



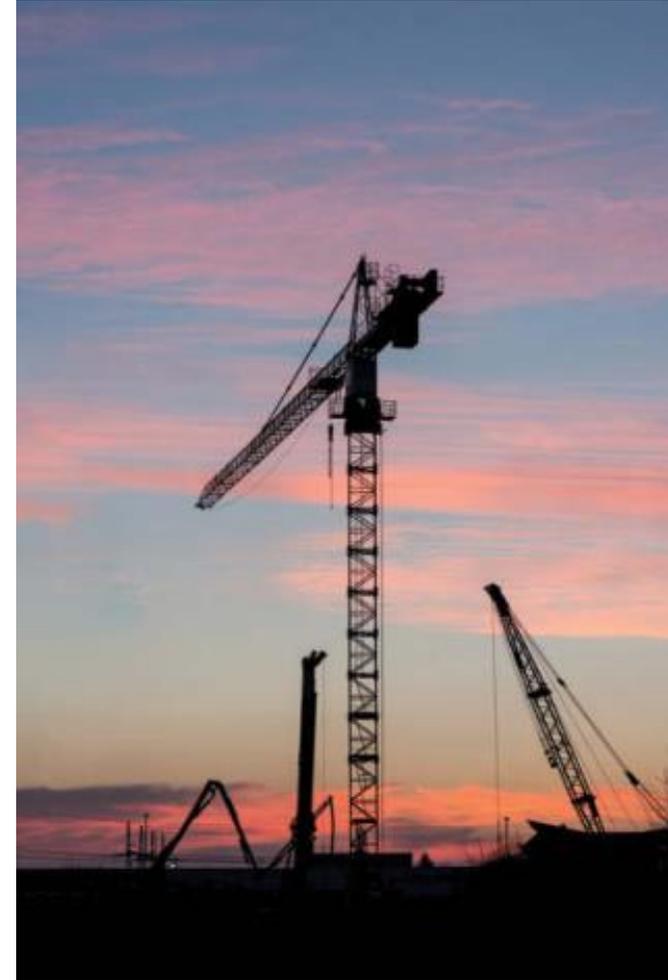
# **PME 3100 – Mecânica I**

## **Estática I** **(Corpos Rígidos e Sistemas)**

Prof. Francisco J. Profito  
[fprofito@usp.br](mailto:fprofito@usp.br)

## ❑ Motivação e Objetivos

- Analisar do comportamento de sistemas estruturais e mecânicos sujeitos a carregamentos e mantidos na condição de **equilíbrio estático**.
- Apresentar os conceitos de forças internas e externas, vínculos, diagramas de corpo livre e sistemas.
- Solução de problemas de equilíbrio estático de sistemas compostos por corpos rígidos, polias, fios, barras articuladas e treliças.
- O objetivo da solução da maioria dos problemas de estática é a determinação dos **esforços reativos** atuantes nos vínculos responsáveis por manter um dado sistema em equilíbrio. O conhecimento de tais esforços é importante para:
  - Dimensionamento de vínculos (e.g. articulações, mancais, etc.);
  - Dimensionamento de componentes estruturais (e.g. barras, vigas, fios, etc.);
  - Determinação dos esforços solicitantes (internos) atuantes em elementos estruturais para a análise de corpos flexíveis (Mecânica dos Sólidos).



*Os conceitos de equilíbrio estático são importante para o projeto de estruturas como os guindastes ilustrados na figura. Fonte [1].*



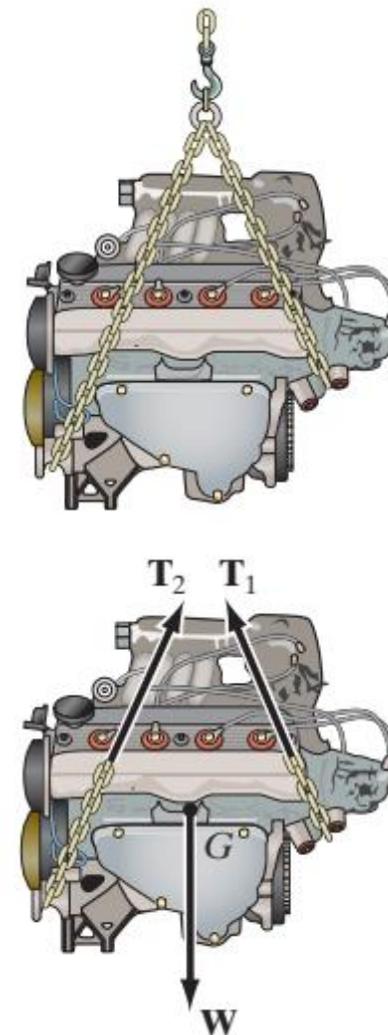
## □ Motivação e Objetivos



*Exemplos de estruturas em que os conceitos de equilíbrio estático são importantes para o projeto de engenharia. Fonte [1].*

## □ Tipos de Esforços

- Dependendo da definição do **sistema** em estudo, dois tipos de esforços são definidos: externos e internos.
- **Esforços externos**: esforços não pertencentes ao **sistema** e associados com a interação do sistema com o meio externo (vínculos, Terra, etc.). Podem ser classificados em dois tipos:
  - **Ativos**: aplicados por elementos externos ao sistema. Geralmente são conhecidos *a priori* para a solução dos problemas (e.g. peso, atuadores, etc.);
  - **Reativos**: transmitidos ao sistema pelos vínculos acoplados ao mesmo. Geralmente são **incógnitas** nos problemas e **dependentes** dos esforços ativos. No caso de equilíbrio estático, são os responsáveis por manter o sistema em equilíbrio.
- **Esforços internos**: esforços associados com a interação entre os componentes do **sistema** (ou partículas de um corpo). Esforços internos **não alteram** a condição ou configuração global do sistema.



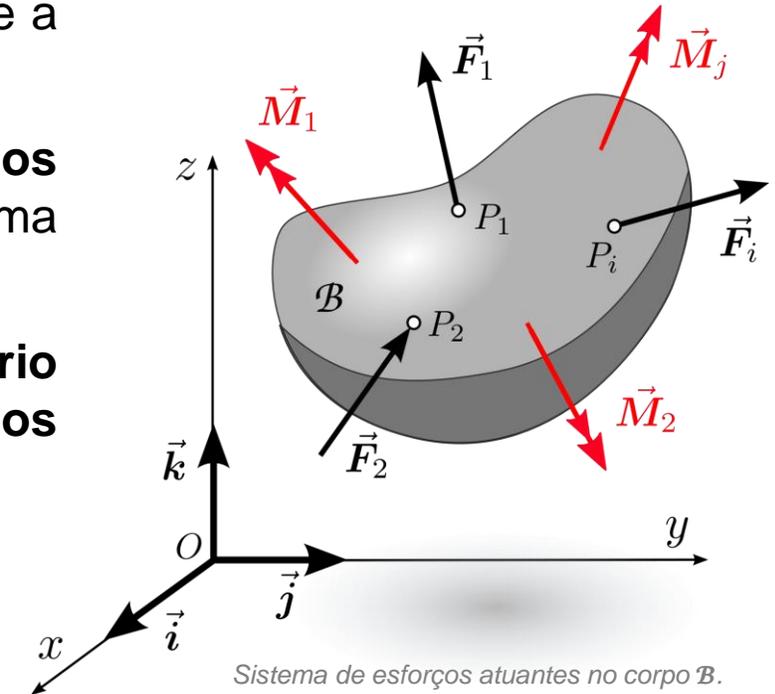
*Motor em elevação. Somente o peso e as forças externas aplicadas pelas correntes são ilustradas no DCL. As forças internas entre as partes do motor (parafusos e porcas, eixos e mancais, etc.) se cancelam mutuamente e não são mostradas no DCL. Fonte: [2]*

## □ Equilíbrio Estático de um Corpo Rígido

- Um dado corpo rígido  $\mathcal{B}$  encontra-se em equilíbrio estático se **todas** as partículas materiais que compõem  $\mathcal{B}$  estão em equilíbrio, ou seja, se a **resultante de todas as forças** atuantes em cada partícula é nula.
- Pelo **Princípio da Ação-e-Reação** (3ª Lei de Newton), os **esforços internos** ao corpo se anulam mutuamente, ou seja, o sistema equivalente de esforços internos é nulo.
- Dessa forma, a condição necessária e suficiente para o **equilíbrio estático** de  $\mathcal{B}$  é que o **sistema equivalente dos esforços externos** atuantes no corpo seja **nulo**. Matematicamente:

$$\vec{R} = \vec{0} \text{ e } \vec{M}_O = \vec{0}, \quad \forall O$$

$$\begin{array}{l}
 \text{6 equações} \\
 \text{(problemas 3D)}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ R_z = 0 \end{array} \right.
 \text{ e }
 \left\{ \begin{array}{l} M_{Ox} = 0 \\ M_{Oy} = 0 \\ M_{Oz} = 0 \end{array} \right.
 \begin{array}{l}
 \text{3 equações} \\
 \text{(problemas 2D)}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ M_{Oz} = 0 \end{array} \right.$$



## Diagrama de Corpo Livre (DCL)

- Para a solução de problemas de estática, é necessária a especificação completa de **todos os esforços externos** (forças e momentos binários) atuantes sobre o corpo (ou sistema) em equilíbrio.
- Tais esforços são representados no Diagrama de Corpo Livre (DCL):
  - O corpo ou sistema é **isolado** de seus vínculos;
  - O efeito da remoção dos vínculos não pode ser desprezado, ou seja, esforços **reativos** devem ser aplicados nos pontos anteriormente ocupados pelos vínculos.
  - O DCL representa um **sistema de esforços equivalente** ao corpo originalmente vinculado.
  - Atenção para a transmissão dos esforços após a remoção dos vínculos (princípio da ação-e-reação)
- **Apenas esforços externos são representados no DCL (esforços internos se anulam mutuamente).**

SAMPLE FREE-BODY DIAGRAMS	
Mechanical System	Free-Body Diagram of Isolated Body
<p>1. Plane truss</p> <p>Weight of truss assumed negligible compared with <math>P</math></p>	
<p>2. Cantilever beam</p>	
<p>3. Beam</p> <p>Smooth surface contact at A. Mass <math>m</math></p>	
<p>4. Rigid system of interconnected bodies analyzed as a single unit</p> <p>Weight of mechanism neglected</p>	

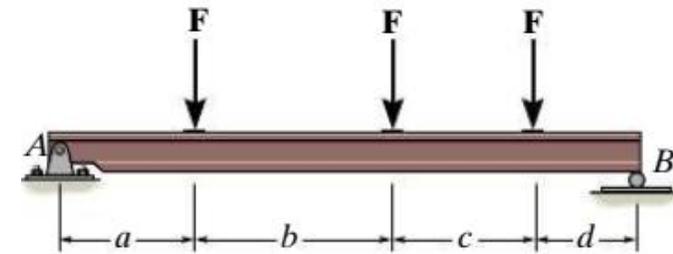
Exemplos de diagramas de corpo livre. Fonte: [1]

## □ Vínculos

- Vínculos são elementos que **restringem** o movimento livre de um dado corpo (ou sistema) no espaço, ou seja, **reduzem** os graus de liberdade (GLs) do mesmo.
- As restrições de movimento impostas por um vínculo ocorrem devido à aplicação de **esforços reativos nos sentidos opostos à tendência de movimento** dos pontos vinculados.
- Os valores dos **esforços reativos** são, em geral, **desconhecidos** (incógnitas do problema).
- No caso de equilíbrio estático, os vínculos são os elementos responsáveis por restringir **totalmente** o movimento de um dado corpo (ou sistema).
- Geralmente, vínculos são aplicados em pontos específicos do corpo (ou sistema).

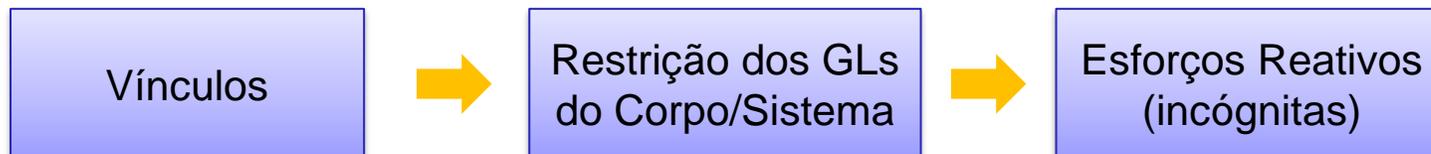


(a)



(b)

Exemplo de uma viga bi-apoiada por uma articulação (A) e um apoio simples (B). Fonte: [2]

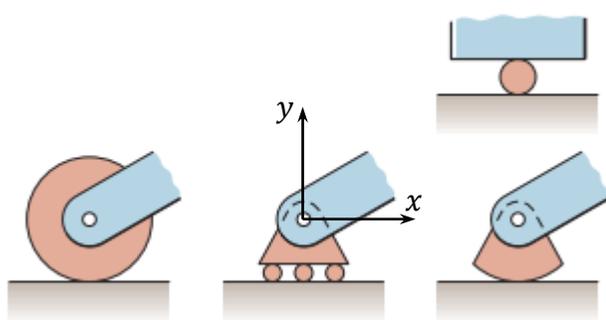


## □ Vínculos

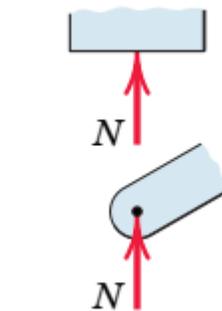
- **Apoio Simples:** restringe o movimento de **translação** do ponto vinculado na direção normal de compressão do vínculo (todas as rotações são permitidas).

### Problemas 2D

- Restringe 1 GL (translação) do ponto vinculado;
- Impõe **uma componente** de força de reação no ponto vinculado na direção normal de compressão do vínculo;
- Adiciona **uma incógnita** ao problema (componente de força de reação).



Origem da força de reação.

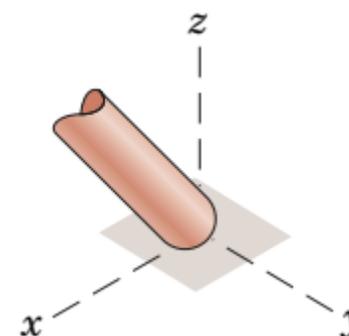


Ação no corpo isolado.

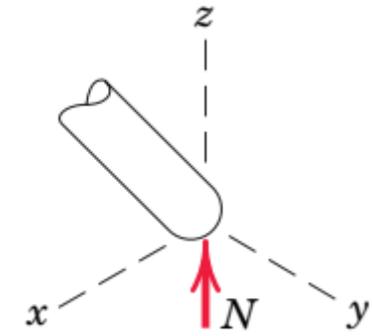
Representação de apoio simples em problemas 2D. Fonte: [1]

### Problemas 3D

- Restringe 1 GL (translação) do ponto vinculado;
- Impõe **uma componente** de força de reação no ponto vinculado na direção normal de compressão do vínculo;
- Adiciona **uma incógnita** ao problema (componente de força de reação).



Origem da força de reação.



Ação no corpo isolado.

