad (0,5)$$

Centro de gravidade da barragem

$$x_G = \frac{\frac{b^2 L}{2} \rho_B \frac{b}{4} + \frac{b^2 L}{4} \rho_B \frac{3b}{4}}{\frac{b^2 L}{2} \rho_B + \frac{b^2 L}{4} \rho_B} = \frac{5b}{12} \quad (0,5)$$

$$y_G = \frac{\frac{b^2 L}{2} \rho_B \frac{b}{2} + \frac{b^2 L}{4} \rho_B \frac{b}{4}}{\frac{3b^2}{4}} = \frac{5b}{12}$$

b) D.C.L da barragem:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H = R$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N = P$$

$$\sum M_{AZ} = 0 \Rightarrow -R \frac{h}{3} - P \frac{5b}{12} + N \cdot d = 0 \quad (0,5)$$

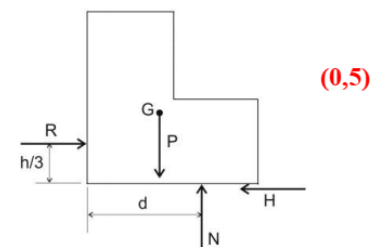
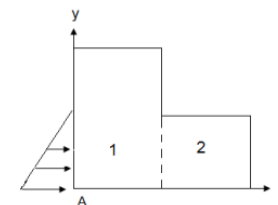
Para a barragem não escorregar:  $H \leq \mu \cdot N$

$$R \leq \mu \cdot P \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \rho_A \cdot g \cdot h \cdot l \leq \mu \cdot \frac{3}{4} \rho_B b^2 l g \quad h^2 \leq \mu \frac{3}{2} \cdot \frac{\rho_B}{\rho_A} \cdot b^2$$

Para a barragem não tombar:  $d \leq b$

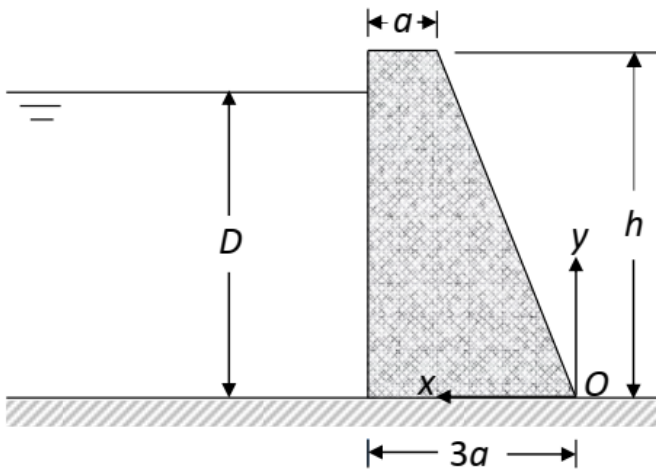
$$b \geq \frac{\frac{1}{2} \rho_A \cdot g \cdot h^3 L + \frac{5bP}{12}}{P} \Rightarrow h^3 \leq \frac{7Pb}{2 \cdot \rho_A \cdot g \cdot L} = \frac{21}{8} \cdot \frac{b^3 \cdot \rho_B}{\rho_A} \quad (1,0)$$

$$h_{max} = b \cdot \min \left\{ \sqrt{\frac{3\mu}{2} \cdot \frac{\rho_B}{\rho_A}}, \sqrt[3]{\frac{21}{8} \cdot \frac{\rho_B}{\rho_A}} \right\}$$



## Exercício: 2014–P1–Q3

### Questão3(3,5 pontos):



- A figura mostra a seção transversal de uma barragem de gravidade projetada para suportar uma lâmina d'água de altura  $D$ . Sabe-se que não há infiltração de água entre o solo e a barragem. São dados os pesos por unidade de volume da água,  $\gamma_a$ , e do material da barragem,  $\gamma_c$ . É dada, também, a largura  $L$  da barragem (perpendicular ao plano da figura). Pedem-se:
- a posição do centro de massa da barragem em relação ao sistema  $Oxy$  indicado;
  - a resultante das pressões hidrostáticas sobre a barragem;
  - a posição do centro dessas pressões, em relação ao sistema  $Oxy$  indicado;
  - o mínimo valor que deve ter a dimensão  $a$  da barragem para que ela não escorregue, sabendo que o coeficiente de atrito entre a barragem e o solo é  $\mu$ ;
  - o mínimo valor que deve ter a dimensão  $a$  da barragem para que ela não tombe.



## Exercício: 2014–P1–Q3

$$a) \quad x_G = \frac{ah\left(2a + \frac{a}{2}\right) + \frac{1}{2}2ah\frac{2}{3}2a}{ah + \frac{1}{2}2ah} \Rightarrow x_G = \frac{23}{12}a \quad (0,5)$$

$$y_G = \frac{ah\frac{h}{2} + \frac{1}{2}2ah\frac{1}{3}h}{ah + \frac{1}{2}2ah} \Rightarrow y_G = \frac{5}{12}h \quad (0,5)$$

$$b) \quad R = \frac{1}{2}\gamma_a D^2 L \quad (0,5)$$

$$c) \quad x_c = 3a; \quad y_c = \frac{D}{3} \quad (0,5)$$

$$d) \quad R \leq \mu P; \quad P = 2 ahL\gamma_c \Rightarrow \frac{1}{2}\gamma_a D^2 L \leq \mu 2 ahL\gamma_c \Rightarrow a_{min} = \frac{1}{\mu} \frac{\gamma_a D^2}{\gamma_c 4h} \quad (0,5)$$

$$e) \quad P x_G \geq R y_c \Rightarrow 2 ahL\gamma_c \frac{23}{12}a \geq \frac{1}{2}\gamma_a D^2 L \frac{D}{3} \Rightarrow a_{min} = \sqrt{\frac{\gamma_a D^3}{23\gamma_c h}} \quad (0,5: DCL) + (0,5: resposta)$$





## □ Referências

1. Merian J.L., Kraige L.G., Bolton, J.N. **Engineering Mechanics – Vol. 1 Statics**, 9<sup>th</sup> edition, John Wiley & Sons, Inc. 2018.
2. Hibbeler R.C. **Engineering Mechanics – Vol. 1 Statics**, 14<sup>th</sup> edition in SI units, Pearson Education, Inc. 2017.
3. Site: <https://steemit.com/science/@shehzad/friction-and-fluid-friction>
4. Site: <https://www.lfd.eu/gb/lubrication.html>
5. Tenenbaum, R. A. **Fundamentals of Applied Dynamics**, Springer-Verlag New York, Inc. 2004.
6. Site: <https://www.tribonet.org/so-what-is-it-superlubricity/>
7. Site: <http://semesters.in/coulombs-law-of-friction-btech-first-year/>
8. Hanaor D.A.H, Gan Y., Einav I., “Static friction at fractal interfaces”, *Trib. Int.* 93(A):229-238, 2016.
9. Desplanques, Y., “Amontons-Coulomb Friction Laws – A Review of the Original Manuscript”, *SAE Int. J. Mater. Manf.* 8(1):98-103, 2015.