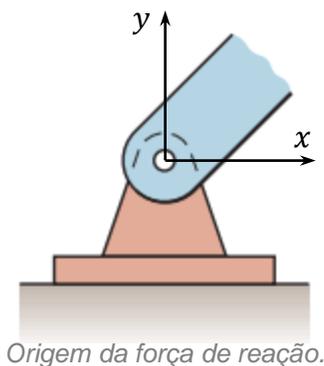
Representação de apoio simples em problemas 3D. Fonte: [1]

## □ Vínculos

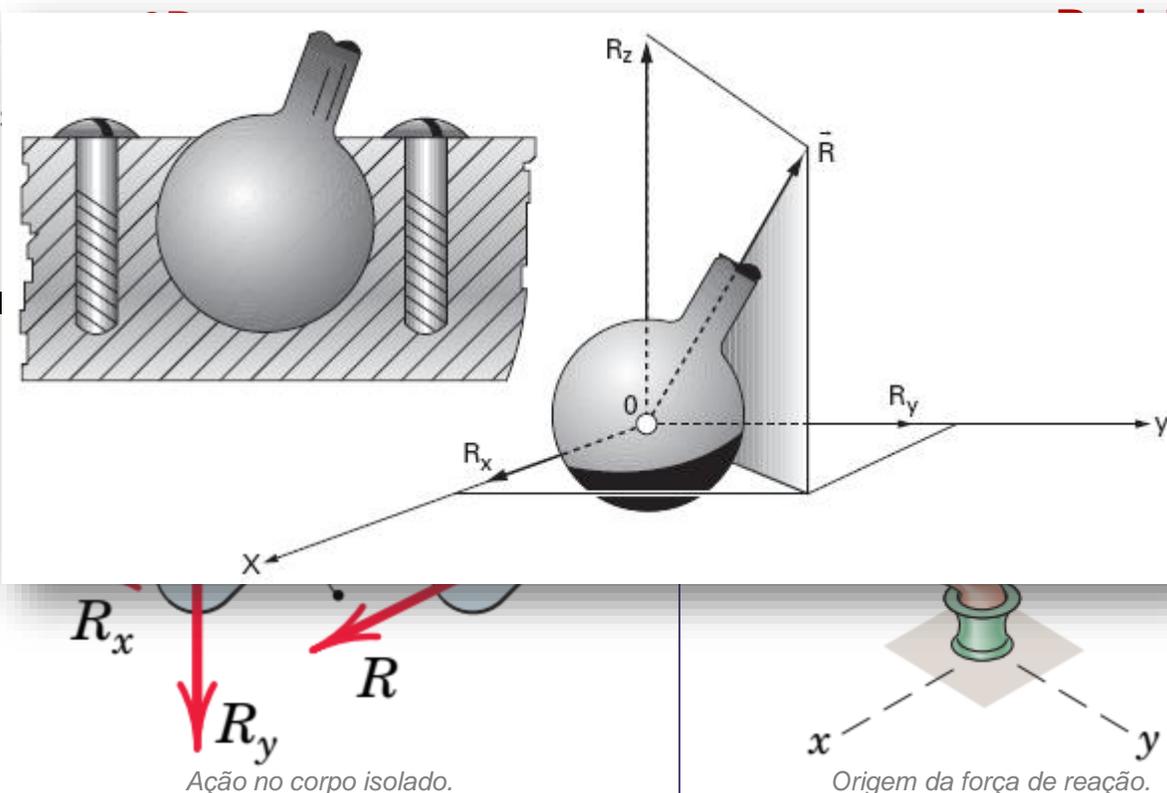
- **Articulação:** restringe **todos** os movimentos de **translação** do ponto vinculado (todas as rotações são permitidas).

### Problemas 2D

- Restringe 2 GLs (translação)
- Impõe **duas** componentes de força de reação no ponto vinculado;
- Adiciona **duas** incógnitas ao problema (componentes de força de reação)



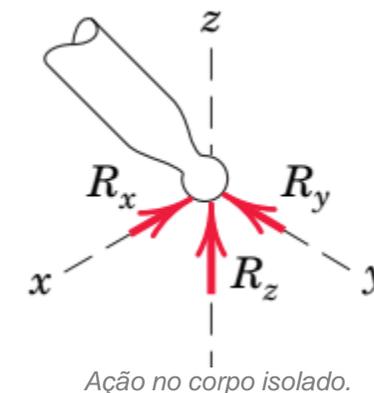
Representação de articulação em problemas 2D. Fonte: [1]



Representação de articulação em problemas 3D. Fonte: [1]

### Problemas 3D

- Restringe 3 GLs (translação) do ponto vinculado;
- Impõe **três** componentes de força de reação no ponto vinculado;
- Adiciona **três** incógnitas ao problema (componentes de força de reação)

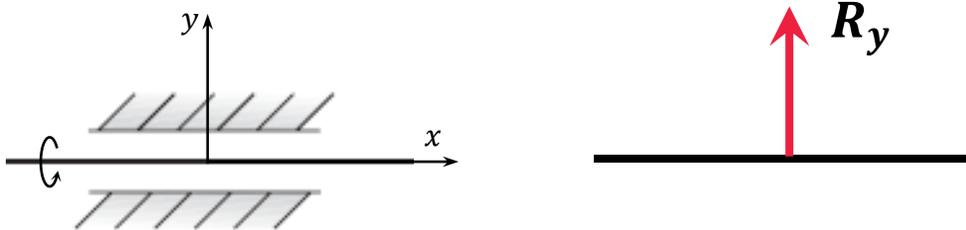


## □ Vínculos

- **Anel Simples (ou guia):** restringe os movimentos de **translação** nas **direções perpendiculares** ao eixo de rotação do vínculo (todas as rotações são permitidas).

### Problemas 2D

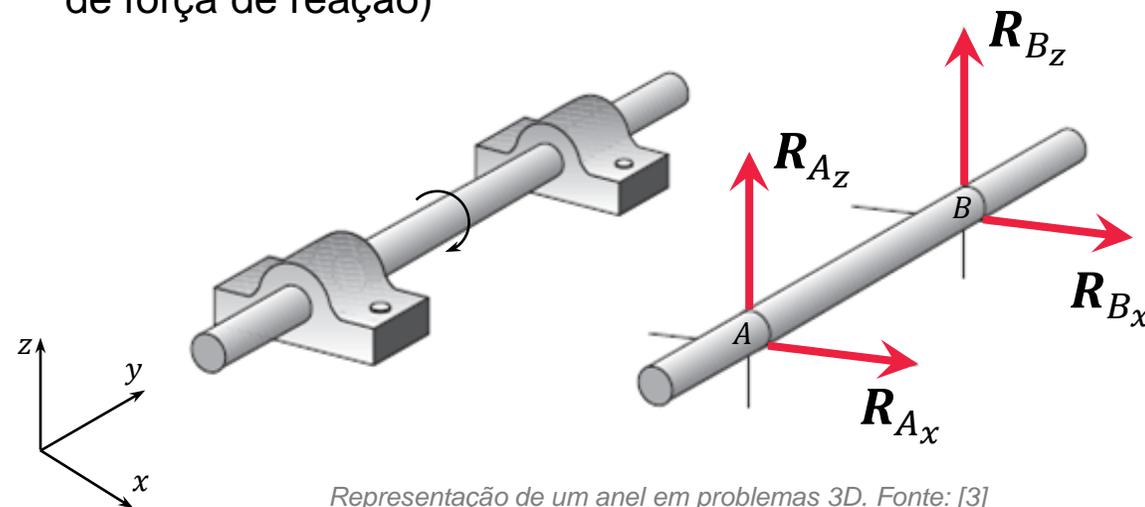
- Restringe 1 GL (translação) do ponto vinculado;
- Impõe **uma componente** de força de reação no ponto vinculado;
- Adiciona **uma incógnita** ao problema (componente de força de reação)



Representação de um anel em problemas 3D. Fonte: [3]

### Problemas 3D

- Restringe 2 GLs (translação) do ponto vinculado;
- Impõe **duas componentes** de força de reação no ponto vinculado;
- Adiciona **duas incógnitas** ao problema (componentes de força de reação)



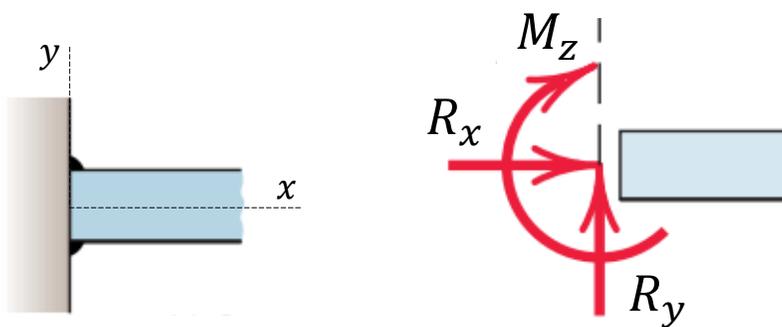
Representação de um anel em problemas 3D. Fonte: [3]

## □ Vínculos

- **Engastamento:** restringe **todos** os movimentos de **translação e rotação** do ponto vinculado.

### Problemas 2D

- Restringe 3 GLs (2 translações + 1 rotação) do ponto vinculado;
- Impõe **três componentes** de esforços de reação no ponto vinculado (2 componentes de força + 1 componente de momento);
- Adiciona **três incógnitas** ao problema (componentes de esforços de reação).



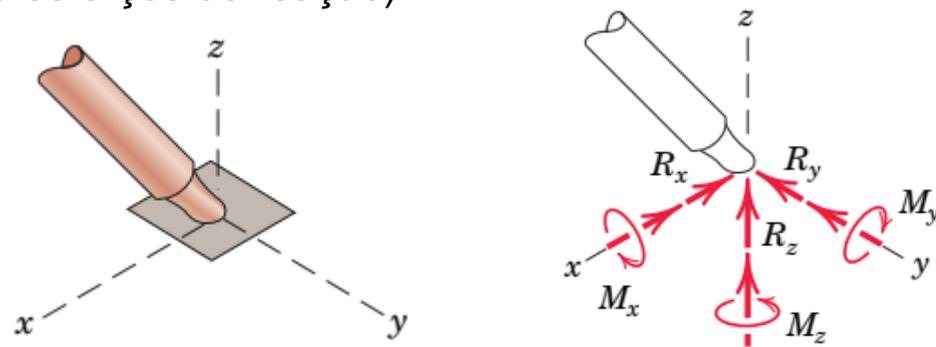
Origem da força de reação.

Ação no corpo isolado.

Representação de engastamento em problemas 2D. Fonte: [1]

### Problemas 3D

- Restringe 6 GLs (3 translações + 3 rotação) do ponto vinculado;
- Impõe **seis componentes** de esforços de reação no ponto vinculado (3 componentes de força + 3 componentes de momento);
- Adiciona **seis incógnitas** ao problema (componentes de esforços de reação).



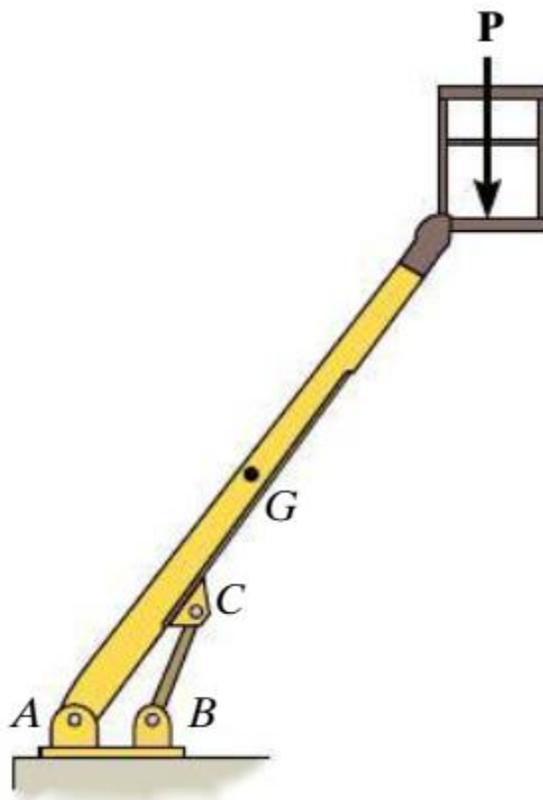
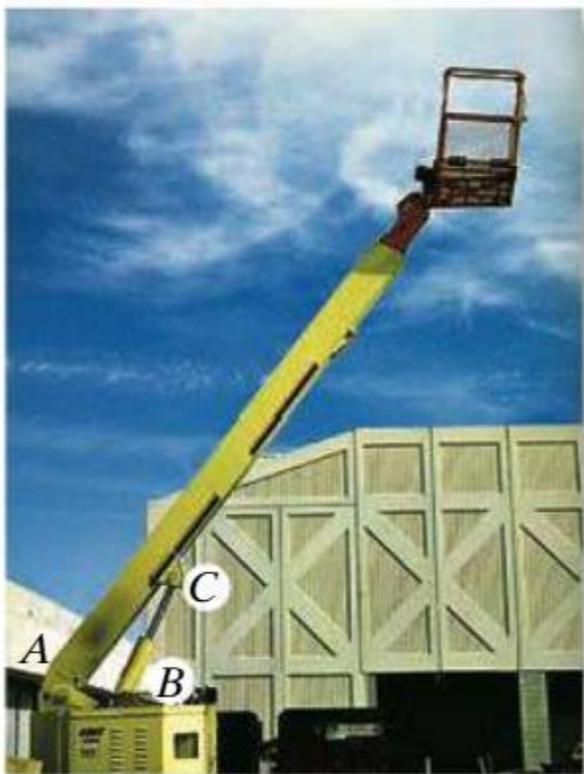
Origem da força de reação.

Ação no corpo isolado.

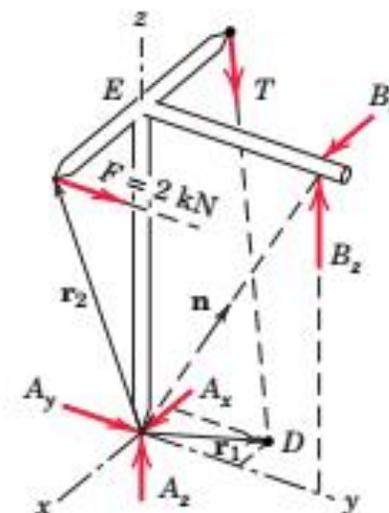
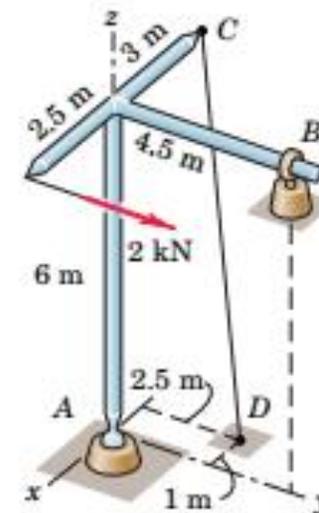
Representação de engastamento em problemas 3D. Fonte: [1]

## □ Vínculos

### ➤ Exemplo: Lança de Elevação



Exemplo da aplicação de vínculos. Fonte: [1,2]

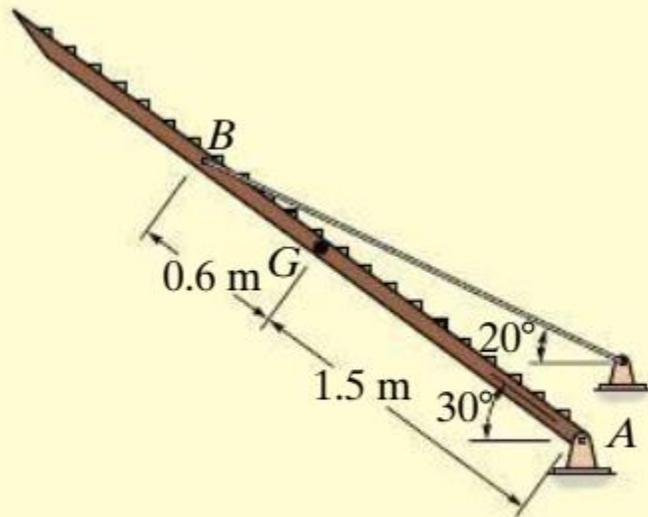


## □ Vínculos

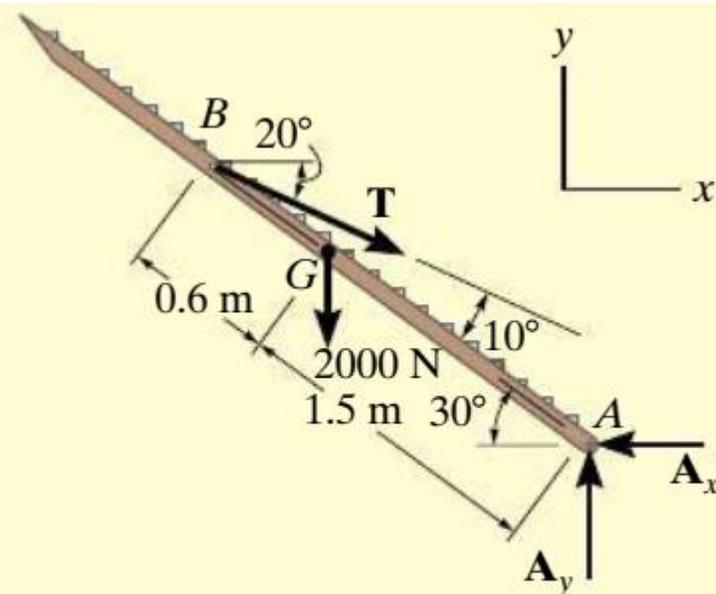
### ➤ Exemplo: Rampa de Caminhão



(a)



(b)



(c)

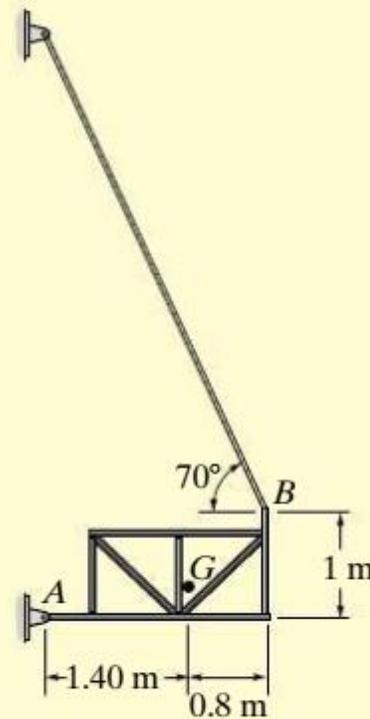
Exemplo da aplicação de vínculos. Fonte: [1]

## □ Vínculos

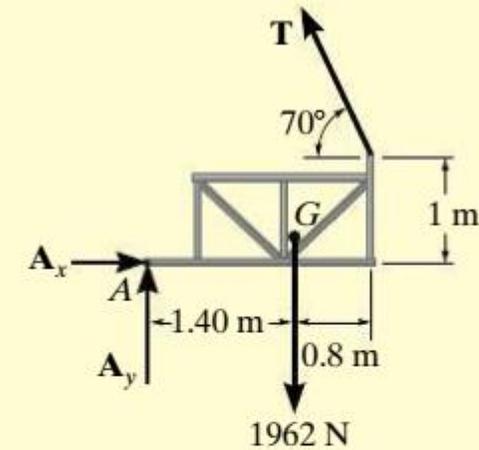
### ➤ Exemplo: Plataforma Suspensa



(a)



(b)



(c)

Exemplo da aplicação de vínculos. Fonte: [1]

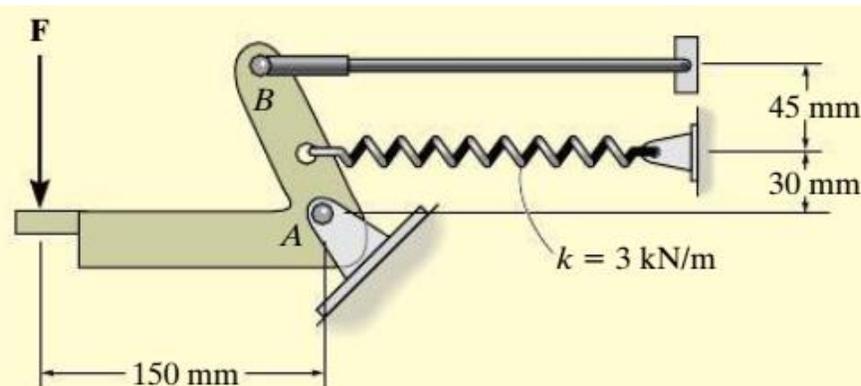
## □ Vínculos

### ➤ Exemplo: Alavanca de Pé

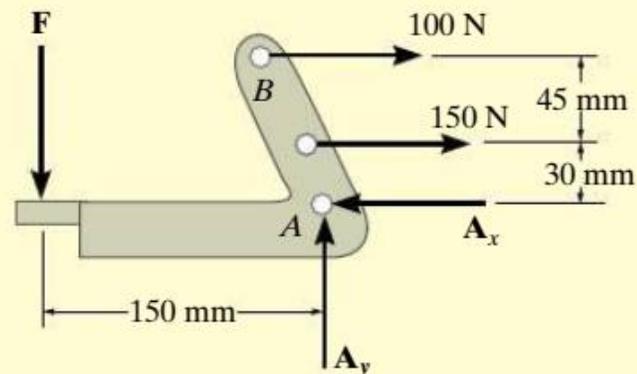


(a)

Exemplo da aplicação de vínculos. Fonte: [1]



(b)

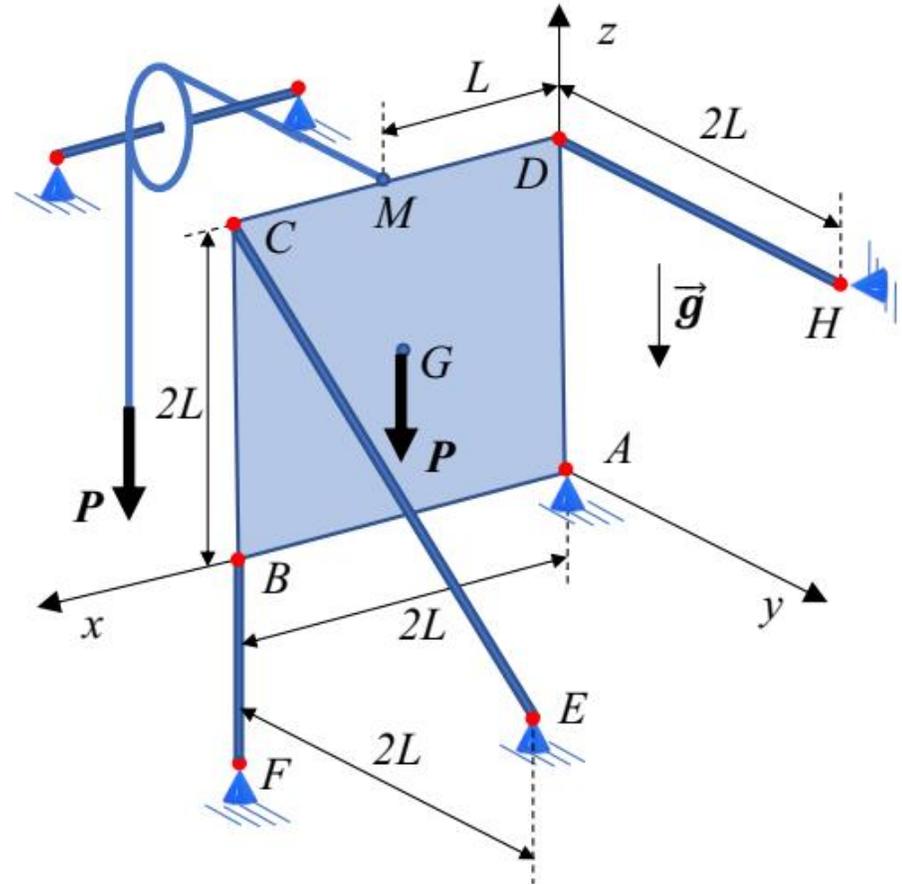


(c)



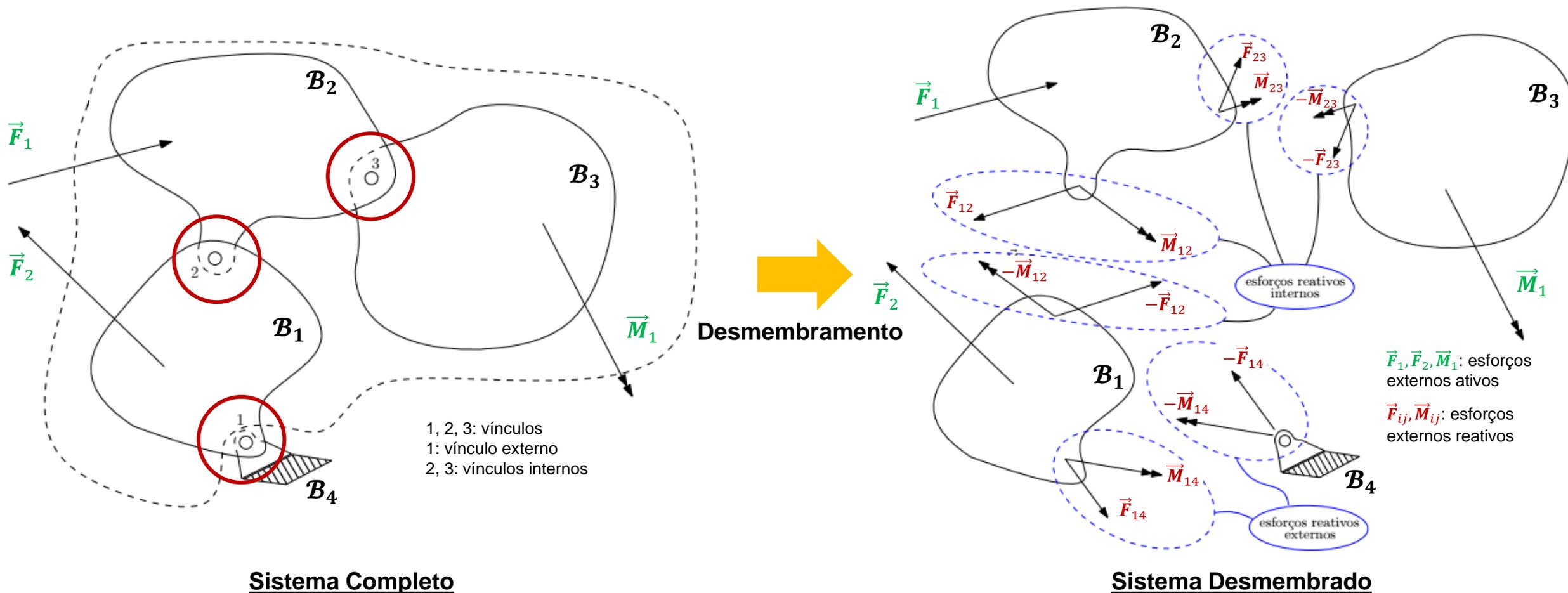
## □ Sistema e Transmissão de Esforços

- Dependendo das características do sistema e das ferramentas de análise disponíveis, duas estratégias de solução podem ser adotadas:
  - Considerar o sistema **completo**;
  - Desmembrar o sistema em subsistemas e tratá-los individualmente;
    - Após o processo de desmembramento, esforços que **eram** internos no sistema original não-desmembrado passam a ser esforços externos nos subsistemas obtidos (transmissão de esforços).
    - O procedimento de **transmissão de esforços** entre os subsistemas desmembrados é baseado no **Princípio da Ação-e-Reação** (3ª Lei de Newton).



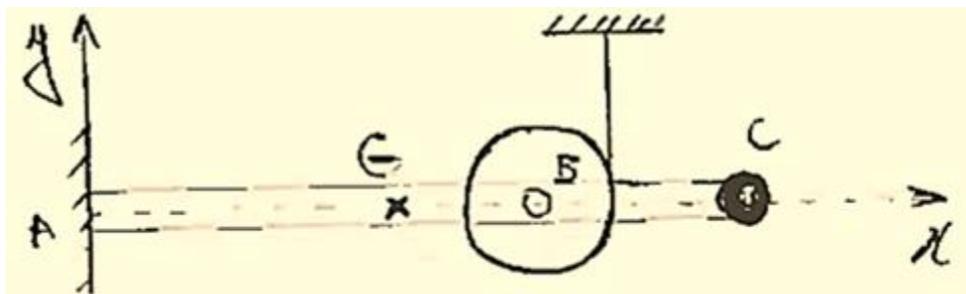
Exemplo de estrutura 3D formada por diversos elementos estruturais.

## ❑ Sistema e Transmissão de Esforços



## ❑ Sistema e Transmissão de Esforços

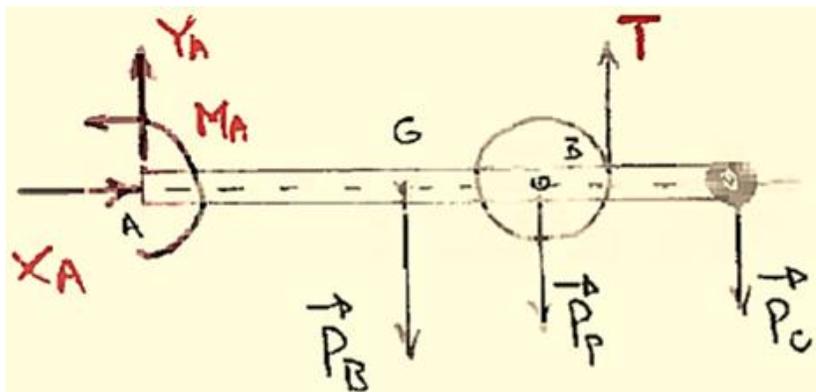
- Após a definição do sistema (e subsistemas desmembrados), a etapa posterior consiste na construção do DCL do sistema (e subsistemas).
- O DCL é construído **isolando** o sistema em estudo (ou subsistemas) e aplicando os **esforços externos** atuantes no sistema. Atenção para a transmissão de esforços internos no caso de desmembramento do sistema.
- Se um sistema está em equilíbrio estático, todos os elementos que compõem o sistema também estão em equilíbrio.
- **Portanto, no caso de desmembramento de um sistema, um conjunto de equações de equilíbrio é obtida para cada subsistema.**
- Considere o exemplo a seguir:



**Sistema:** paredes + barra + polia + fio + massa concentrada

## □ Sistema e Transmissão de Esforços

➤ **DCL** (sistema completo):



▪ **4 incógnitas:** esforços reativos na parede e tração no fio (regiões de desmembramento)

▪ **3 equações:**  $\vec{R} = \vec{0}$  e  $\vec{M}_A = \vec{0}$  (plano xy)

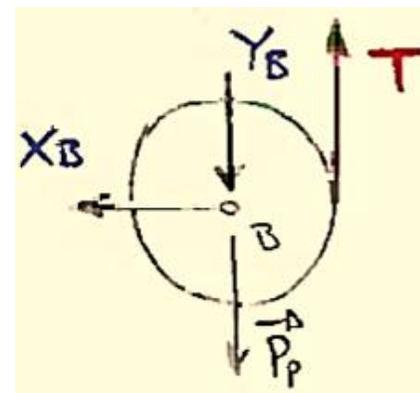
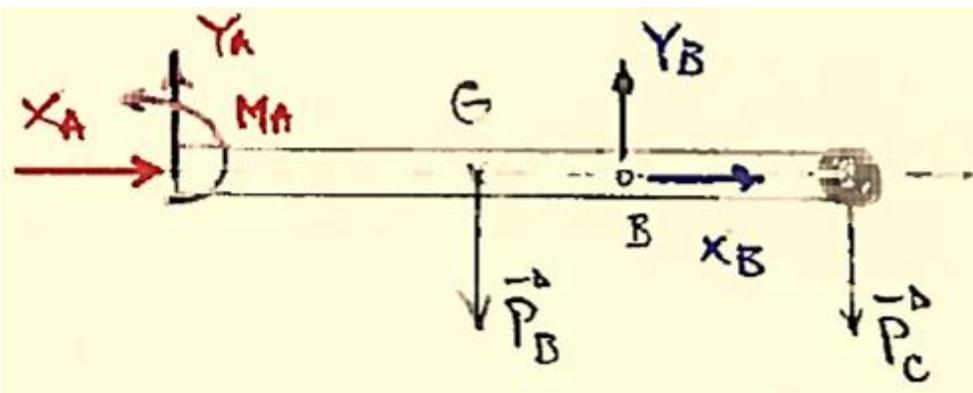
Número de incógnitas

≠

Número de equações



➤ **DCL** (sistema desmembrado):



▪ **6 incógnitas:** esforços reativos na parede, polia e tração no fio (regiões de desmembramento)

▪ **6 equações:**  $\vec{R} = \vec{0}$  e  $\vec{M}_A = \vec{0}$  para a barra + esfera e polia (plano xy)

Número de incógnitas

=

Número de equações





## □ Tipos de Sistemas

- Dependendo do número de equações e do número de incógnitas associadas, um dado problema de estática pode ser de três tipos:

- Sistema Isostático:

$$\text{Número de incógnitas} = \text{Número de equações}$$

**Somente sistemas isostáticos serão considerados nesse curso**

- Sistema Hiperestático:

$$\text{Número de incógnitas} > \text{Número de equações}$$

**Mais** vínculos do que o necessário para manter o sistema em equilíbrio estático

- Sistema Hipoestático:

$$\text{Número de incógnitas} < \text{Número de equações}$$

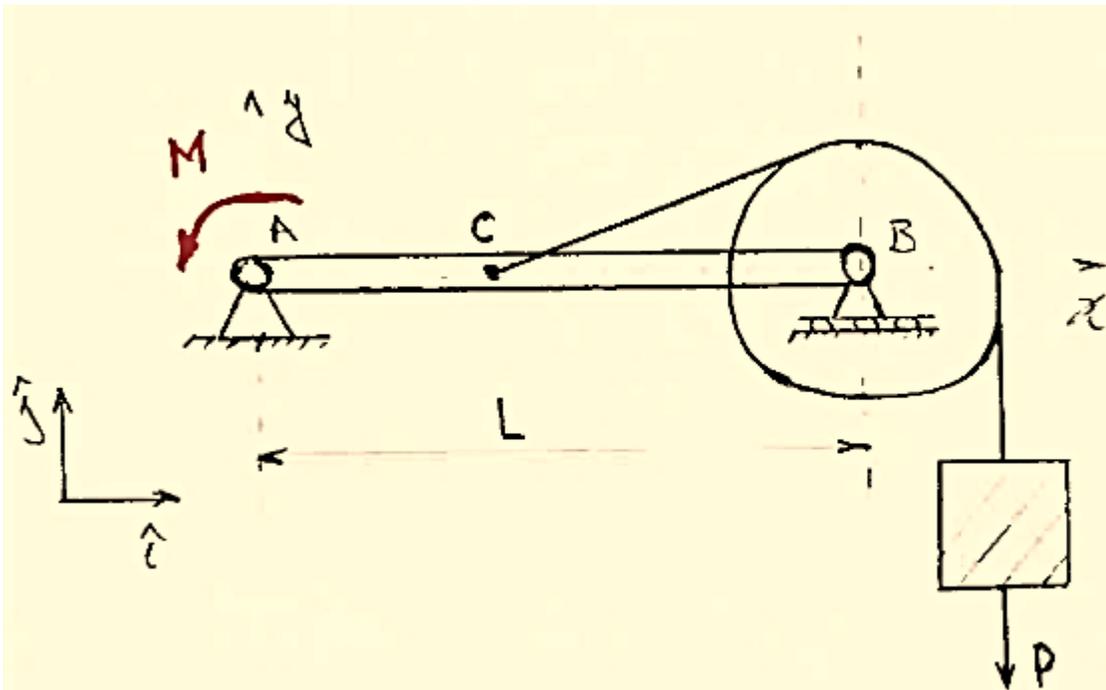
**Menos** vínculos do que o necessário para manter o sistema em equilíbrio estático



## ❑ Solução de Problemas de Equilíbrio Estático

- Para a solução de problemas de equilíbrio estático, o seguinte roteiro pode ser adotado:
  - 1) Identificar claramente o sistema em estudo e os esforços externos ativos aplicados;
  - 2) Verificar a necessidade de desmembramento do sistema em subsistemas ( $N^\circ$  equações =  $N^\circ$  incógnitas); atenção para a transmissão de esforços;
  - 3) Definir o sistema de coordenadas para a localização dos pontos e representação dos vetores (forças, momentos, etc.);
  - 4) Construir o diagrama de corpo livre (DCL) do sistema completo (ou subsistemas), mostrando claramente os **esforços externos** ativos e reativos;
  - 5) Aplicar as equações de equilíbrio estático para o sistema (ou subsistemas);
  - 6) Organizar as equações obtidas em um sistema de equações lineares para as incógnitas do problema (geralmente os esforços reativos).

## Exercício 1



- Barra AB de massa " $m$ " articulada em A e um giro duplo em B.
- Bloco de peso  $P$  preso a uma polia de raio " $R$ " e massa " $2m$ " por meio de um fio ideal.
- Calcular as reações vinulosas.



## Exercício 1 (cont.)

1) Identificar sistema: sistema como um todo ou dimensionamento?

- escrever o sistema de acordo com o número de equações e incógnitas  
(busca sempre mínimo isostático)

- para o sistema como um todo, não se considera os esforços (internos) entre a polia e a barra (não interessa nesta análise, nos procura intuições no caso de dimensionamento do fio).

- sistema como um todo:

2a) (3) incógnitas (reacções)  $\Rightarrow 2$  em A + 1 em B

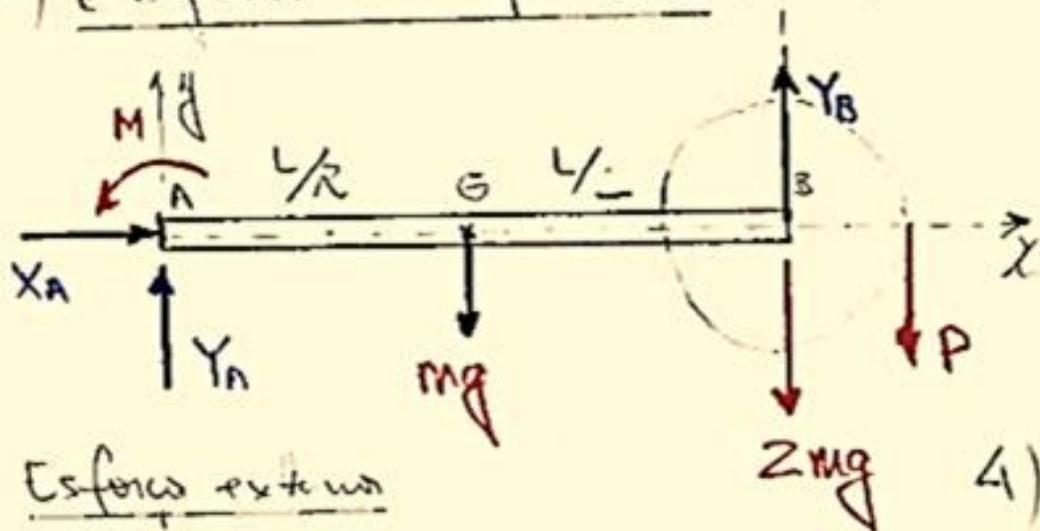
2a) (3) equações de equilíbrio  $\Rightarrow R_x=0, R_y=0, M_g=0$ .

- logo, neste problema, pode-se considerar o sistema como um todo



## Exercício 1 (cont.)

2) Diagrama de Corpo Livre (DCL)



Esforços externos  
Ativos e Reativos

3) Equações de Equilíbrio

$$\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} R_x = 0 : X_A = 0 \\ R_y = 0 : Y_A - 3mg - P + Y_B = 0 \end{array} \right\}$$

$$\vec{M}_A = \vec{0} \Rightarrow M_A = 0 : M - mg \frac{L}{2} - 2mgL - P(L+R) + Y_B L = 0$$

4) Resolvendo sistema linear

$$Y_A + Y_B = P + 3mg \quad \left( Y_B = \frac{-M}{L} + \frac{5mg}{2} + \frac{PR}{L} + P \right)$$

$$\left( Y_A = \frac{M}{L} + \frac{mg}{2} - \frac{PR}{L} \right)$$



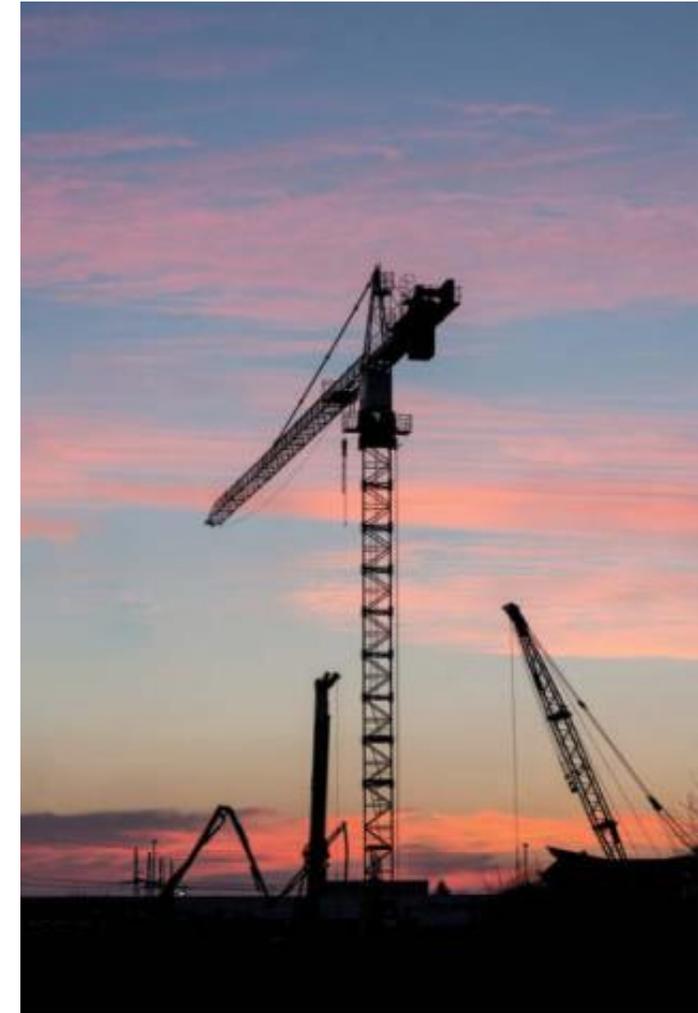
# PME 3100 – Mecânica I

## Estática II (Treliças)

Prof. Francisco J. Profito  
[fprofito@usp.br](mailto:fprofito@usp.br)

## ❑ Motivação e Objetivos

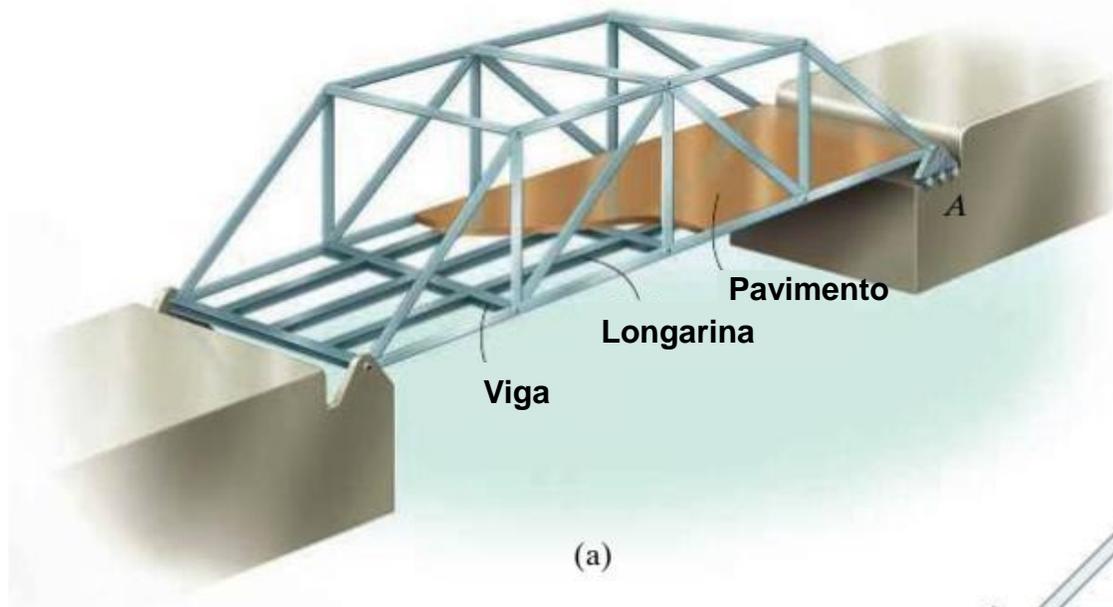
- Aplicar os conceitos de equilíbrio estático para a análise de estruturas compostas por barras interconectadas em suas extremidades por meio de articulações.
- Distinguir barras de treliça de barras biarticuladas genéricas.
- Determinar os **esforços atuantes nos suportes e nas barras** que compõem uma treliça.
- Apresentar os métodos de solução para treliças:
  - Método dos nós;
  - Método das seções.



Exemplos de treliças aplicadas na construção de guindastes e megaestruturas. Fonte [1,2].

## ❑ Motivação e Objetivos

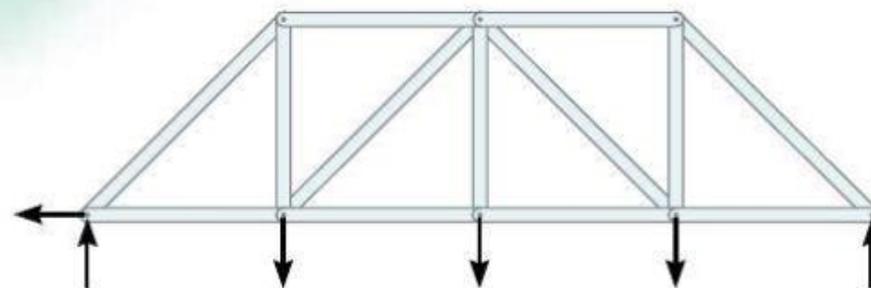
- Treliças são comumente utilizadas em estruturas de pontes e telhados, bem como em construções de plataformas, guindastes e torres de transmissão.



### Transmissão dos carregamentos

Pavimento → Longarinas → Vigas → Articulações das treliças laterais → Vínculos da estrutura

Geralmente um apoio simples é utilizado como vínculo para permitir a acomodação da estrutura no caso de vibrações e dilatações térmicas.



Treliça da Ponte

(b)

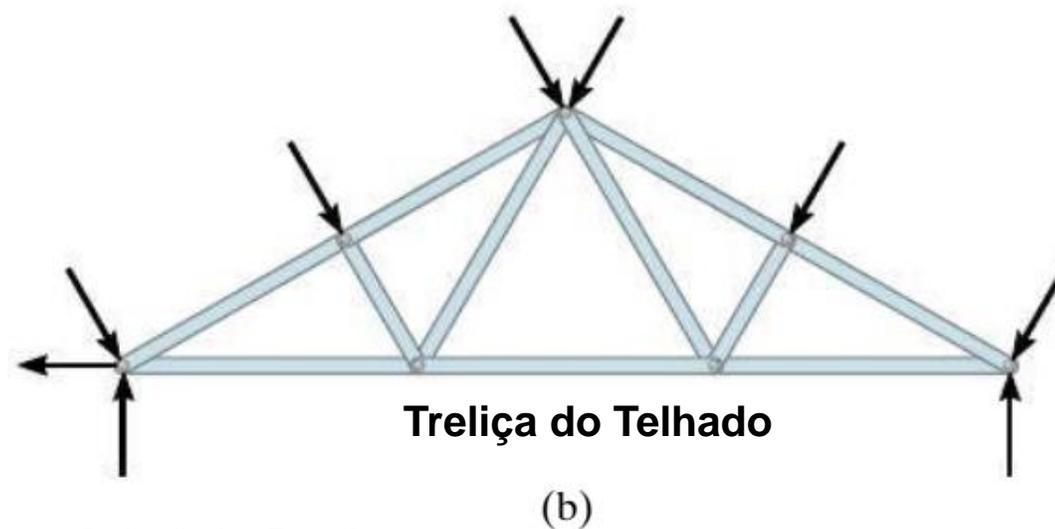
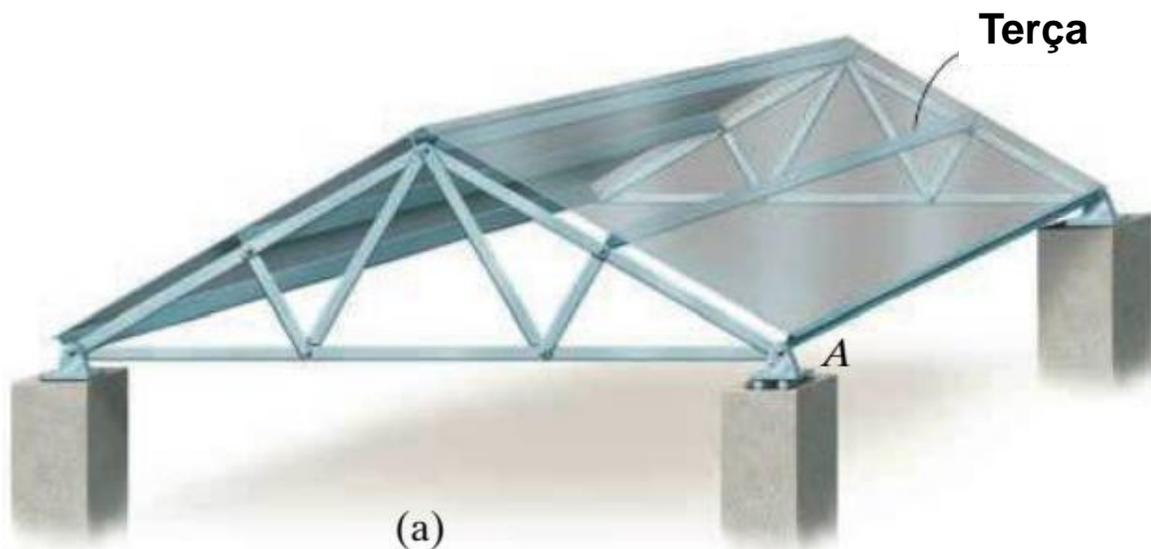
Exemplos de treliças utilizada para a construção de pontes. Fonte [1].

## □ Motivação e Objetivos

- Treliças são comumente utilizadas em estruturas de pontes e telhados, bem como em construções de plataformas, guindastes e torres de transmissão.

### Transmissão dos carregamentos

Telhado → Terças → Articulações das treliças laterais → Vínculos da estrutura



Exemplos de treliças utilizada para a construção de telhados. Fonte [2].

## □ Barras Biarticuladas e Barras de Trelença

➤ Considere o equilíbrio estático de uma barra biarticulada, admitindo as seguintes hipóteses:

- A barra é rígida e de formato genérico;
- A barra é articulada nas extremidades  $A$  e  $B$  (barra desmembrada de uma estrutura);
- Sistema de coordenadas  $Axy$ , tal que o eixo  $Ax$  coincide com a reta que liga as extremidades  $A$  e  $B$  da barra;
- Carregamento lateral  $\vec{P} = (P_x\hat{i} + P_y\hat{j})$  ao longo da barra.

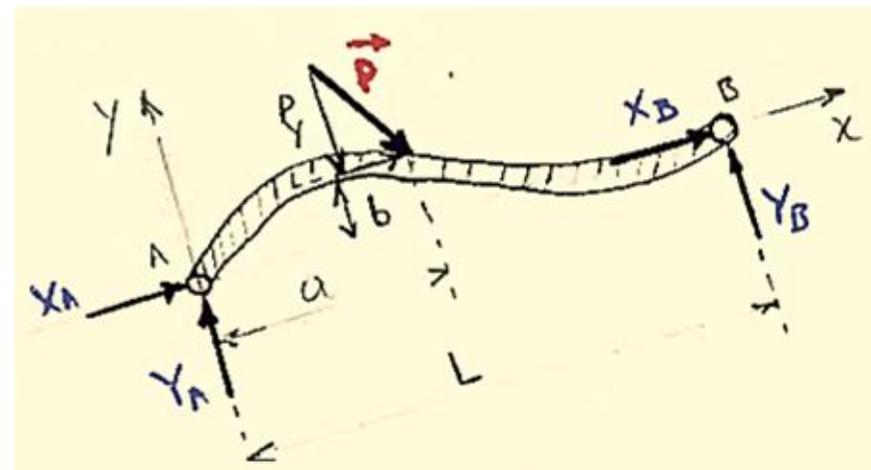


Diagrama de corpo livre de uma barra biarticulada rígida e de formato genérico.

➤ Aplicando as condições de equilíbrio estático à barra, tem-se:

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \vec{0} \\ \vec{M}_A &= \vec{0} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} R_x = X_A + X_B + P_x = 0 \\ R_y = Y_A + Y_B + P_y = 0 \\ M_{Az} = Y_B L - P_y a - P_x b = 0 \end{cases}$$



$$Y_A = P_y - \frac{bP_x + aP_y}{L} ; Y_B = \frac{bP_x + aP_y}{L} ; X_A = -X_B - P_x$$

(Análogo na direção  $z$ )

## □ Barras Biarticuladas e Barras de Treliça

- **Barra de Treliça: caso particular** de barra biarticulada cujos esforços externos aplicados ao longo da barra são **nulos**, ou seja,  $\vec{P} = \vec{0}$ .

- Dessa forma, os esforços nos vínculos são simplificados, como segue:

$$Y_A = Y_B = 0 \ ; \ Z_A = Z_B = 0 \ ; \ X_A = -X_B$$

- No equilíbrio, uma *barra de treliça* é sujeita apenas a forças na sua direção axial (ou longitudinal). Tais esforços podem ser:

- Tração:  $X_A < 0$  e  $X_B > 0$
- Compressão:  $X_A > 0$  e  $X_B < 0$

**Atenção**

Barra de Treliça  $\neq$  Barra Biarticulada

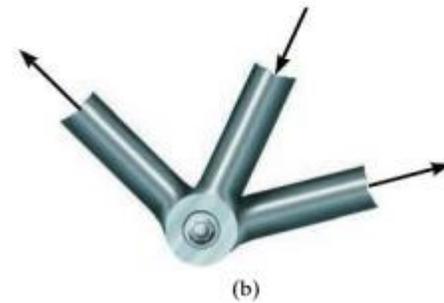
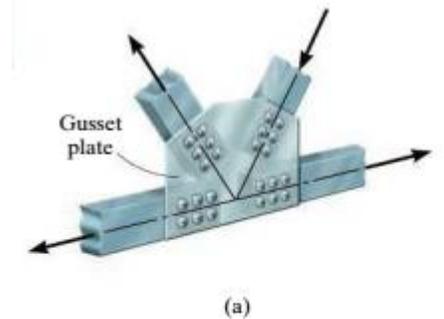
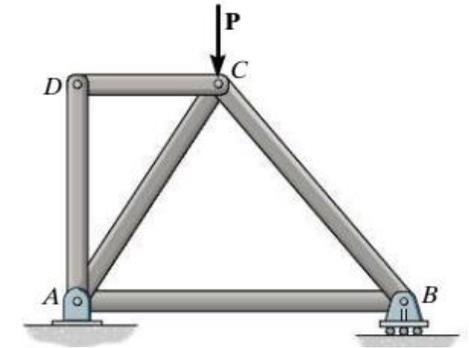


*Barras sujeitas a forças de tração e compressão. Fonte: adaptado de [F2]*

- **Apenas uma única força de reação** está associada a uma barra de treliça (tração ou compressão), geralmente uma incógnita do problema.
- A presença de barras de treliça restringe o número de incógnitas na solução de problemas de equilíbrio estático.

## □ Treliças

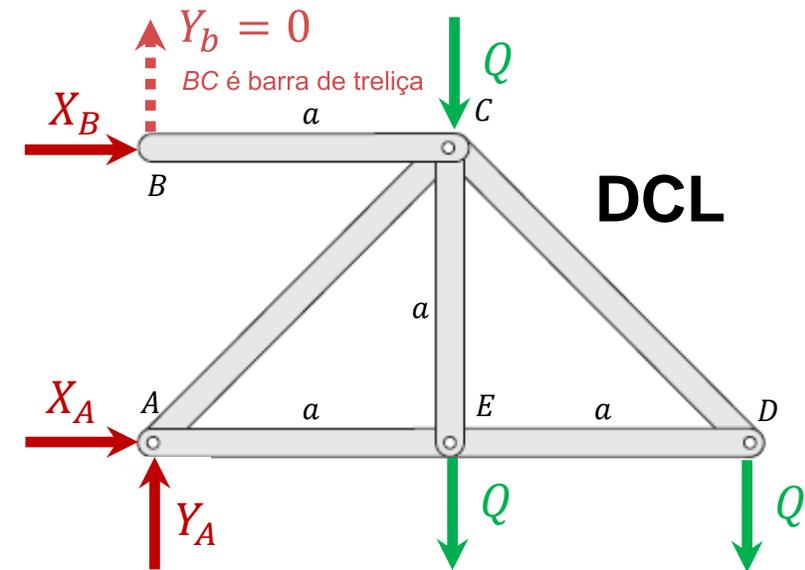
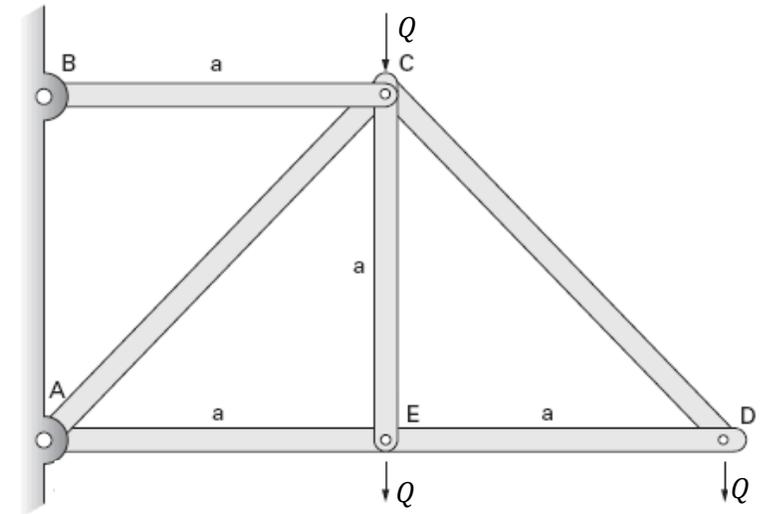
- Treliças são estruturas compostas por barras interconectadas em suas extremidades (barras de treliça) por meio de articulações, também denominadas **nós**.
- Nessas estruturas, admite-se que os carregamentos externos são aplicados diretamente nos nós.
  - Por definição, esforços externos não devem ser aplicados ao longo de barras de treliça.
  - O peso de barras de treliça é geralmente desprezado. Quando se deseja considerá-lo na análise, o peso deve ser distribuído nos nós da estrutura.
- Barras de treliça são interconectadas (nós) por parafusos, pinos ou placas de reforço soldadas ('*gusset plate*').
- Admite-se que essas conexões atuem como articulações correspondentes ao ponto de intersecção das linhas de centro das barras conectadas.



Exemplo de uma treliça simples e dos dispositivos utilizados para a conexão das barras que compõem a estrutura. Fonte: [2]

## ❑ Métodos de Solução

- O objetivo principal da solução de problemas de treliças consiste na determinação dos seguintes esforços:
  - Reações atuantes nos vínculos responsáveis por manter a estrutura em equilíbrio estático;
  - Forças atuantes (tração ou compressão) em cada barra que compõe a estrutura.
- Para a apresentação dos métodos de solução, considere a treliça ao lado.
- Para o cálculo das reações nos vínculos, recomenda-se inicialmente a análise da estrutura completa (sem o desmembramento das barras).
- No exemplo dado, mesmo que sustentada por duas articulações, a estrutura é **isostática**, pois a barra  $BC$  é uma barra de treliça, admitindo esforço apenas na direção horizontal.

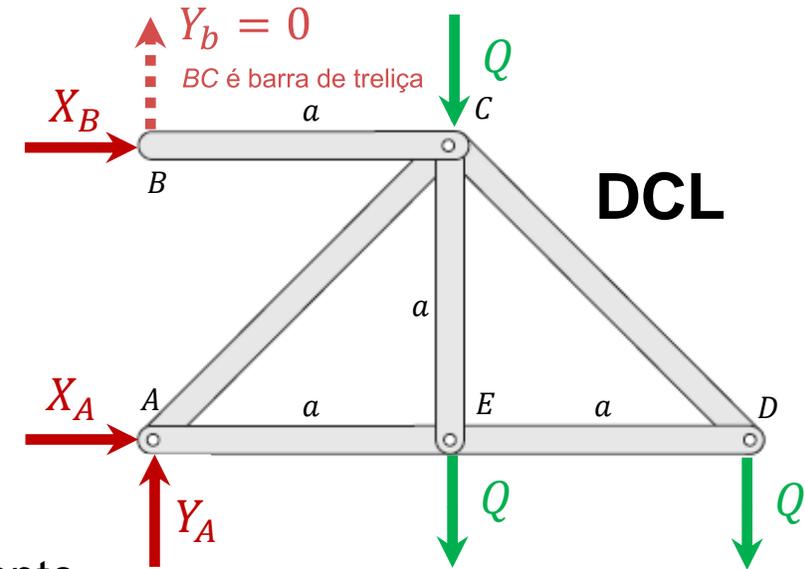


## □ Métodos de Solução

- Aplicando as condições de equilíbrio estático **para a estrutura completa** (ver DCL ao lado), tem-se:

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \vec{0} \\ \vec{M}_A &= \vec{0} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} R_x = X_A + X_B = 0 \\ R_y = Y_A - 3Q = 0 \\ M_{Az} = -X_B a - 2Qa - 2Qa = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_A = 4Q \\ Y_A = 3Q \\ X_B = -4Q \end{cases}$$

- Nem sempre é possível determinar os esforços de reação diretamente considerando o sistema completo. Isso só é possível se o sistema for isostático.
- Número de incógnitas do problema completo:
  - Reações vinculares;
  - 1 incógnita por barra de treliça (força de tração ou compressão);
  - Sempre verificar se número de incógnitas = número de equações



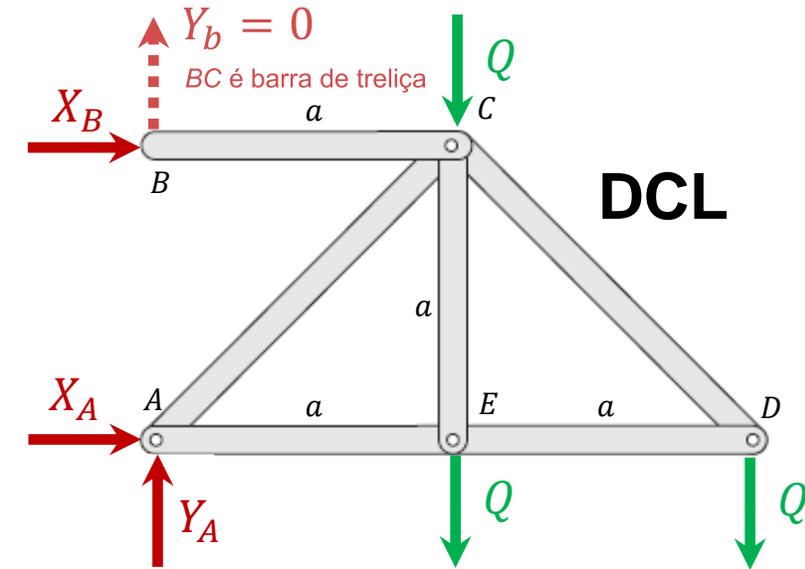
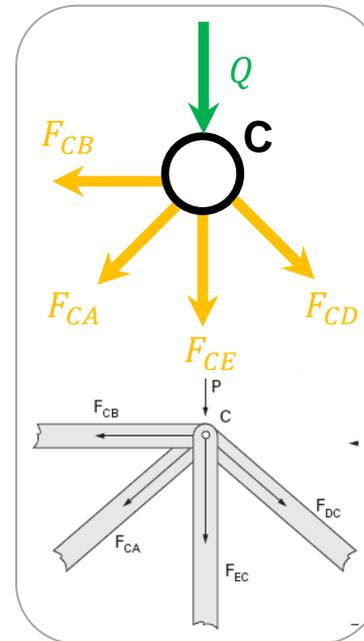
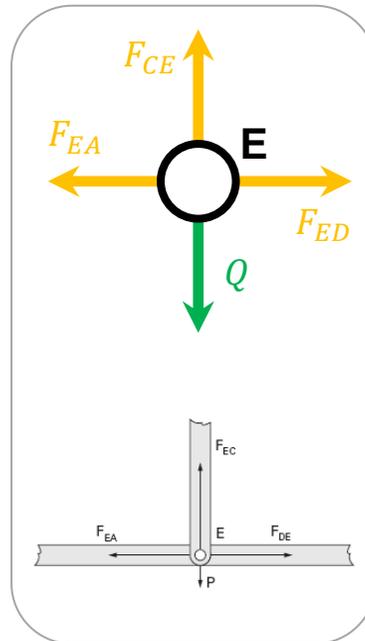
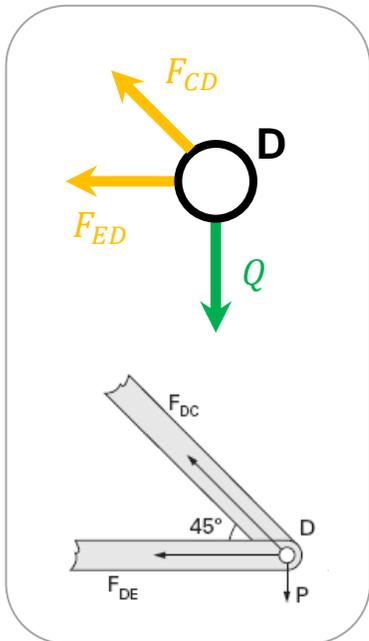
**Para o problema dado:**

4 reações vinculares + 6 forças nas barras  
= 10 incógnitas

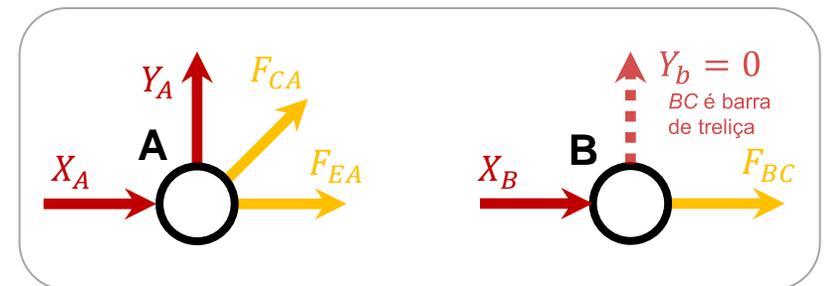
## ❑ Métodos de Solução: Método dos Nós

### ➤ Método dos Nós:

- 1) Desmembrar **completamente** a treliça (nós + barras);
- 2) Construir o DCL de **cada nó**;
- 3) Obter as equações de equilíbrio de **cada nó** (3 equações no espaço; 2 equações no plano).



**Dica:** adotar inicialmente forças de tração nas barras (divergentes nos nós)



## ❑ Métodos de Solução: Método dos Nós

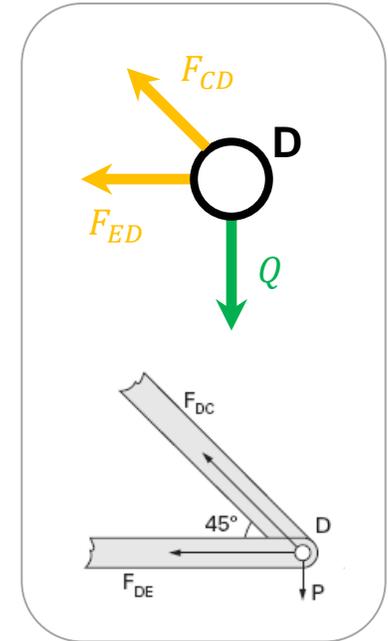
- Após a obtenção das equações de equilíbrio de **cada nó**, recomenda-se iniciar a solução pelo equilíbrio do nó com **menos incógnitas**.
- Para o exemplo dado, considere o **nó D**:

$$\vec{R}_D = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} R_x = -F_{ED} - F_{CD}\cos\alpha = 0 \\ R_y = -Q + F_{CD}\sin\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{ED} = -Q & \text{(compressão)} \\ F_{CD} = \sqrt{2}Q & \text{(tração)} \end{cases}$$

- Procedendo da forma análoga para os outros nós, obtém-se:

$$\begin{cases} X_A = 4Q \\ Y_A = 3Q \\ X_B = -4Q \\ Y_B = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} F_{CE} = Q \\ F_{EA} = -Q \\ F_{CB} = 4Q \\ F_{CA} = -3\sqrt{2}Q \end{cases}$$

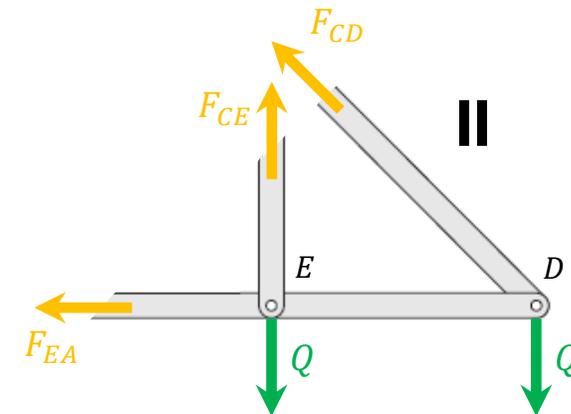
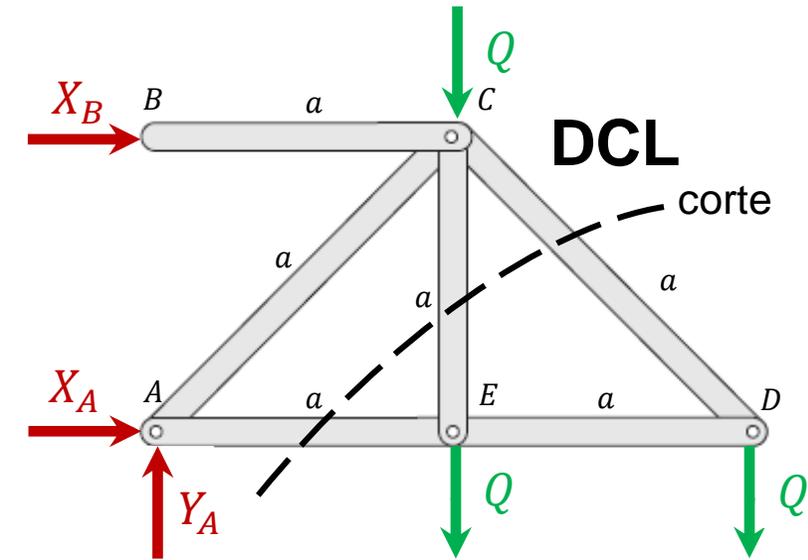
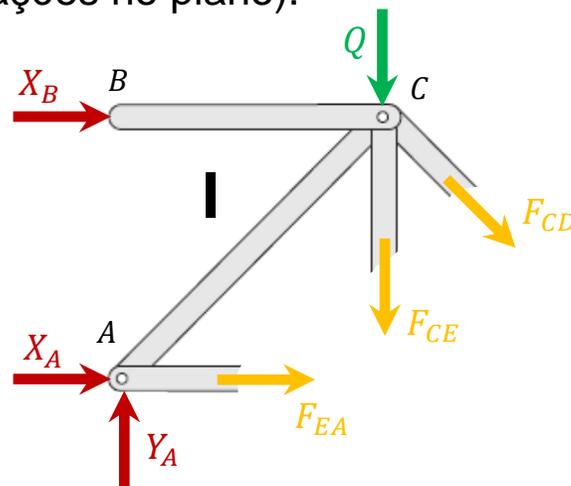
**Confira!**



## ❑ Métodos de Solução: Método das Seções

- **Método das Seções**: adequado para se calcular diretamente as forças atuantes em **barras específicas** da estrutura.
  - 1) Desmembrar a treliça em **duas partes** por meio de um corte que passe por **até três barras**, incluindo naturalmente as barras em que se deseja determinar os esforços.
  - 2) Construir o **DCL** de cada parte desmembrada (atenção para a transmissão dos esforços).
  - 3) Obter as **equações de equilíbrio** de cada parte desmembrada (6 equações no espaço; 3 equações no plano).

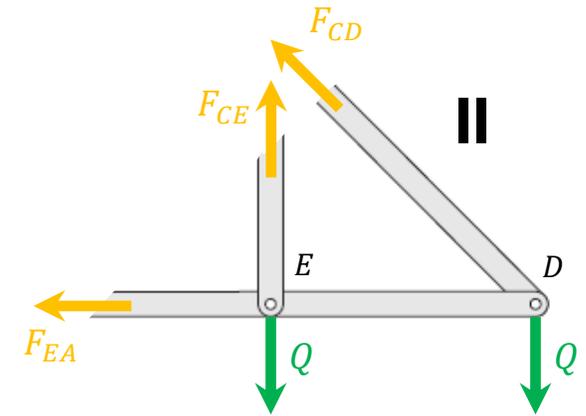
- Para o exemplo dado:



## □ Métodos de Solução: Método das Seções

- Considerando o equilíbrio da parte II:

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \vec{0} \\ \vec{M}_E &= \vec{0} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} R_x = 0 : & -F_{EA} - F_{CD} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ R_y = 0 : & F_{CE} + F_{CD} \frac{\sqrt{2}}{2} - 2Q = 0 \\ M_{Ez} = 0 : & -Qa + F_{CD} \frac{\sqrt{2}}{2} a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{EA} = -Q \\ F_{CE} = Q \\ F_{CD} = \sqrt{2}Q \end{cases}$$

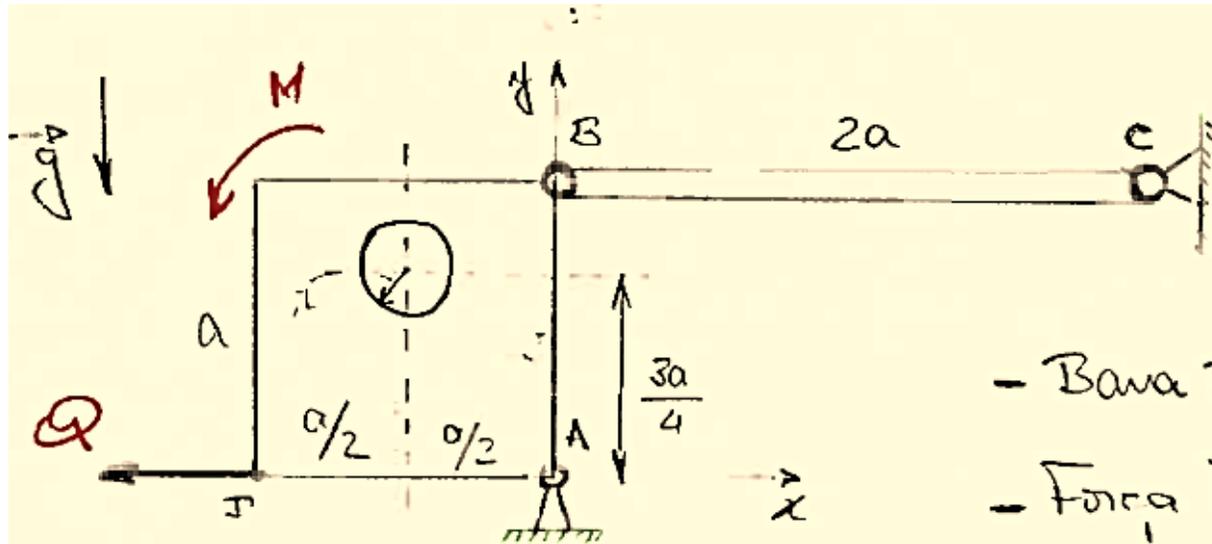


- Os esforços relativos podem ser obtidos a partir do equilíbrio da parte I.

**Confira!**



## Exercício 1



- Placa quadrada homogênea de densidade superficial  $\bar{\sigma}$ , com furo de raio  $r = a/8$

- Barra BC de comprimento '2a' e massa desprezível.
- Força  $\vec{Q}$  e torque  $\vec{M}$  aplicados ao sistema.

- Calcular:

- coordenadas do baricentro da placa.
- novas vínculos.



## Exercício 1 (cont.)

a) Por simetria,  $x_G = -\frac{a}{2}$

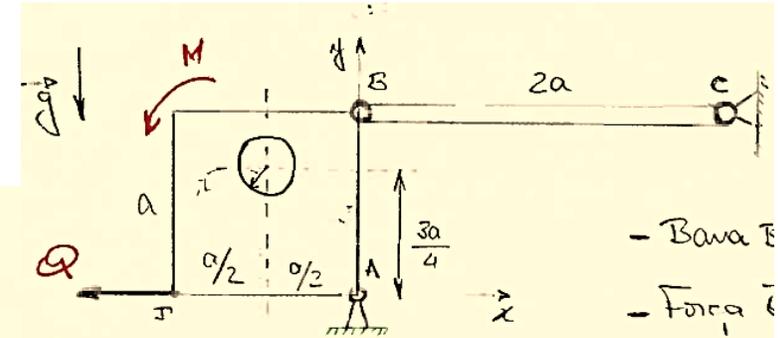
$$(m_1 - m_0) x_G = m_1 \frac{a}{2} - m_0 \frac{3a}{4} \rightarrow \cancel{a^2} (1 - \pi \cdot \frac{1}{64}) x_G = \cancel{a^2} \frac{a}{2} - \frac{\pi}{64} a^2 \cdot \frac{3a}{4}$$

$$(1 - \frac{\pi}{64}) x_G = \frac{a}{2} - \frac{\pi a \cdot 3}{4 \cdot 64} \Rightarrow x_G = \frac{(128 - 3\pi)a}{(256 - 4\pi)}$$



## Exercício 1 (cont.)

b) Considerando o sistema de estruturas proposto.



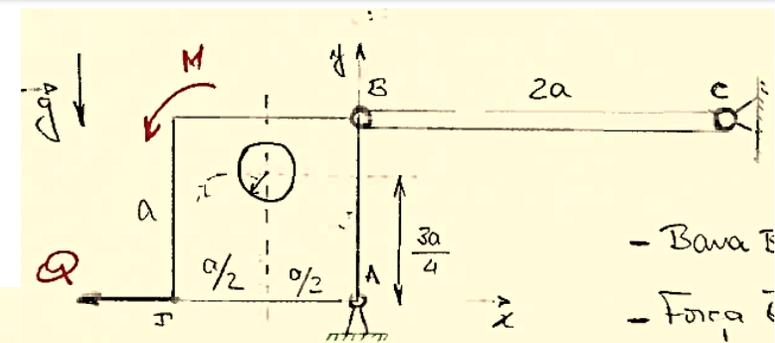
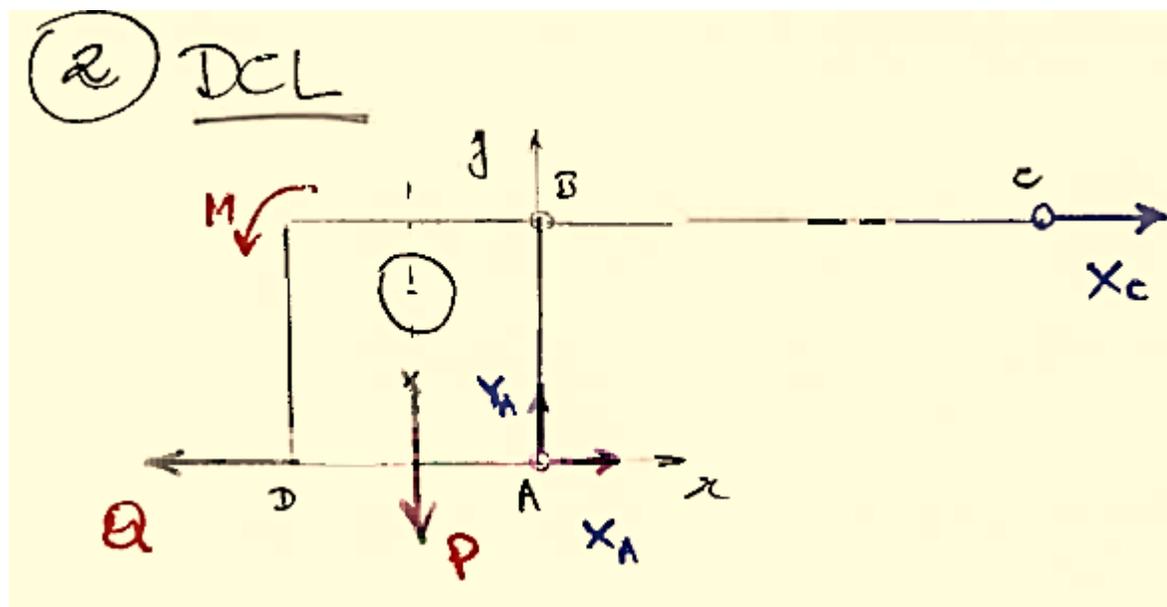
① Identificar o sistema

- Número de reações:
  - Articulação A: 2 (plano)
  - Articulação B: 1 (BC é barra de treliça)

- Logo, o sistema pode ser analisado como um folo, pois foi fornecida 3 equações de equilíbrio. (CAUIDADO, nem sempre possível!) cauidado!



# Exercício 1 (cont.)



Forças Externas

- ativas
- reativas



## Exercício 1 (cont.)

3) Equações de Equilíbrio

$$R_x = 0 : -Q + X_A + X_C = 0 \rightarrow X_A = Q - \frac{M}{a} - \frac{P}{2}$$

$$R_y = 0 : -P + Y_A = 0 \rightarrow Y_A = P$$

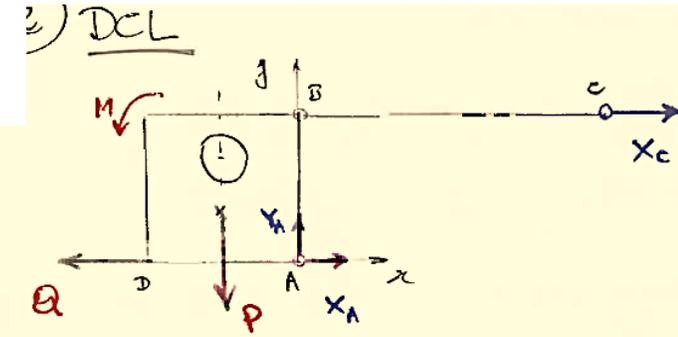
$$M_A^z = 0 : M + \frac{Pa}{2} - X_C a = 0 \rightarrow X_C = \frac{M}{a} + \frac{P}{2}$$

$$Y_C = 0 \quad (\text{BC semo flexão})$$

$$\text{Sendo: } P = Mg = \vec{r}_{Ag} = \vec{r}_{g}(A_g - A_o)$$

$$P = \vec{r}_{g} \left( a^2 - \frac{\pi a^2}{64} \right)$$

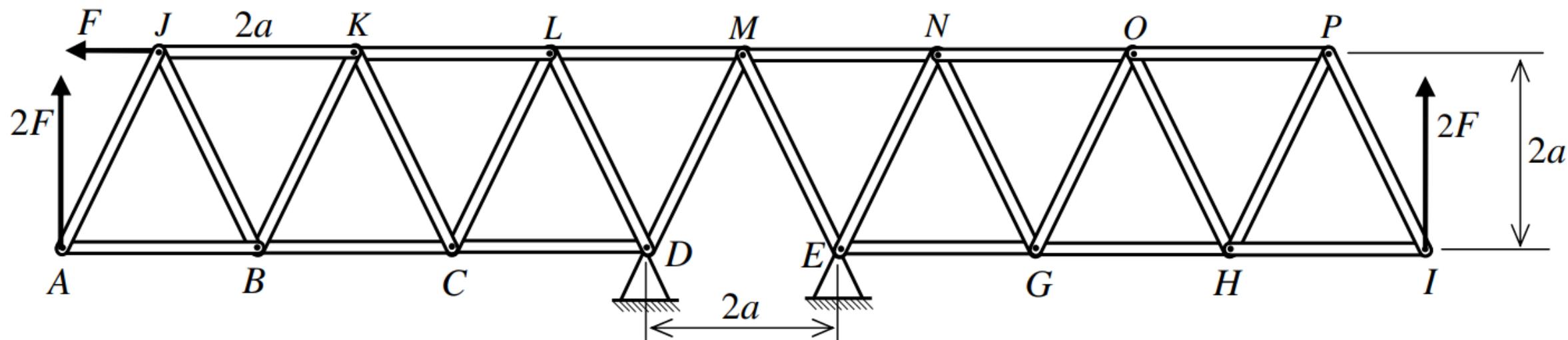
$$P = \frac{\vec{r}_{g} a^2}{64} (64 - \pi)$$



## Exercício 2

2019 – P1 – Q3

**QUESTÃO 3 (3,5 pontos)** – Considere a treliça mostrada na figura, formada por barras de massa desprezível que formam triângulos isósceles de base  $2a$  e altura  $2a$ , e suportada por articulações em  $D$  e  $E$ . Determine, em função de  $F$  e  $a$ , o valor das forças nas barras  $JK$ ,  $LM$  e  $IP$ , indicando se são de tração ou compressão.



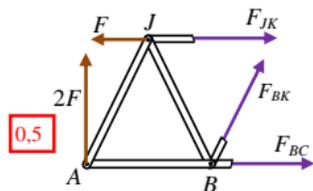


## Exercício 2

2019 – P1 – Q3

**Solução**

Força na barra JK:

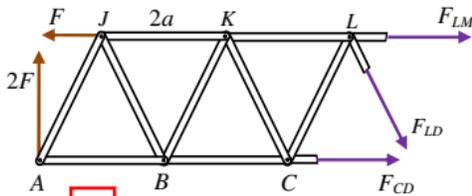


0,5

$$\sum M_{Bz} = 0 \Rightarrow -F_{JK} 2a + F 2a - 2F 2a = 0 \Rightarrow$$

$$F_{JK} = -F \quad \text{Compressão} \quad 0,5$$

Força na barra LM:



1,0

Da geometria:

$$F_{LDx} = \frac{F_{LD}\sqrt{5}}{5} \quad \text{e} \quad F_{LDy} = \frac{F_{LD}2\sqrt{5}}{5}$$

Equações de equilíbrio:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 2F - \frac{F_{LD}2\sqrt{5}}{5} = 0 \Rightarrow F_{LD} = \sqrt{5}F$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -F + F_{LM} + \frac{F_{LD}\sqrt{5}}{5} + F_{CD} = 0$$

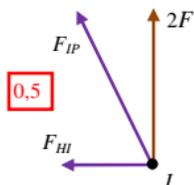
$$\Rightarrow F_{LM} = F - \frac{\sqrt{5}F\sqrt{5}}{5} - F_{CD} \Rightarrow F_{LM} = -F_{CD}$$

$$\sum M_{Lz} = 0 \Rightarrow F_{CD} 2a - 2F 5a = 0 \Rightarrow F_{CD} = 5F$$

$$\Rightarrow F_{LM} = -5F \quad \text{Compressão} \quad 0,5$$

Força na barra IP:

Equilíbrio do nó I:



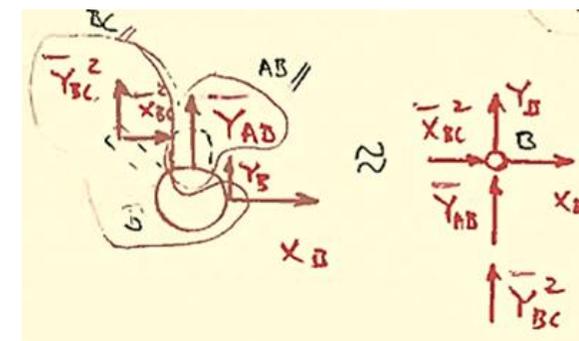
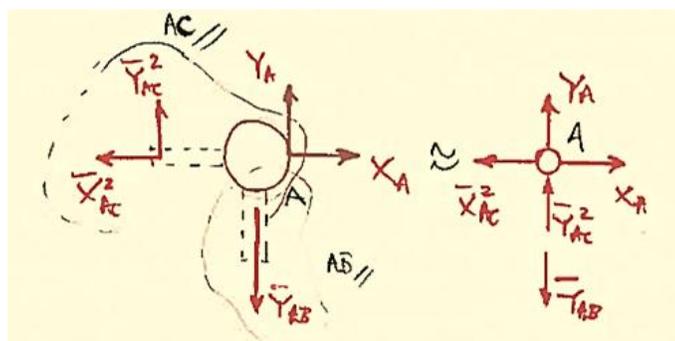
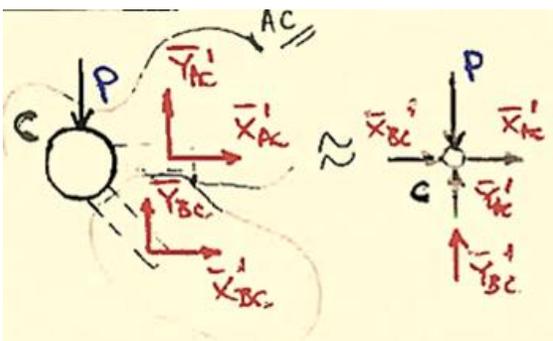
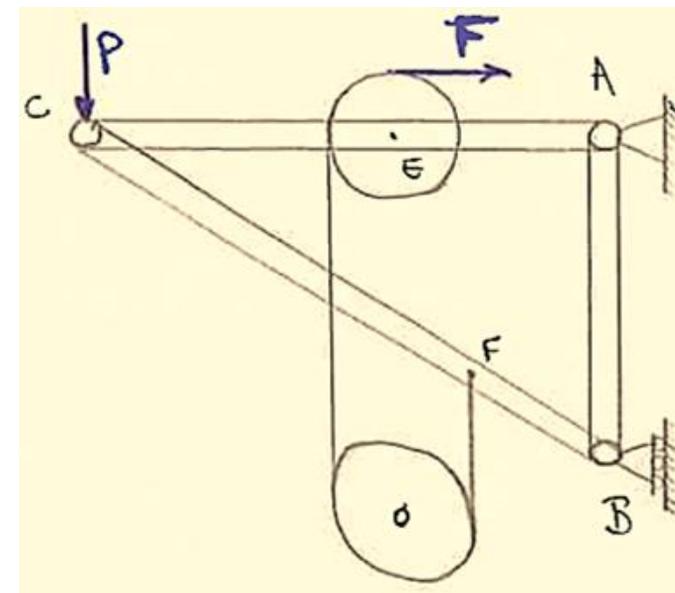
0,5

$$|F_{IPy}| = 2|F_{IPx}| \Rightarrow |F_{IP}| = \frac{\sqrt{5}}{2}|F_{IPy}|$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 2F + F_{IPy} = 0 \Rightarrow F_{IPy} = -2F \Rightarrow F_{IP} = -\sqrt{5}F \quad \text{Compressão} \quad 0,5$$

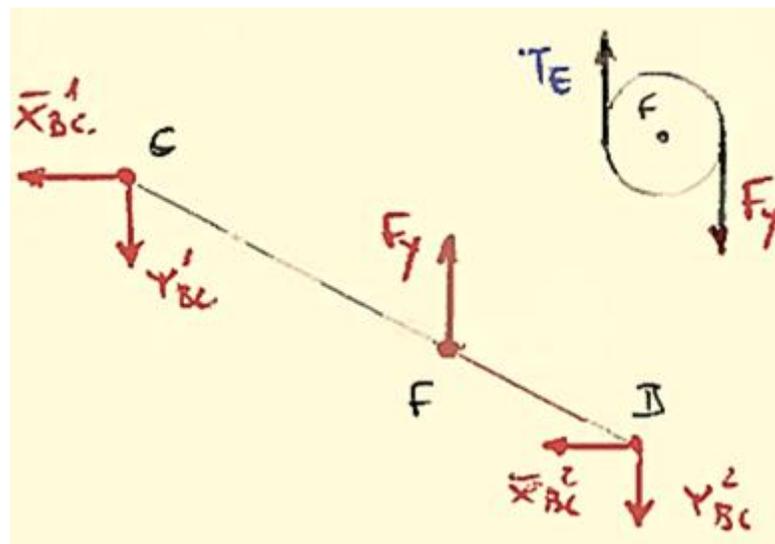
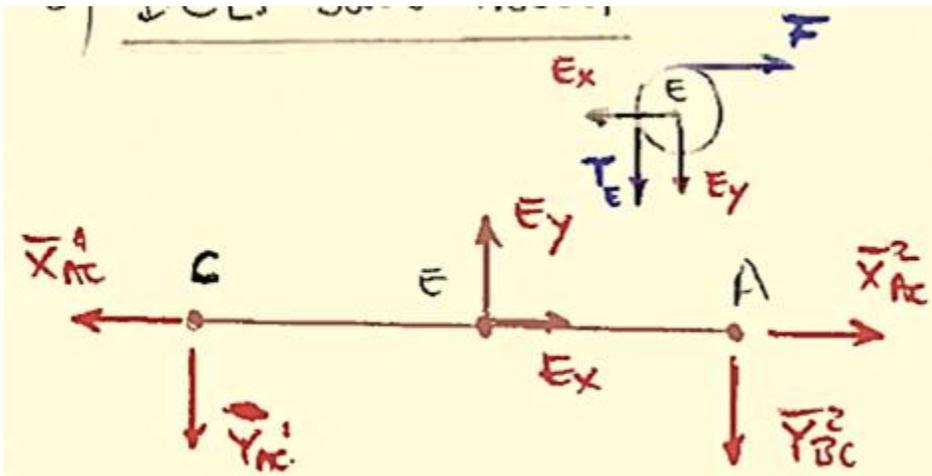
## □ Análise de Barras Biarticuladas vs. Barras de Treliça

- Para o sistema ao lado, determine:
    - Quais barras são biarticuladas e quais barras são de treliça;
    - Os DCLs dos nós  $A$ ,  $B$  e  $C$ ;
    - Os DCLs das barras isoladas;
    - Os DCLs das barras + nós.
  - Barras biarticuladas:  $AC$  e  $BC$  ; Barra de treliça:  $AB$
- Atenção:** barras de treliça **não** são submetidas a carregamentos ao longo do seu comprimento.
- DCLs dos nós  $A$ ,  $B$  e  $C$ :



## □ Análise de Barras Biarticuladas vs. Barras de Treliça

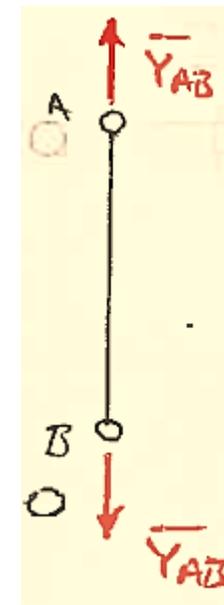
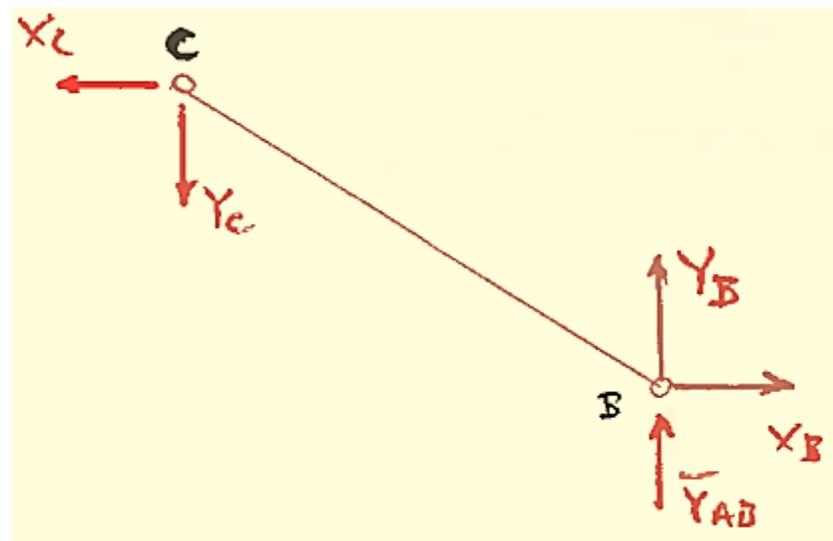
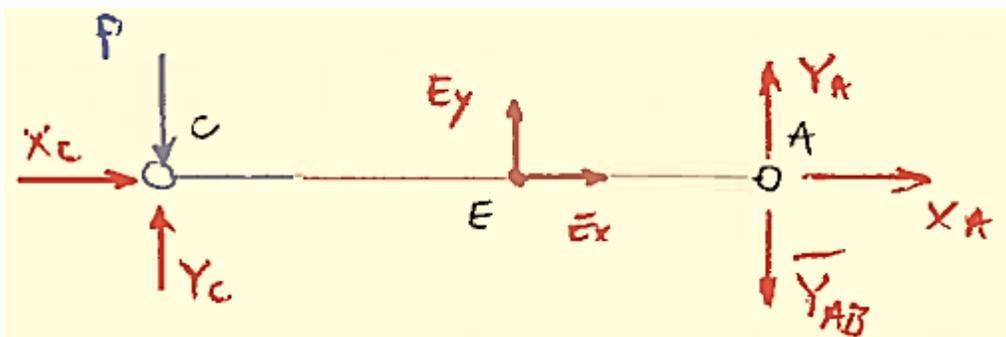
- DCLs das barras isoladas:



Barra de  
treliça

## □ Análise de Barras Biarticuladas vs. Barras de Treliça

- DCLs das barras + nós:

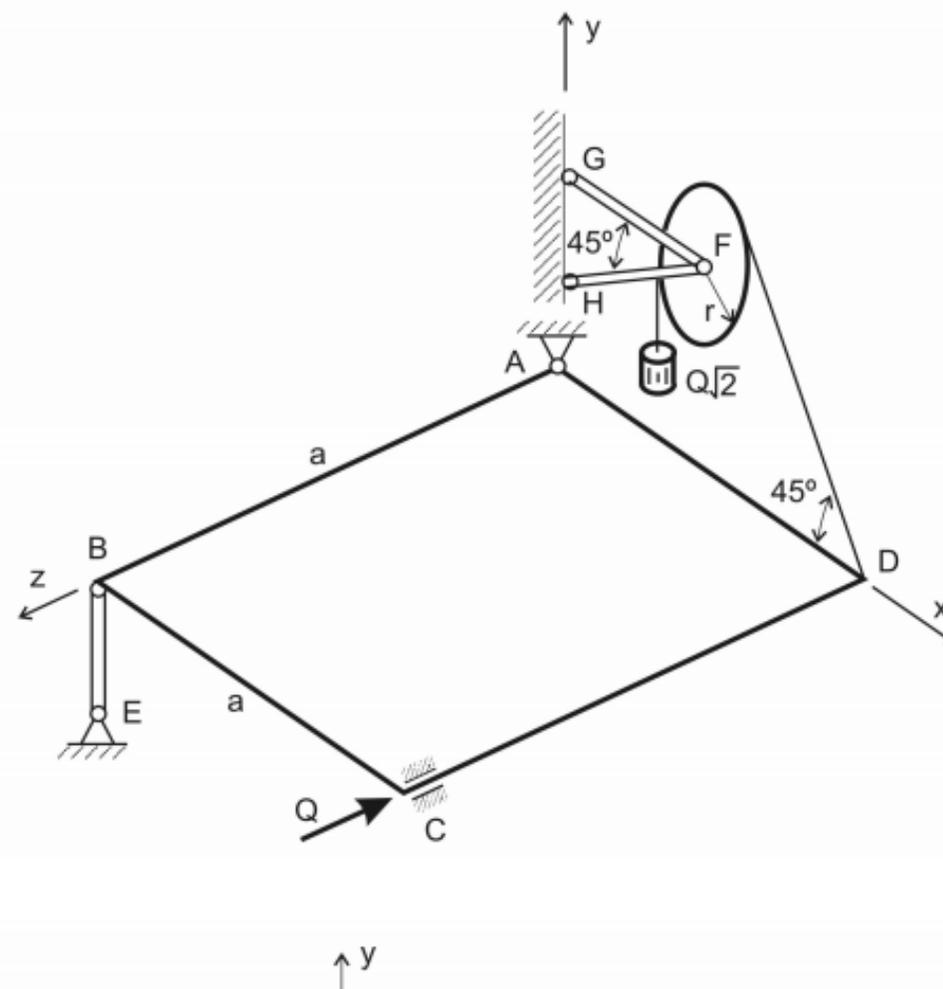


## Exercício 2

2016 – P1 – Q1

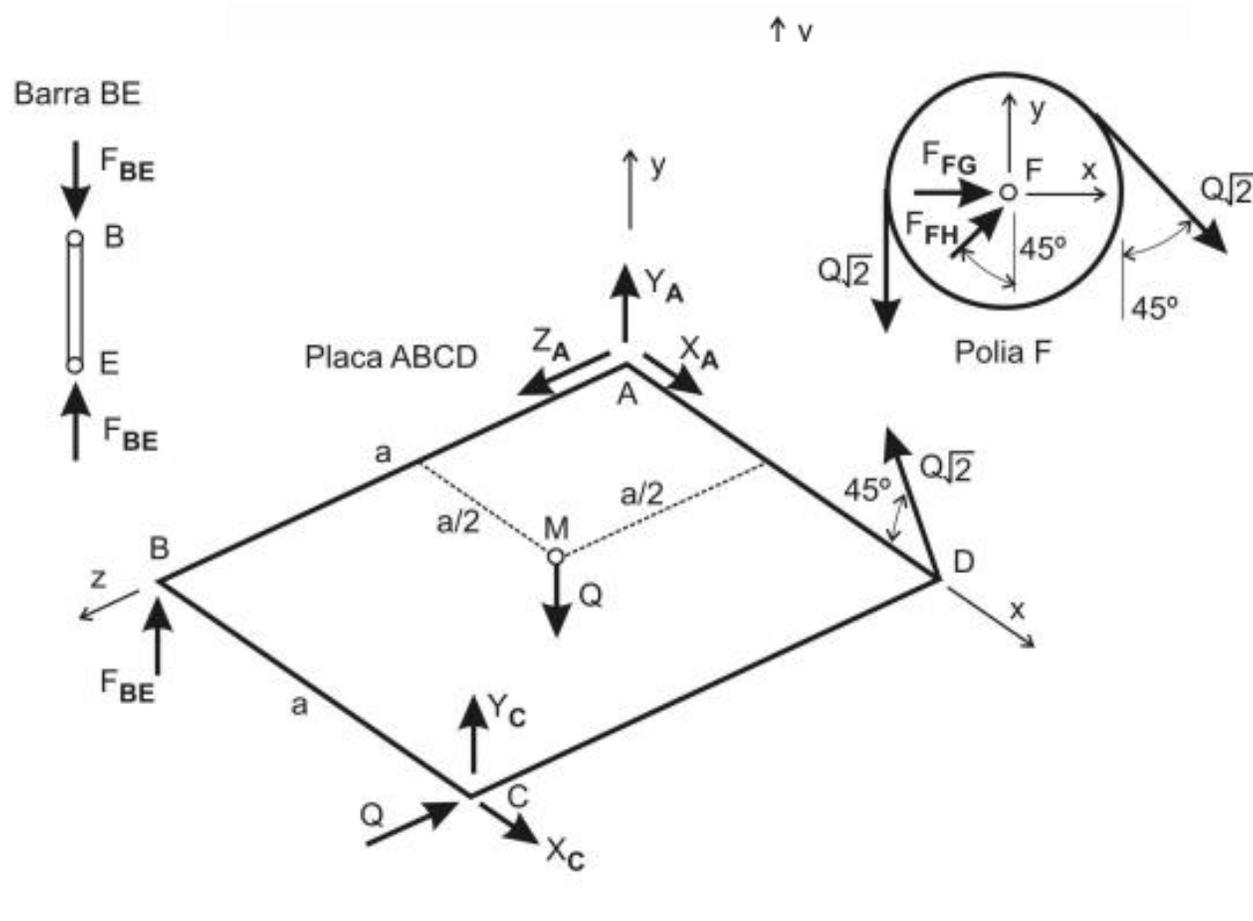
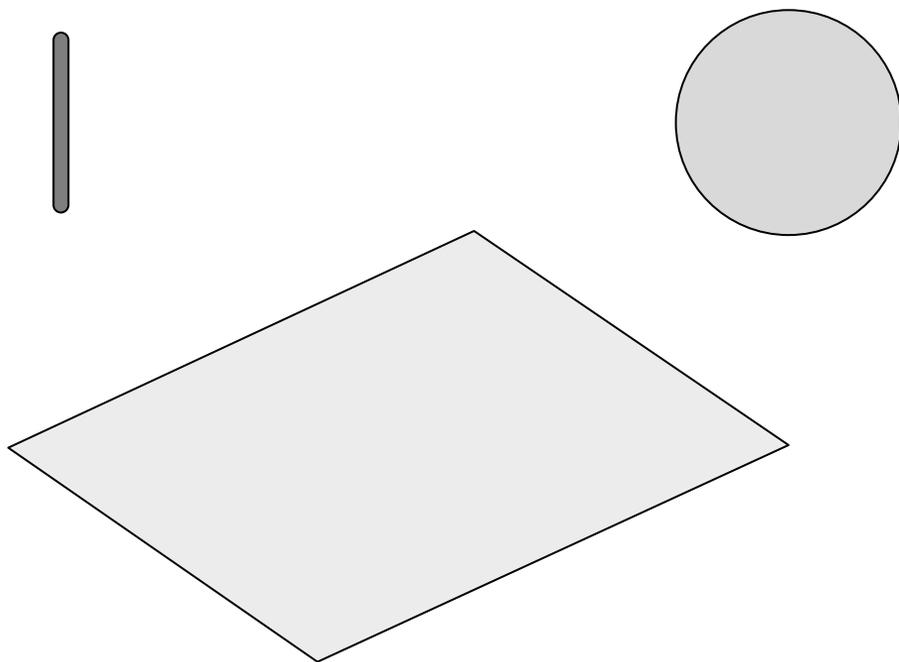
**1ª Questão (4.0 pontos):** A placa quadrada  $ABCD$  de lado  $a$  está no plano  $xz$ , é homogênea com peso  $Q$ , está articulada em  $A$  e  $B$ , e está presa por um anel (eixo paralelo a  $z$ ) em  $C$ . A barra  $BE$  tem peso desprezível e está articulada em  $B$  e  $E$ . A polia e seu suporte têm peso desprezível e estão no plano  $xy$ , com a barra  $FG$  paralela a  $x$ , sendo que a polia suporta o peso  $Q\sqrt{2}$  por um fio ideal conectado ao ponto  $D$  da placa. Pede-se:

- Faça o diagrama de corpo livre da placa, da barra  $BE$  e da polia.
- Escreva as equações de equilíbrio da placa.
- Determine as forças atuantes na placa em  $C$ .
- Determine a força atuante na barra  $FH$  do suporte da polia, indicando se é de tração ou compressão.
- O sistema de forças, constituído somente pela força  $Q$  aplicada em  $C$  e a força do fio em  $D$ , é equivalente a uma única força? Justifique.



# Exercício 2 (cont.)

2016 – P1 – Q1





## Exercício 2 (cont.)

2016 – P1 – Q1

b) Forças na placa:

$$\vec{F}_A = X_A \vec{i} + Y_A \vec{j} + Z_A \vec{k}; (\vec{F}_A; A)$$

$$\vec{F}_B = F_{BE} \vec{j}; (\vec{F}_B; B)$$

$$\vec{F}_C = X_C \vec{i} + Y_C \vec{j} - Q \vec{k}; (\vec{F}_C; C)$$

$$\vec{F}_D = -Q \vec{i} + Q \vec{j}; (\vec{F}_D; D)$$

$$\vec{F}_M = -Q \vec{j}; (\vec{F}_M; M)$$

Equações: (1,5 pontos)

$$\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} X_A + X_C - Q = 0 & (1) \\ Y_A + F_{BE} + Y_C + Q - Q = 0 & (2) \text{ e} \\ Z_A - Q = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\vec{M}_A = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} -F_{BE} - Y_C + \frac{Q}{2} = 0 & (4) \\ X_C + Q = 0 & (5) \\ Y_C + Q - \frac{Q}{2} = 0 & (6) \end{cases}$$

c) De (5) e (6):  $\vec{F}_C = -Q \vec{i} - \frac{Q}{2} \vec{j} - Q \vec{k}$  (0,5 pontos)

d) Para a polia:

$$\sum F_y = 0: -Q\sqrt{2} - Q + F_{FH} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow F_{FH} = Q(2 + \sqrt{2}) \text{ (compressão)}$$

e) Sistema  $(-Q \vec{k}; C)$  e  $(\vec{F}_D; D)$ :  $\vec{R} = -Q \vec{i} + Q \vec{j} - Q \vec{k} \neq \vec{0}$  e  $\vec{M}_D = \vec{0} \Rightarrow \vec{M}_D \cdot \vec{R} = 0$

Portanto, o sistema é equivalente a uma única força: a resultante  $\vec{R}$  acima, aplicada em D. (0,5 pontos)



## □ Referências

- [1] Merian J.L., Kraige L.G., Bolton, J.N. **Engineering Mechanics – Vol. 1 Statics**, 9<sup>th</sup> edition, John Wiley & Sons, Inc. 2018.
- [2] Hibbeler R.C. **Engineering Mechanics – Vol. 1 Statics**, 14<sup>th</sup> edition in SI units, Pearson Education, Inc. 2017.
- [3] França L.N.F., Matsumura A.Z. **Mecânica Geral**, 3<sup>a</sup> edição, Edgard Blücher, 2011.